Глава 1. МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

1.1. Коливальні процеси

Багато фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів (явищ) повторюються в часі, тобто відбуваються періодично. Прикладом таких періодичних явищ є рух маятника годинника, зміна заряду конденсатора коливального контуру, осциляції концентрацій складу під час хімічних реакцій, осциляції кількості різних тварин у біологічній системі „хижак-жертва", тощо. Подібні періодичні процеси називають *коливальними* або просто *коливаннями*.

Доцільність введення такого спільного для різних галузей науки і навіть різних наук терміну обумовлена тим, що всі вище перелічені періодичні процеси описуються однаковими за своїм видом рівняннями. Причому, як це не дивно, диференціальні рівняння, що описують коливальні процеси, мають досить простий вигляд.

Вивчення коливань розпочнемо з найпростішого випадку, а саме: періодичного руху матеріальної точки.

1.2. Означення механічних коливань

Механічними коливаннями називають просторовий рух, під час якого відбувається часова повторюваність положення рухомого тіла. Щоб розібратися, розглянемо найпростіший коливальний рух матеріальної точки – наприклад, математичного (рис. 1а) чи пружинного маятнику (рис. 1 б), або фізичного маятнику, коли стан рухомого тіла описується однією координатою чи одним кутом. Під час такого руху координата, що характеризує положення маятника, через однакові проміжки часу проходить через одне й те ж саме положення і має в ньому одну й ту ж саму (за величиною і напрямком) швидкість.

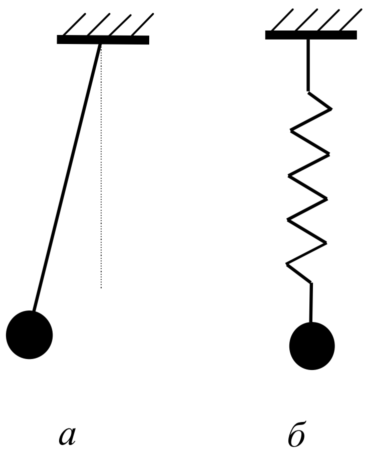

Рис. 1

Слід відрізняти вільні механічні коливання, які відбуваються в коливальній системі за рахунок дії лише її внутрішніх сил без будь-якого втручання зовнішніх тіл, від коливань, що відбуваються завдяки дії саме сил ззовні. Насправді, для виникнення коливального руху, як і руху взагалі, необхідна дія зовнішніх сил, які повинні здійснити збурення коливальної системи, щоб в ній розпочалися коливання. Таким чином, *вільними* є коливання, що спостерігаються в системі після припинення, як правило короткочасної, зовнішньої сили, яка збурюючи систему, виводить її з початкового стану спокою.

Якщо в системі є тертя, вільні коливання починають згасати, тобто відбуваються певний обмежений час. Такі коливання називають *згасаючими*.

Існують модельні, або умоглядні уявлення, про вільні незгасаючі коливання, які могли б відбуватися в коливальній системі, якби не було сили тертя. У разі, коли вільні незгасаючі коливання здійснюються за гармонічним законом, їх називають *власними* коливаннями.

Рух голки швейної машинки також є періодичним і формально задовольняє означенню механічних коливань. Але періодичність руху голки є наслідком дії зовнішньої періодичної сили. В таких випадках коливання називають *вимушеними* механічними коливаннями.

На рис. 2 для прикладу наведено графік часової залежності x-ої координати тіла під час коливального руху. Функція $x(t)$ є періодичною і її значення повторюються через певний проміжок часу T, який називається *періодом*. Врахуємо, що будь-яка періодична функція може бути представлена сумою функцій косинусів чи синусів. Зокрема, функція, яка зображена на рис. 2, може бути записана у вигляді ряду

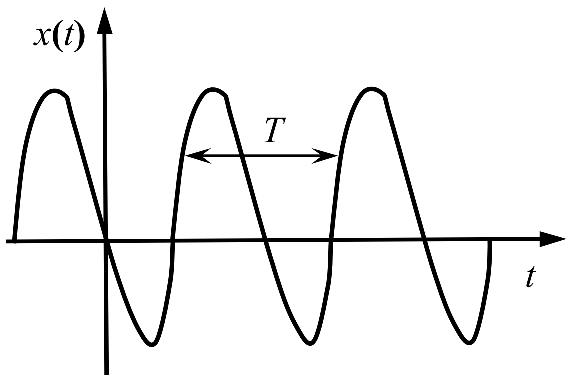

Рис. 2

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \cos(\omega_j t + \varphi_j),$$

