

5.4. Дифракція світла

Дифракцією світла називають явище огинання світлом перешкод та його поширення в область, де мала б бути тінь. Для спостереження дифракції на шляху поширення світлової хвилі розміщують непрозору перешкоду, яка лише частково закриває хвилю, тобто площа перешкоди менша за площу фронту хвилі. За перешкодою розташовують екран. На екрані в залежності від форми та розмірів перешкоди спостерігають дифракційну картину у вигляді сукупності темних та світлих смуг чи кілець. Дифракція спостерігається і в звичайних природних умовах. Наприклад, розсіювання світла крапельками туману є наслідком дифракції.

Явище дифракції є прямим проявом хвильових властивостей світла і не може бути пояснене, виходячи з уявлень геометричної оптики. Дифракція як хвильове явище зникає, коли довжина хвилі $\lambda \rightarrow 0$, і залежить від довжини хвилі. Явище дифракції виражене краще для довгих хвиль і менше для коротких, а отже для червоного світла його спостерігати легше, ніж для фіолетового. Це обумовлене тим, що при розкладанні світла на хвильовий спектр за рахунок дифракції червоне світло відхиляється більше, а фіолетове – менше. Таким чином, у дифракційному спектрі спостерігається послідовність розташування різних кольорів, яка є оберненою до послідовності цих кольорів у спектрі, що отримують за допомогою призми, коли червоне світло відхиляється менше, а фіолетове – більше (див. п. 5.2. Дисперсія світла).

5.4.1. Принцип Гюйгенса

Вперше принципову можливість зміни напрямку поширення світла перешкодою пояснив Гюйгенс, який припустив, що кожна точка фронту хвилі є

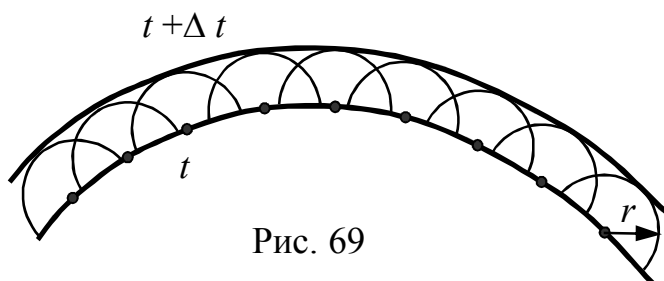


Рис. 69

джерелом вторинної хвилі. При цьому фронт хвилі у кожний наступний момент часу визначається обвідною фронтів вторинних хвиль. На рис. 69 показано зображення фронту хвилі для моменту часу t та для

наступного моменту часу $t + \Delta t$. Тонкими лініями на рис. 69 зображено fronti сферичних вторинних хвиль, джерела яких знаходяться на фронті, визначеного для моменту часу t . У такій картині вторинні хвилі випромінюються неперервно і, зокрема, на зображеному фронті починають випромінюватися в момент часу t . Якщо їх випромінювання відбувається протягом інтервалу Δt ,

то радіус сфер вторинних хвиль дорівнює добутку швидкості поширення хвиль на час Δt , тобто $r = v\Delta t$. За *принципом* Гюйгенса фронт хвилі в момент часу $t + \Delta t$ визначається обвідною вторинних хвиль і зсунеться також на відстань r .

Принцип Гюйгенса є корисним і дозволяє, наприклад, з точки зору хвильових уявлень пояснити закони відбивання та заломлення світла. Доведемо з використанням принципу Гюйгенса закон заломлення світла.

Для цього розглянемо два середовища, які розділяє плоска межа. Направимо на неї звичайну плоску хвилю. На рис. 70 зображені два промені $A'A$ та $B'B$ падаючої хвилі. На цьому рис. 70 показано також положення фронту AD падаючої хвилі для моменту часу, коли хвиля досягає точки A на межі середовищ. Відрізок AD , що відповідає фронту, перпендикулярний до променів $A'A$ та $B'B$. Позначимо Δt час проходження променем $B'B$ відстані $|DB| = v_1\Delta t$, де v_1 – швидкість поширення падаючої хвилі у першому середовищі, що знаходиться над межею. Згідно з принципом Гюйгенса, поки падаюча хвиля дійде до точки B , точки ділянки AB стануть джерелами вторинних хвиль.

Обвідна цих хвиль CB є фронтом заломленої хвилі. Вона, як і падаюча, буде плоскою хвилею, тому відрізок CB також перпендикулярний до заломлених променів. За час Δt вторинна хвиля з джерелом у точці A пройде відстань $|AC|$, причому $|AC| = v_2\Delta t$, де v_2 – швидкість поширення променів у другому середовищі. Довжина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ADB дорівнює $|AB| = \frac{|DB|}{\sin \alpha} = \frac{v_1\Delta t}{\sin \alpha}$, де α – кут падіння. Але AB є також гіпотенузою

прямокутного трикутника ABC , тому $|AB| = \frac{|BC|}{\sin \gamma} = \frac{v_2\Delta t}{\sin \gamma}$. Порівнюючи обидва

вирази для довжини гіпотенузи AB приходимо до вже відомого нам рівняння закону заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

де n_1 і n_2 – показники заломлення відповідних середовищ.

За допомогою того ж принципу Гюйгенса легко також якісно пояснити, чому на перешкоді може змінитися напрямок поширення хвилі. Дійсно, розглянемо непрозоре плоске тіло, яке має отвір (рис. 71). Направимо на нього плоску хвилю, хвильовий вектор якої перпендикулярний до площини тіла. Кожна точка отвору стає за Гюйгенсом джерелом вторинної сферичної хвилі. На рис. 71 показані центри таких хвиль і їх фронти, які зображені пунктиром. Обвідна вторинних хвиль визначає фронт поширення хвилі після проходження первинною хвилею отвору. Напрямок поширення кожної вторинної хвилі

перпендикулярний до її фронту і відповідає хвильовому вектору. На рис. 71 показані напрямки хвильових векторів для фронту хвилі, які формують вторинні хвилі після проходження хвилею отвору. Видно, що після

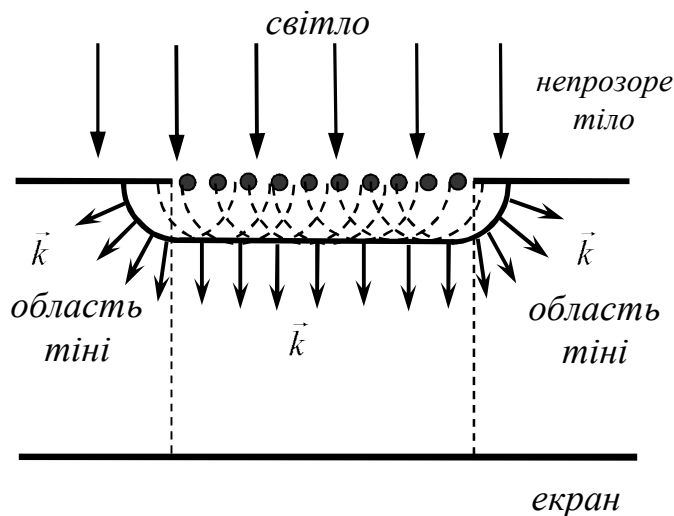


Рис. 71

проходження отвору хвиля вже не є плоскою, бо біля країв отвору її фронт викривляється. З напрямку хвильових векторів знаходимо, що хвиля дещо поширюється в область геометричної тіні. Тепер на екрані не буде чіткої геометричної тіні, яка б повністю відтворювала форму отвору, оскільки частина світла потрапляє в область тіні.

Таким чином, принцип Гюйгенса дозволяє пояснити, чому світло потрапляє в область тіні. Але цей принцип не може підказати, як буде розподілена інтенсивність світла вздовж екрану. Іншим принциповим недоліком принципу Гюйгенса є неможливість пояснити з його позицій утворення дифракційної картини, що складається з регулярного набору світлих та темних смуг або кілець. Навіть з попереднього розгляду явища інтерференції видно, що відмічена вада обумовлена тим, що принцип Гюйгенса нічого не говорить стосовно можливої ролі частот хвиль або, що теж саме, їх довжин в явищах подолання хвилями різного типу перешкод.

5.4.2. Принцип Гюйгенса-Френеля

Перше пояснення інтерференційних наслідків дифракції було дано Френелем, який суто геометричну побудову Гюйгенса доповнив положенням про інтерференцію вторинних хвиль. Дійсно, у відповідності з принципом Гюйгенса джерела вторинних хвиль лежать на фронті хвилі (або на хвильовій поверхні) і здійснюють коливання з однаковою фазою, тому ці джерела повинні бути когерентними. При накладанні вторинних хвиль від цих джерел також має відбуватися явище інтерференції – підсилення чи послаблення інтенсивності хвилі в залежності від оптичної різниці ходу вторинних хвиль. Таким чином, за Френелем дифракція фактично є інтерференцією вторинних хвиль, кількість яких нескінчена, бо кожна точка фронту може розглядатися як джерело вторинної хвилі.