де j – індекс суми, x_j, ω_j, φ_j – параметри ряду, які є постійними для кожного значення індексу, причому величина ω_j обернено пропорційна періоду і лінійно залежить від індекса (номера j) суми: $\omega_j = \dfrac{2\pi j}{T}$. Таке представленням функції називають розкладом в *ряд Фур'є*, або *гармонічним аналізом*. Кожен з косинусів під знаком суми називають *гармонікою* складного періодичного процесу. Повна сукупність гармонік $\{\omega_j\}$ утворює *спектр* коливного руху $x(t)$.

Величини параметрів гармонік залежать від вигляду періодичного процесу. Найпростіший коливний процес описується однією гармонікою так, що $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Коливання, які здійснюються за законом синуса, або косинуса (це безпосередньо залежить від величини параметру φ_0), називаються *гармонічними* коливаннями (інколи їх називають *синусоїдальними*). Здійснимо спочатку опис гармонічних коливань.

1.3. Коливальна система

Системи, в яких спостерігаються вільні механічні коливання, називають *коливальними* системами. Вільні коливання в коливальних системах виникають внаслідок дії внутрішніх сил, які за виключенням внутрішніх дисипативних сил тертя, є потенціальними. Тому внутрішні сили, що спричиняють коливання, можна характеризувати за допомогою потенціальної енергії. В курсі механіки відзначалося, що коливальний періодичний рух може виникати поблизу положення рівноваги, де потенціальна енергія має мінімум.

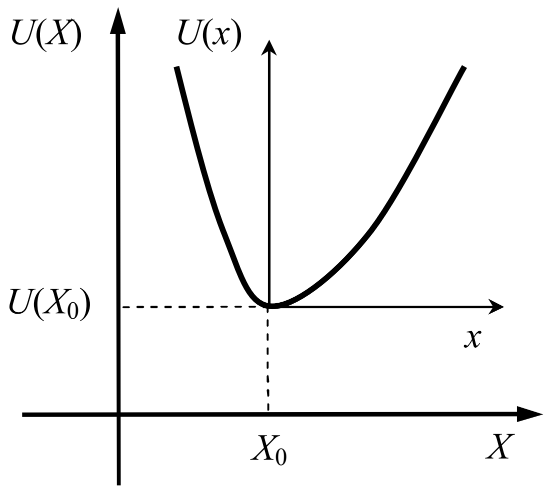

Рис. 3

На рис. 3 зображено графік залежності потенціальної енергії точкового тіла коливальної системи у найпростішому випадку одновимірного руху. Координату положення тіла у довільній лабораторній системі координат позначимо літерою X. Потенціальну енергію, яка є функцією від координати, запишемо у вигляді $U=U(X)$. Величина U_0 потенціальної енергії в точці свого мінімуму, положення якої на рис. 2 задається координатою X_0, визначається рівністю $U_0=U(X_0)$. За умови, що функція $U=U(X)$ неперервна і має щонайменше похідні другого порядку, потенціальну енергію в околі точки мінімуму можна представити у вигляді поліному

$$U(X) = U(X_0) + \left.\frac{dU}{dX}\right|_{X=X_0}(X - X_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dX^2}\right|_{X=X_0}(X - X_0)^2,$$

де відповідні похідні розраховуються, як зазначалося, в точці мінімуму.

Як відомо, в цій точці похідна першого порядку від потенціальної енергії задовольняє умові $\left.\frac{dU}{dX}\right|_{X=X_0} = 0$.

Видно, що в поліноміальному представленні потенціальна енергія задається як функція від різниці координат – координати X миттєвого положення тіла і координати X_0 точки рівноваги. Різницю X–X_0 називають *зміщенням*. Кількісно воно визначає відхилення тіла від положення рівноваги. Зміщення позначають літерою x і воно згідно означенню $x \equiv X - X_0$.

Зі зміщенням можна зв'язати систему координат, початок якої співпадає з точкою положення рівноваги коливальної системи, а координатна вісь направлена вздовж коливального руху (див. рис. 3). Таку систему можна вважати власною системою координат коливальної системи.

Потенціальна енергія визначається з точністю до довільної константи. Це математичне твердження дозволяє довільним чином вибирати її нульовий рівень. У власній системі координат точку нульового рівня потенціальної енергії можна співставити з точкою рівноваги. Тобто у повній відповідності до рис. 3 можна вважати, що $U_0 \equiv U(X_0) = 0$.

Таким чином, з урахуванням вище введених означень вираз для потенціальної енергії як функції зміщення x можна записати у вигляді:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 ,$$

де k – коефіцієнт, яким ми позначили другу похідну потенціальної енергії в положенні рівноваги: $k \equiv \left.\frac{d^2U}{dX^2}\right|_{X=X_0}$.

Бачимо, що вираз для потенціальної енергії, записаний для малих зміщень, подібний до виразу потенціальної енергії розтягнутої пружини. Тому коефіцієнт k називають *коефіцієнтом жорсткості* коливальної системи.

Для розрахунку сили, яка діє на рухоме тіло коливальної системи, врахуємо, що величина сили визначається градієнтом потенціальної енергії: $\vec{F} = -gradU(x)$. За такого означення для одновимірного випадку проекція сили може бути легко записана у вигляді:

$$F_x = -kx ,$$

де, як вже говорилося, x – зміщення, а F_x – проекція внутрішньої сили (чи рівнодійної внутрішніх сил), яка визначена у власній системі координат.

З отриманого виразу для сили маємо, що поблизу положення рівноваги сила є прямо пропорційною зміщенню і направленою протилежно до нього $F_x \uparrow\downarrow x$.

1.4. Диференціальне рівняння вільних незгасаючих механічних коливань

Прикладом механічної коливальної системи є *пружинний маятник*. Він складається з пружини, один кінець якої є фіксованим і нерухомим, а до другого кінця пружини приєднано тіло, яке можна вважати точковим і яке здійснює коливання (рис. 4, де показана горизонтальна пружина). Пружна сила, яка зі сторони пружини діє на тіло, є *внутрішньою* силою коливальної системи. Величина і напрямок цієї сили залежать від стадії коливань, що безпосередньо характеризується миттєвим положенням прикріпленого до пружини тіла і напрямком його руху.

Вважатимемо, що коливання пружинного маятника здійснюються без втручання зовнішніх сил. Крім того, нехтуватимемо дією сили тертя. За цих припущень тіло здійснює вільні незатухаючі коливання, які ми визначили як власні коливання.

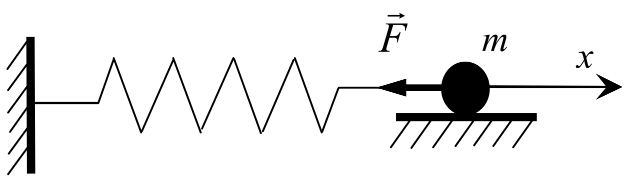

Рис. 4

Вище було показано, що при **малих** величинах зміщення внутрішня сила, під дією якої рухається тіло, є пружною. Вона, як відомо, пропорційна зміщенню і направлена протилежно до нього: $F_x = -kx$. У випадку пружинного маятника, сила що прикладена до тіла, визначається законом пружності Гука, а коефіцієнт k є жорсткістю пружини. Координатну вісь власної системи координат пружинного маятника направимо вздовж пружини (рис. 4).

Для пружинного маятника зміщенням є видовження пружини, яке в обраній системі координат додатне при видовженні пружини і від'ємне при її стиску. Зображений на рис. 4 вектор сили пружності відповідає випадку розтягнутої пружини.

Для опису руху тіла скористаємось другим законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

де m – маса точкового тіла, $\vec{a}$ – його прискорення.

Запишемо це рівняння для проекцій:

$$ma_x = -kx,$$

де a_x – проекція прискорення, яка є похідною другого порядку від координати тіла $x \equiv x(t)$, тобто другою похідною від зміщення: $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2}$. Отже, рівняння руху набуває вигляду:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

яке називають рівнянням руху одновимірного *осцилятора*.