В сучасній оптиці ці положення теорії дифракції складають принцип, який називають *принципом Гюйгенса-Френеля*. Зауважимо, що цей принцип застосовують, як правило, для сферичних електромагнітних хвиль або хвиль, фронт яких близький до сферичного.

Розглянемо точкове джерело S монохроматичної сферичної хвилі (рис. 72). Амплітуду коливань світлового вектора цієї хвилі у точці \vec{R} на поверхні позначимо $\vec{E}(\vec{R})$. Хвиля сферична, тому $|\vec{E}(\vec{R})| \sim 1/R$. Згідно з принципом Гюйгенса-Френеля хвильове збурення у точці A , створене сферичною хвилею з джерелом S у точці O , можна розглядати як результат

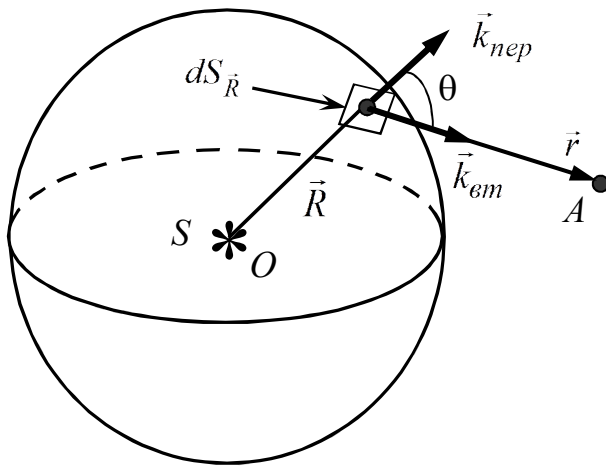


Рис. 72

інтерференції вторинних хвиль, джерела яких лежать на хвильовій поверхні цієї сферичної хвилі.

На рис. 72 показана сферична хвильова поверхня, на якій лежить точка, положення якої задає вектор \vec{R} (зауважимо, що точка A знаходиться поза межами цієї хвильової поверхні, зовні неї). Розіб'ємо хвильову поверхню на елементарні площі $dS_{\vec{R}}$.

Кожна така елементарна площа є джерелом вторинної хвилі. Амплітуда

вторинної хвилі пропорційна амплітуді первинної хвилі $E(\vec{R})$, а також пропорційна площі ділянки $dS_{\vec{R}}$. Крім того, амплітуда залежить від величини

кута θ між хвильовим вектором \vec{k}_{nep} первинної хвилі та напрямком поширення

вторинної хвилі, який задається хвильовим вектором \vec{k}_{em} , причому $|\vec{k}_{nep}| = |\vec{k}_{em}|$.

Вплив цієї кутової залежності на амплітуду вторинних хвиль Френель характеризував коефіцієнтом $K_{Fr}(\theta)$, граничні значення для якого він прийняв рівними $K_{Fr}(\theta = 0) = 1$ та $K_{Fr}(\theta = \pi / 2) = 0$.

Якщо ввести цей коефіцієнт, можемо отримати, що вторинна хвиля з джерелом в точці \vec{R} призведе до збурення поля, величина якого в точці A описується виразом

$$dE(\vec{r}) = \frac{K_{Fr}(\theta)E(\vec{R})}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}_{em}\vec{r} + \varphi_0)} dS_{\vec{R}},$$

де φ_0 – початкова фаза, а r – відстань від точки \vec{R} до точки A .

Результуюче поле в точці A дорівнює сумі внесків від усіх вторинних джерел, а отже визначається інтегралом

$$E(\vec{r}) = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} dE_A = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} \frac{K_{Fr}(\theta) E(\vec{R})}{r} e^{i(\omega t - \vec{k}_{em} \vec{r} + \varphi_0)} dS_{\vec{R}},$$

де інтегрування здійснюється по тій частині $\Delta S_{\vec{R}}$ від хвильової поверхні $S_{\vec{R}}$, в межах якої кут θ лежить в інтервалі від 0 до $\pi/2$. Записаний інтеграл називають *інтегралом Гюйгенса-Френеля*.