Поділимо це рівняння на m і запишемо його у вигляді диференційного рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

в якому відношення коефіцієнту жорсткості до маси тіла позначено $\omega_0^2 \equiv k/m$. Величину ω_0 називають *власною частотою*. В СІ ω_0 вимірюють в $[\omega_0]$=с$^{-1}$.

Отримане рівняння другого порядку називають *диференційним рівнянням вільних незгасаючих коливань*.

Переконаємось, що розв'язком цього диференційного рівняння є гармонічна функція

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Дійсно, знайдемо другу похідну від цієї функції, а саме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0).$$

Підставимо $x(t)$ і її другу похідну в диференційне рівняння коливань, що дає:

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) + A\omega_0^2\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Винесемо за дужки спільні множники, внаслідок чого рівняння переходить у рівність:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.$$

Функція косинус, яка залежить від часу, не може забезпечити виконання цієї рівності для довільних моментів часу. Тому це рівняння для будь-якого значення t може бути задоволено тільки при виконанні рівності $\omega = \omega_0$.

Отже, часова залежність зміщення при власних коливаннях пружинного маятника описується виразом

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В результаті зроблених розрахунків приходимо до наступних висновків. Вільні незгасаючі коливання пружинного маятника відбуваються з власною частотою, яка не залежить ні від способу збурення коливань, ні від величини зміщення (за умови, що у розкладі потенціальної енергії можна обмежитись квадратичним доданком). Знайдено також, що величина зміщення залежить від значення параметрів A і φ_0. У випадку вільних незгасаючих коливань ці параметри в ході коливного процесу не змінюються і залишаються сталими. Значення цих параметрів знаходять з початкових умов, які залежать від способу збурення коливань.

1.5. Власна частота, амплітуда, період, фаза власних коливань

Модуль максимального зміщення коливальної системи називають *амплітудою*. Згідно з отриманого розв'язку диференціального рівняння вільних незгасаючих коливань максимальне значення зміщення $x_{\max} \equiv A$ і визначає амплітуду коливань.

Миттєве значення координати під час коливального руху визначається аргументом гармонічної функції, який називають *фазою*. Згідно з цим означенням фаза коливань має вигляд

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0.$$

Бачимо, що для власних коливань фаза лінійно залежить від часу, або, що теж саме, пропорційна йому.

Величина фази, визначена для початкового моменту часу $t = 0$, називається *початковою* фазою $\varphi_0 \equiv \varphi(t = 0)$.

Найпростішим способом збурення вільних коливань є виведення системи з стану рівноваги, коли систему відхиляють від положення рівноваги, а потім у деякий момент часу, який вважається початковим, її вільно, тобто з нульовою швидкістю відпускають. Таку процедуру досить легко уявити для математичного маятника, коли спочатку кульку маятника відвели (відхилили) від положення рівноваги, а потім відпустили.

За такого збурення для початкового (нульового) моменту часу відомими є скінчене початкове зміщення $x_0 \equiv x(t=0)$, і початкова швидкість, яка в нашому прикладі дорівнює нулю: $v_0 \equiv v_x(t=0)=0$.

Зміщення

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

тіла коливної системи, а також швидкість

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_x(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

його руху повинні задовольнити оговореним початковим умовам.

В результаті приходимо до двох рівнянь:

$$x_0 = A\cos\varphi_0,$$

$$0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0.$$

З другого рівняння знаходимо початкову фазу $\varphi_0 = 0$, а з першого – амплітуду, яка дорівнює початковому зміщенню: $A = x_0 \equiv x_{\max}$, тобто початкове відхилення і стає для збуреного коливального процесу максимальним.

Таким чином, вираз для часової залежності зміщення набуває вигляду:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t.$$

Для приведеного способу збурення коливання здійснюються за законом косинуса, а амплітуда коливань дорівнює початковому зміщенню.

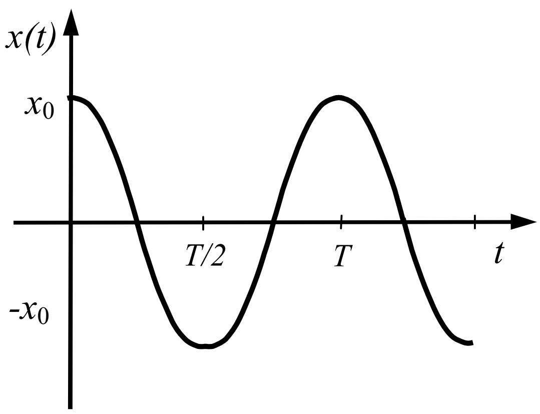

Рис. 5

На рис. 5 наведені графіки часових залежностей зміщення для цього способу збурення коливань.

Розглянемо дещо інший спосіб збурення коливань. Припустимо, що до початку коливань тіло коливальної системи знаходиться в положенні рівноваги. В початковий момент тілу миттєво (поштовхом) надають швидкості. Отже, початковими умовами є: $x_0=x(t=0)=0$ і $v_0=v_x(t=0)\neq 0$. Для цих умов рівняння для A і φ_0 набувають вигляду

$$0 = A\cos\varphi_0,$$

$$v_0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0.$$

З першого рівняння знаходимо $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$, а з другого – $A = \frac{v_0}{\omega_0}$.

При такому збуренні коливального руху часова залежність для зміщення має вигляд:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t .$$

При збуренні коливань поштовхом, коли задана тільки початкова швидкість, коливання здійснюються за законом синуса, а амплітуда коливань прямо пропорційна величині початкової швидкості.

У загальному випадку збурення коливань ненульовими можуть бути і початкове зміщення, і початкова швидкість. Це, зокрема, відбувається, коли кульку математичного маятника не тільки відхили від положення рівноваги, а ще й штовхнули. За цих умов рівняння для A і φ_0 набувають вигляду:

$$x_0 = A\cos\varphi_0 ,$$

$$v_0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0 .$$

З цих рівнянь знаходимо $tg\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$ і $A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$, звідки маємо, що A та φ_0 визначаються виразами

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} ,$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}(-\frac{v_0}{\omega_0 x_0}) .$$

Зрозуміло, що з цих загальних формул прямо випливають вирази, отримані вище щодо окремих випадків збурення коливань.

Для характеристики періодичних процесів використовують поняття періоду, який, як зазначалося, позначають *T*. *Періодом* коливань називають проміжок часу, за який здійснюється одне повне коливання. Іншими словами, період визначає найменший час, за який гармонічна функція «повертається» до свого будь-якого вихідного значення, або $x(t) = x(t+T)$. Експериментально величину періоду можна знайти з відношення часу t до кількості n коливань, що відбулись за цей час:

$$T = \frac{t}{n} .$$

Для характеристики коливань використовують також поняття *частоти*, яка визначає кількість коливань, що відбуваються за одиницю часу.

У відповідності до цього означення отримуємо, що частота $f = \frac{n}{t}$.

З урахуванням попередньої формули для періоду бачимо, що $f = \frac{1}{T}$.

В СІ частоту вимірюють в герцах: [f] =Гц.

За один період фаза коливань змінюється на 2π. Отже можна записати $\omega_0 T = 2\pi$. Звідки знаходимо, що період власних коливань визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Подібне співвідношення можна записати і для частоти:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

З урахуванням означення власної частоти вираз для періоду коливань набуває вигляду

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

де, як і раніше, k – коефіцієнт жорсткості коливної системи. Він, як було видно вище, дорівнює значенню похідної другого порядку від потенціальної енергії в точці рівноваги. Для пружинного маятника, нагадаємо, цей коефіцієнт є коефіцієнтом жорсткості пружини.

Підсумовуючи, зазначимо, що період вільних незгасаючих коливань не залежить від їх амплітуди. Цей результат є справедливим лише для коливань з настільки малим значенням зміщення, що в околі положення рівноваги виконується квадратична апроксимація для потенціальної енергії. Для достатньо великих величин зміщень квадратичне представлення для потенціальної енергії може вже не виконуватися. Врахування в потенціальній енергії більш високих ступенів для зміщення призведе до того, що диференційне рівняння коливань ускладниться і буде містити доданки, пропорційні квадрату зміщення, кубу зміщення і т. д. Зрозуміло, що роль кожного з цих доданків буде збільшуватися по мірі зростання величини амплітуди коливань. Тому для коливань великої амплітуди (їх ще називають *коливаннями з скінченою амплітудою*) період і частота вже залежатимуть від величини амплітуди, а спектр міститиме частоти, кратні власній частоті вільних коливань.