Розглянемо тепер непрозоре плоске тіло з отвором, через який може поширюватися світло від точкового джерела S (див. рис. 73). Необхідно

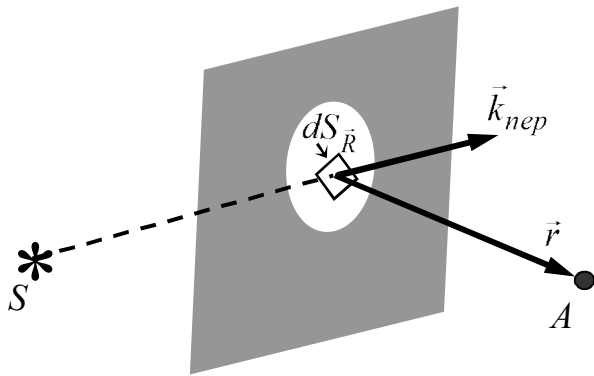


Рис. 73

визначити світловий вектор коливань $E(\vec{r})$ у довільній точці A , яка знаходиться по іншу сторону від отвору, ніж джерело S . При застосуванні для цього випадку принципу Гюйгенса-Френеля роблять припущення, щодо амплітуди коливань первинної світлової хвилі на отворі: вона вважається такою, начебто непрозоре тіло відсутнє, а

амплітуда коливань на решті поверхні непрозорого тіла приймається рівною нулю. Крім того, нехтується можливим впливом матеріалу екрану на результат розрахунку і принциповими залишаються лише форма отвору та його розміри. Вимірювання свідчать, що ці припущення добре виконуються, коли розміри отвору та відстані від джерела до непрозорої площини і від непрозорої площини до екрану є значно більшими за довжину хвилі. Таку дифракцію називають *дифракцією Френеля*. Зрозуміло, що при таких умовах відхилення від напрямку поширення світла внаслідок дифракції буде незначним, або таким, якби воно описувалося законами геометричної оптики.

Тим не менш, виявляється, що при розрахунку поля $E(\vec{r})$ світла, що пройшло через отвір довільної форми, не можна обмежуватися розглядом вторинних хвиль, джерела яких лежать тільки на хвильовій поверхні первинної хвилі в околі отвору. Ці джерела розташовані у площині отвору, і при складанні амплітуд в точці A слід враховувати не тільки оптичну різницю ходу цих вторинних хвиль, а й необхідно врахувати можливе набігання фази внаслідок того, що точки поверхні отвору знаходяться на різних відстанях від джерела S первинної хвилі.

Слід зробити ще одне важливе зауваження. Записуючи вираз для поля $\vec{E}(\vec{r})$, яке є результуючим при накладанні вторинних хвиль, ми не брали до уваги (не враховували) напрямки векторів напруженостей електричних полів як вторинних хвиль, так і первинної хвилі. Як буде показано далі, це припущення

для дифракції Френеля є виправданим, оскільки основний внесок в $\vec{E}(\vec{r})$ дає лише мала частина хвильової поверхні, яка відповідає малому значенню кута θ в інтегралі Гюйгенса-Френеля. Тому акуратне врахування напрямку векторів поля суттєво не вплине на результат розрахунку інтерференції вторинних хвиль. Крім того, принцип Гюйгенса-Френеля має узгоджуватися з принципом прямолінійного розповсюдження світлових променів в однорідному ізотропному середовищі.

5.4.3. Метод зон Френеля

Обчислення інтегралу Гюйгенса-Френеля, що визначає амплітуду світлового поля, утвореного при накладанні вторинних хвиль для отворів довільної форми, є досить складною математичною задачею. Проте в деяких простих випадках (наприклад, для круглого отвору або диску) дифракційну картину можна якісно проаналізувати і навіть отримати корисні чисельні співвідношення, якщо скористатися наближенням Френеля. Суть цього

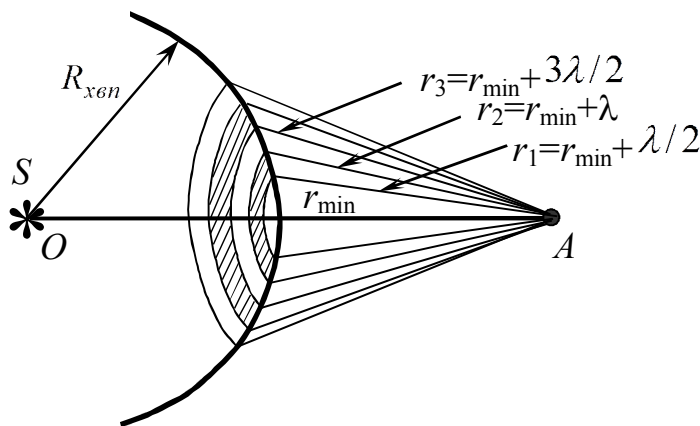


Рис. 74

наближення полягає у наступному. Візьмемо монохроматичне точкове джерело S світла, яке на рис. 74 знаходиться в точці O . Нас цікавить розрахунок інтегралу Гюйгенса-Френеля у точці A . Розглянемо хвильову поверхню сферичної первинної хвилі. На рис. 74 її радіус позначено $R_{xвп}$, де індекс

«*xвп*» скорочено позначає, що це радіус хвильової поверхні первинної хвилі. Відстань від найближчої точки хвильової поверхні до точки A позначимо r_{min} . З використанням цих позначень відстань від джерела до точки спостереження становитиме $R_{xвп} + r_{min}$.