1.6. Кінетична, потенціальна та повна енергія вільних незгасаючих коливань

При вивченні вільних незгасаючих коливань дією сили тертя нехтують, а отже для власних коливань має виконуватися закон збереження механічної енергії. Перевіримо це твердження.

Потенціальна енергія коливальної системи визначається у власній системі координат, і для неї нульовим рівнем вибрано положення рівноваги. У випадку малих зміщень потенціальна енергія в околі положення рівноваги може бути, як говорилося, наближено записана у квадратичній формі: $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$, де k – коефіцієнт жорсткості коливальної системи, а x – зміщення. У разі коливань, які відбуваються у такому силовому полі, залежність зміщення від часу описується гармонічним законом і має вигляд $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$. Підставимо цю залежність у вираз для потенціальної енергії, звідки отримаємо, що величина потенціальної енергії додатна і залежить від часу наступним чином:

$$U(t)=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0).$$

Очевидно, що максимальне значення потенціальної енергії дорівнює $U_{\max}=\frac{1}{2}kA^2$

Врахуємо, що квадрат косинуса можна переписати через косинус подвійного аргументу:

$$U(t)=\frac{1}{2}kA^2\frac{1+\cos 2(\omega_0 t+\varphi_0)}{2}.$$

Таким чином, маємо, що часова залежність потенціальної енергії при вільних гармонічних коливаннях може бути представлена сумою двох доданків, один з яких не залежить від часу, а другий змінюється періодично з частотою вдвічі більшою частоти власних коливань:

$$U(t)=\frac{1}{4}kA^2+\frac{1}{4}kA^2\cos 2(\omega_0 t+\varphi_0).$$

З цього виразу видно, що середнє значення потенціальної енергії за період коливань дорівнює половині її максимального значення, а саме:

$$\bar{U}=\frac{1}{4}kA^2\equiv\frac{1}{2}U_{\max}.$$

Кінетична енергія, як завжди, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості:

$$E_{кін} = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Для випадку гармонічних коливань швидкість описується виразом $v_x(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Отже, кінетична енергія змінюється з часом за законом:

$$E_{кін} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Максимальне значення кінетичної енергії дорівнює $E_{кін}^{(\max)} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$

Перепишемо вираз для $E_{кін}$ також через косинус подвійного аргументу, що дає:

$$E_{кін} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \frac{1-\cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2} = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 - \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Звідси випливає, що середнє значення кінетичної енергії дорівнює половині її максимального значення, тобто

$$\overline{E}_{кін} = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2 \equiv \frac{1}{2} E_{кін}^{(\max)} .$$

Таким чином, кінетична енергія коливань, як і їх потенціальна енергія, може бути записана сумою двох доданків, один з яких не залежить від часу, а другий змінюється з часом з подвійною частотою.

Обчислимо повну енергію коливань, яка за означенням дорівнює сумі кінетичної та потенціальної енергій:

$$E = E_{кін} + U = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

При знаходженні суми врахуємо, що $\omega_0^2 = k/m$:

$$E = \frac{1}{2} m \frac{k}{m} A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] = \frac{1}{2} k A^2 .$$

В результаті, приходимо до шуканого висновку: при вільних механічних незгасаючих коливаннях повна енергія залишається постійною. Власне, цей результат є наслідком закону збереження механічної енергії, за яким при нехтуванні дією сили тертя сума кінетичної та потенціальної енергії повинна зберігатися. Сума середніх значень кінетичної та потенціальної енергії дорівнює повній енергії.

Під час коливань кінетична і потенціальна енергії окремо змінюються з часом. При найбільшому відхиленні від положення рівноваги, коли зміщення максимальне, а швидкість дорівнює нулю, коливна система має тільки потенціальну енергію, величина якої дорівнює повній енергії системи. При проходженні положення рівноваги, коли зміщення x=0 і тіло має максимальну швидкість, коливна система має тільки кінетичну енергію, яка також дорівнює повній енергії коливань. Таким чином, під час коливального процесу відбувається перетворення кінетичної механічної енергії в потенціальну механічну енергію і навпаки так, що повна енергія залишається незмінною.

Збереження механічної енергії під час коливного процесу означає, що сума $E_{кін} + U = const$, або $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const$. Це, в свою чергу, свідчить, що похідна повної енергії по часу повинна дорівнювати нулеві, а отже, має мати місце співвідношення:

$$mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0.$$

Якщо врахувати, що $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{dx}{dt} = v$, то знову приходимо до рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

після ділення якого на масу, отримуємо вже знайоме нам диференційне рівняння вільних незгасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де $\omega_0^2 = k/m$ – квадрат власної (циклічної) частоти.

Таким чином, можна стверджувати, що отримане і проаналізоване нами рівняння вільних незгасаючих коливань є наслідком закону збереження механічної енергії.

1.7. Фазовий портрет коливання

Розглянемо коливальну систему, в якій відбуваються вільні незгасаючі коливання. Врахуємо, що імпульс тіла $p = mv$, що дозволяє представити енергію у вигляді

$$E_{кін} + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E = const,$$

де E – повна енергія системи.

Звідки знаходимо, що імпульс та координата тіла під час вільних незгасаючих коливань задовольняють співвідношенню:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1 \qquad \text{або} \qquad \left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 = 1.$$

У просторі з координатами x та p записане рівняння є еліпсом з півосями $\sqrt{2mE}$ та $\sqrt{2E/k}$ (див. рис. 6).

Простір, який визначений для координат та імпульсів, називається *фазовим простором.* Таким чином, у фазовому просторі траєкторія коливальної системи, яка здійснює вільні гармонічні коливання, є еліпсом.

Площа еліпсу, який визначається рівнянням $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, як відомо, дорівнює πab. Отже, площа S еліпсу фазової траєкторії коливального руху становить

$$S = \pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E/k} = 2\pi E\sqrt{m/k} = 2\pi\frac{E}{\omega_0}.$$

Площу, що обмежена фазовою траєкторією і яку поділено на 2π, називають *адіабатичним інваріантом*. Для коливальної системи, яка здійснює вільні незгасаючі коливання, адіабатичний інваріант

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega_0} = const$$

не змінюється, оскільки, як ми бачили, зберігається повна енергія системи. Адіабатичний інваріант є важливою характеристикою будь-якої коливальної системи, бо залишається незмінним і тоді, коли параметри системи не є постійними, а повільно (адіабатично) змінюються з часом. Наприклад, при адіабатичній зміні параметрів, якій відповідає, скажімо, зменшення частоти коливальної системи, відбувається таке саме зменшення і повної енергії системи, так що величина I зберігається у часі.

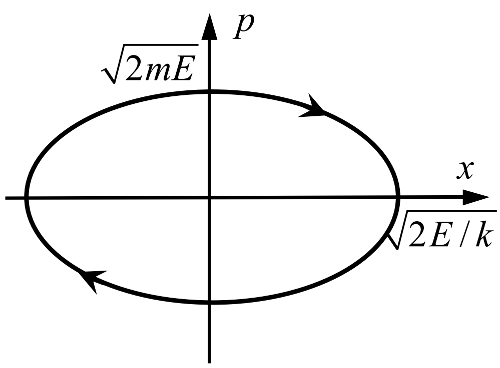

Рис. 6

1.8. Період коливань фізичного маятника

Неточкове, або скінчене, тіло довільної форми, яке може здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, називається *фізичним маятником*. На рис. 7 вісь обертання фізичного маятника, перпендикулярна до площини рисунку, проходить через точку O. Центр мас тіла маятника (на рис. 7 його позначено точкою C) не лежить на осі обертання і в положенні рівноваги знаходиться нижче осі обертання. Відстань від центру мас до цієї осі позначена ℓ. В стані рівноваги центр мас тіла буде знаходитися на вертикальній лінії, що проходить через вісь обертання. При відхиленні тіла від положення рівноваги воно, завдяки дії сили тяжіння, буде здійснювати періодичний (коливальний) обертальний рух. Положення тіла фізичного маятника під час такого коливального процесу характеризують кутом повороту φ, який визначають відносно положення рівноваги. Запишемо рівняння обертального руху твердого тіла