Френель запропонував хвильову поверхню первинної хвилі розбити на зони. В кожній з таких зон відстань від її точок до точки A лежить в інтервалі, що зростає на величину $\lambda/2$ (див. рис. 74). На рис. 74 парні зони заштриховано. Точки першої зони Френеля віддалені від точки A на відстані, які знаходяться в інтервалі $[r_{min}, r_{min} + \lambda/2]$, точки другої зони Френеля віддалені від точки A на відстані в інтервалі $[r_{min} + \lambda/2, r_{min} + \lambda]$, точки третьої зони віддалені на відстані $[r_{min} + \lambda, r_{min} + 3\lambda/2]$, а точки m -ої зони лежать на відстанях $[$

$r_{\min} + (m - 1)\lambda / 2, r_{\min} + m\lambda / 2]$. В результаті, маємо, що відстані від внутрішнього та зовнішнього країв m -ої зони до точки A будуть складати $r_{m-1} = r_{\min} + (m - 1)\lambda / 2$ та $r_m = r_{\min} + m\lambda / 2$, відповідно. Очевидно, що лінії зон на хвильовій поверхні утворюють концентричні кільця.

Внесок усіх зон в амплітуду коливань світлового вектора у точці A буде визначатися інтегралом, який можна представити сумою інтегралів, розрахованих по кожній із зон окремо:

$$E(A) = \int_{\Delta S_{\vec{R}}} \frac{K_{Fr}(\theta)E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{a}}\vec{r}} dS_{\vec{R}} = \sum_m \int_{\Delta S_m} \frac{K_{Fr}(\theta)E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{a}}\vec{r}} dS_{\vec{R}},$$

де ΔS_m – ділянка поверхні m -ї зони, $\Delta S_{\vec{R}} = \sum_m \Delta S_m$, $E(\vec{R})$ – амплітуда поля в на хвильовій поверхні.

Можна наближено покласти, що в межах однієї зони коливання вторинних джерел відбуваються майже синфазно, а величину $K_{Fr}(\theta)$ можна прийняти постійною: $K_{Fr}(\theta) \approx K_{Fr}(\theta_m)$, де θ_m – кут між вектором \vec{k}_{nep} та r_m на межі зони, тому за теоремою про середнє запишемо:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S_m} \frac{K_{Fr}(\theta)E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{a}}\vec{r}} dS_{\vec{R}} &= K_{Fr}(\theta_m) \int_{\Delta S_m} \frac{E(\vec{R})}{r} e^{-i\vec{k}_{\vec{a}\vec{a}}\vec{r}} dS_{\vec{R}} = \\ &= K_{Fr}(\theta_m) f(r_m) \Delta S_m = (-1)^{m+1} E_m(A), \end{aligned}$$

де $f(r_m)$ – середнє значення підінтегрального виразу, $E_m(A) > 0$ – амплітуда коливань світлового вектора у точці A від m -ої зони. При записі цього виразу враховано також, що за побудовою коливання вторинних джерел сусідніх зон відбуваються протифазно, а амплітуду першої зони вибрано додатною.

У підсумку знаходимо, що амплітудне значення коливань представляє собою суму знакозмінного ряду

$$E(A) = \sum_m (-1)^{m-1} E_m(A).$$

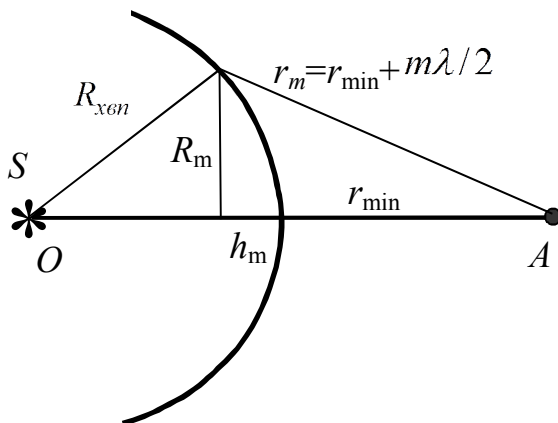


Рис. 75

Для його обчислення більш ретельно дослідимо геометричні особливості зон Френеля. Знайдемо радіуси кілець зон Френеля та їх площу.