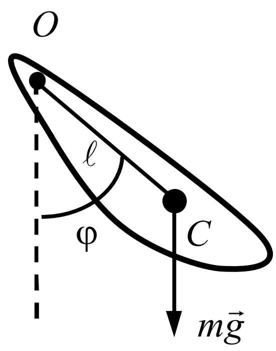

Рис. 7

$$I\varepsilon = M\ ,$$

де ε – кутове прискорення, I – момент інерції тіла, який визначений відносно осі обертання, а M – момент сили, що також визначений відносно цієї ж осі. Момент сили створює сила тяжіння, а його (моменту) величина дорівнює добутку сили на плече. Коли вісь обертання перпендикулярна до площини рисунку, плече дорівнює найменшій відстані від лінії дії сили до точки O. Таким чином, момент сили тяжіння дорівнює $M = -mg\ell\sin\varphi$, де знак мінус враховує, що момент сили тяжіння спричиняє рух, протилежний до початкового відхилення. Кутове прискорення визначається як похідна другого порядку від кута повороту: $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$. З урахуванням цих означень записане вище рівняння обертального руху набуває вигляду:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell\sin\varphi\ .$$

Розглянемо спочатку випадок малих коливань, коли $\varphi \to 0$ і коли є справедливий розклад $\sin\varphi \approx \varphi$. За такого наближення права частина рівняння обертального руху набуде вигляду $I\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell\varphi$, з якого легко приходимо до вже проаналізованого вище диференційного рівняння вільних незгасаючих коливань:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{mg\ell}{I}$. З точністю до означень, воно тотожне рівнянню механічних коливань, тому розв'язком отриманого рівняння також є гармонічна функція, що описує часову залежність координати, якою в даному випадку є кутове зміщення $\varphi(t)$; останнє має вигляд:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max}\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

де $\varphi_{\max}$ – амплітуда коливань (в кутових коливаннях вона відповідає максимальному куту відхилення тіла від його положення рівноваги), $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mg\ell}{I}}$ – власна частота цих коливань, а α – їх початкова фаза. Період коливань фізичного маятника визначається за тією ж формулою $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, але для них має дещо інший вигляд:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}.$$

Якщо фізичне тіло має розміри, які значно менші ℓ, то таке тіло можна вважати точковим. Забезпечити його обертання навколо горизонтальної осі можна, наприклад, коли тіло (це може бути кулька з малим радіусом, яку можна вважати точковим тілом) прикріплене до точки обертання за допомогою нерозтяжної нитки довжиною ℓ. Така коливальна система називається *математичним маятником*. Момент інерції точкового тіла відносно осі $I = mg\ell^2$. Використовуючи це співвідношення, знаходимо, що період коливань математичного маятника визначається за формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

Звідси вираз для власної частоти математичного маятника приймає остаточний вигляд:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$

Опис коливань фізичного маятника можна також здійснити, застосовуючи закон збереження енергії. При нехтуванні дією сили тертя повна механічна енергія фізичного маятника складається з кінетичної енергії та потенціальної енергії сили тяжіння. Величина повної енергії має зберігатися, а отже:

$$E = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\varphi) = const:$$

де $\ell(1-\cos\varphi)$ – висота, на яку підіймається центр мас тіла при його відхиленні від положення рівноваги. Коли $\varphi \to 0$ різниця $1-\cos\varphi \approx \frac{1}{2}\varphi^2$, і для випадку малих коливань записана повна енергія фізичного маятника може бути представлена у вигляді:

$$E = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mg\varphi^2 = const\,.$$

Розрахуємо похідну повної енергії та прирівняємо її до нуля. Тоді прямо отримаємо рівняння

$$I\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mg\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0\,,$$

яке після простого скорочення знову набуває вигляду диференційного рівняння вільних гармонічних коливань

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0$$

з власною частотою коливань фізичного маятника.