З двох прямокутних трикутників наведених на рис. 75 маємо два рівняння

$$R_{xен}^2 = (R_{xен} - h_m)^2 + R_m^2,$$

$$(r_{\min} + m\lambda / 2)^2 = (r_{\min} + h_m)^2 + R_m^2,$$

де R_m – радіус m -го кільця, h_m –

найменша відстань від площини кільця до точки перетину фронту хвилі та відрізка OA , $R_{x\text{ен}}$ – радіус хвильової поверхні первинної хвилі. Врахуємо, що $\lambda \ll R_m, h_m$, крім того $R_m, h_m \ll R_{x\text{ен}}, r_{\text{мін}}$, та $R_m \gg h_m$. Тоді рівняння набудуть вигляду

$$2R_{x\text{ен}}h_m = R_m^2, \quad r_{\text{мін}}m\lambda = 2r_{\text{мін}}h_m + R_m^2.$$

З першого рівняння знаходимо, що

$$h_m = \frac{R_m^2}{2R_{x\text{ен}}}.$$

Після підстановки h_m у друге рівняння отримаємо рівняння для R_m :

$$r_{\text{мін}}m\lambda = r_{\text{мін}} \frac{R_m^2}{R_{x\text{ен}}} + R_m^2.$$

З нього визначимо величину R_m радіусу m -го кільця, яка визначає зовнішню межу для m -ої зони Френеля, як функцію радіусу $R_{x\text{ен}}$ хвильової поверхні первинної хвилі:

$$R_m = \sqrt{\frac{r_{\text{мін}}R_{x\text{ен}}}{r_{\text{мін}} + R_{x\text{ен}}} m\lambda}.$$

Для $R_{x\text{ен}} \approx 1$ м, $r_{\text{мін}} \approx 1$ м та $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м радіус, наприклад, кільця першої зони $m=1$ дорівнює: $R_1 = \sqrt{\frac{1}{1+1}} 5 \cdot 10^{-7} = \sqrt{25 \cdot 10^{-8}} = 5 \cdot 10^{-4}$ м, тобто складає тільки півміліметра.

Величина h_m визначається формулою

$$h_m = \frac{1}{2} \frac{r_{\text{мін}}}{R_{x\text{ен}} + r_{\text{мін}}} m\lambda.$$

Тепер знайдемо площу m -ої зони Френеля. Спочатку обчислимо площу S_m сферичного сегменту (див. рис. 76), утвореного кільцем з радіусом R_m . Ця

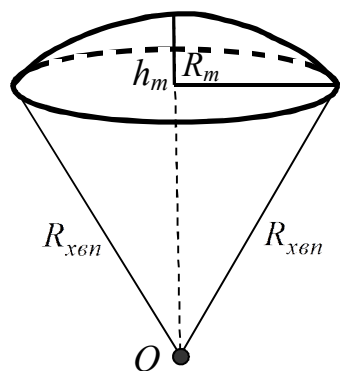


Рис. 76

площа визначається за формулою

$$S_m = 2\pi R_{x\text{ен}}h_m,$$

де $R_{x\text{ен}}$ – радіус сфери хвильової поверхні первинної хвилі. Підставимо у цю формулу значення h_m , що дає:

$$S_m = \frac{\pi R_{x\text{ен}}r_{\text{мін}}}{R_{x\text{ен}} + r_{\text{мін}}} m\lambda.$$

Площа m -ої зони Френеля ΔS_m дорівнює різниці площ сферичних сегментів, утворених сусідніми кільцями, радіуси яких R_m та R_{m-1}

$$\begin{aligned}\Delta S_m = S_m - S_{m-1} &= \frac{\pi R_{x\text{ен}} r_{\text{мін}}}{R_{x\text{ен}} + r_{\text{мін}}} m\lambda - \frac{\pi R_{x\text{ен}} r_{\text{мін}}}{R_{x\text{ен}} + r_{\text{мін}}} (m-1)\lambda = \\ &= \frac{\pi R_{x\text{ен}} r_{\text{мін}}}{R_{x\text{ен}} + r_{\text{мін}}} \lambda.\end{aligned}$$

Отже, площа зони Френеля не залежить від m , тобто є однаковою для кожного кільця.

Таким чином, приходимо до наступних висновків: площі зон Френеля однакові; відстань r_m зростає для зон з більшим номером; кут θ_m також зростає із збільшенням m . Звідси можна зробити ще один важливий висновок: амплітуда $E_m(A)$ – амплітуда коливань світлового вектора від m -ої зони у точці A монотонно зменшується при зростанні m . Тому можна записати нерівність

$$E_1(A) > E_2(A) > E_3(A) > \dots E_{m-1}(A) > E_m(A) > \dots$$

Оскільки коливання у сусідніх зонах протифазні, то амплітудне значення світлового вектора в точці A від усіх зон буде дорівнювати сумі знакозмінного ряду, який внаслідок попередньої умови для амплітуд сходиться:

$$E(A) = \sum_m (-1)^{m-1} E_m(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots$$

Знайдемо суму цього ряду. Для цього перепишемо його у вигляді

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[\frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] + \left[\frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots,$$

звідки з причини монотонного зменшення амплітуди можна покласти

$$E_m(A) \approx \frac{E_{m-1}(A) + E_{m+1}(A)}{2}.$$

Тому для записаної суми ряду вирази у дужках в середньому дорівнюватимуть нулю.

Таким чином, амплітуда хвилі у точці A визначається половиною амплітуди коливань лише першої зони Френеля

$$E(A) \approx \frac{E_1(A)}{2}.$$

Іншою мовою, отриманий результат демонструє, що амплітуда коливань первинної сферичної хвилі в точці A становить тільки половину амплітуди коливань в цій точці, утворених вторинними хвилями першої зони Френеля. Як було видно вище, поля усіх інших зон взаємокомпенсуються внаслідок саме явища інтерференції. Отже, усе відбувається так, начебто зі всього хвильового фронту діючою залишається лише певна частина першої зони Френеля, і до довільної точки A доходить світло тільки від неї. Оскільки для реальних параметрів діаметр першої зони не перевищує 1 мм, то можна стверджувати, що взаємна компенсація електричних полів вторинних хвиль від усіх зон

Френеля, крім першої, фактично обумовлює виконання закону прямолінійного поширення світла в однорідному ізотропному середовищі (проте за умови відсутності перешкод).

5.4.4. Дифракція Френеля від круглого отвору

За допомогою зон Френеля зручно пояснювати дифракцію хвиль у найбільш простих випадках симетричних перешкод (зокрема, для круглого отвору, коли джерело та точка спостереження лежать на осі отвору).

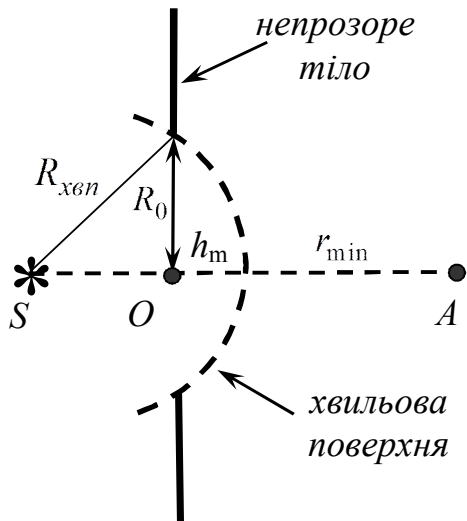


Рис. 77

На рис. 77 зображено такий круглий отвір у непрозорому плоскому тілі. Радіус отвору позначимо R_0 , а його центр точкою O . Точкове джерело світла S та точка спостереження A світлового поля знаходяться на осі кругового отвору, так що пряма SA проходить через точку O перпендикулярно до площини отвору.

Розглянемо умовну хвильову поверхню первинної хвилі, яку проведемо так, щоб вона дотикалася до країв отвору. Відстань

від точкового джерела S до точки O позначимо $R_{xвп} - h_m$, де $R_{xвп}$ – радіус хвильової поверхні первинної хвилі, а відстань від точки A до точки O позначимо $r_{\min} + h_m$ (див. рис. 77).

Розіб'ємо ту частину поверхні сфери, яка спирається на отвір, на зони Френеля. Припустимо, що фронтальні відстані $R_{xвп}$ та r_{\min} є такими, що радіус R_0 співпадає з радіусом R_m m -ої зони Френеля, тобто виконується рівність

$$R_0 = R_m, \quad \text{або} \quad R_0 = \sqrt{\frac{R_{xвп} r_{\min}}{R_{xвп} + r_{\min}}} m \lambda.$$

При визначенні R_0 можна вважати, що відстань r_{\min} наближено дорівнює довжині відрізка OA , бо $h_m \ll r_{\min}, R_{xвп}$. Крім того, $R_0 \ll R_{xвп}$, тому можна вважати, що $R_{xвп} \approx |SO|$.

З останньої рівності легко знаходимо значення m для кількості зон Френеля, на які розбито сферичний сегмент, утворений отвором:

$$m = \frac{(R_{xвп} + r_{\min}) R_0^2}{R_{xвп} r_{\min} \lambda}.$$

Таким чином, ми визначили кількість обмежених отвором зон Френеля, які визначають амплітуду коливань світлового поля в точці A .

Амплітуда світлового поля в цій точці буде дорівнює сумі ряду

$$E(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} E_j(A),$$

де $E_j(A)$ – амплітуда коливань світлового вектора в точці A від j -ої зони, причому $E_j > 0$.

Результат розрахунку знакозмінної суми залежить від значення числа m – є це число парним чи непарним. Для парного m сума ряду має вигляд

$$E(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots + E_{m-1}(A) - E_m(A).$$

Як і вище, перепишемо цю суму у спосіб:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[\frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] + \left[\frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots + \left[\frac{E_{m-3}(A)}{2} - E_{m-2}(A) + \frac{E_{m-1}(A)}{2} \right] + \frac{E_{m-1}(A)}{2} - E_m(A).$$

Оскільки вирази у прямих дужках знову близькі до нуля, то знаходимо, що для парного m амплітуда коливань світлового поля в точці A визначається виразом:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \frac{E_{m-1}(A)}{2} - E_m(A).$$

Врахуємо, що амплітуди коливань від сусідніх зон майже рівні між собою, тобто $E_{m-1} \approx E_m$. В результаті, амплітуда коливань світлового поля в точці A у випадку парного m визначається піврізницею амплітуд коливань від першої та останньої зон Френеля, або

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} - \frac{E_m(A)}{2}.$$

Таким чином, коли частина хвильової поверхні, обмеженої отвором, включає парну кількість зон Френеля, то у точці A , яка є центром дифракційної картини, буде спостерігатися мінімум інтенсивності світла – дифракційний мінімум.

Для непарного m сума ряду дещо змінюється, оскільки останній доданок додатний:

$$E(A) = E_1(A) - E_2(A) + E_3(A) - E_4(A) + \dots + E_{m-2}(A) - E_{m-1}(A) + E_m(A).$$

Перепишемо суму у той же спосіб:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \left[\frac{E_1(A)}{2} - E_2(A) + \frac{E_3(A)}{2} \right] +$$

$$+ \left[\frac{E_3(A)}{2} - E_4(A) + \frac{E_5(A)}{2} \right] + \dots + \left[\frac{E_{m-2}(A)}{2} - E_{m-1}(A) + \frac{E_m(A)}{2} \right] + \frac{E_m(A)}{2},$$

який остаточно дає:

$$E(A) = \frac{E_1(A)}{2} + \frac{E_m(A)}{2}.$$

Отже, на відміну від попереднього випадку отримуємо, що коли обмежена отвором хвильова сферична поверхня вміщує непарну кількість зон Френеля, то у точці A центру дифракційної картини спостерігатиметься максимум інтенсивності світла – дифракційний максимум.

У загальному ж випадку вираз для амплітуди коливань світлового поля можна записати у вигляді:

$$E(A) = \frac{1}{2} [E_1(A) + (-1)^{m-1} E_m(A)].$$

При зміні відстані від центру отвору до точки спостереження A буде змінюватися число m для кількості зон. Тому змінюватиметься і освітленість цієї точки. Отже, при віддаленні точки A від екрану фактично будуть відбуватися послідовні перетворення ярко освітлених областей (коли m непарне) у темні області (коли m парне), що добре узгоджується з даними експериментів.

Якщо точку A (точка спостереження на екрані) переміщувати паралельно до площини отвору, то також будуть спостерігатися послідовні зміни інтенсивності світла, які проте пов'язані не зі зміною кількості зон, а які обумовлені зміною умов інтерференції вторинних хвиль від зон Френеля (а точніше – різницею ходу вторинних хвиль до точки A). При симетричному розташуванні джерела, коли воно лежить на осі отвору, ці зміни інтенсивності не залежать від напрямку зміщення точки A . Тому в площині, що перпендикулярна до отвору, дифракційна картина буде мати вигляд сукупності темних та світлих кілець, аналогічних кільцям Ньютона. А якщо джерело змістити від осі отвору, то осьова симетрія темних та світлих дифракційних областей буде порушена і дифракційна картина стане несиметричною.

5.4.5. Дифракція Френеля від непрозорого диску

У попередньому пункті було показано, що при дифракції на круглому отворі формування світлового поля на екрані здійснюється за участі тільки декілька перших зон Френеля. Зовсім інша ситуація спостерігається при дифракції на непрозорому диску, коли декілька френелівських перших зон закриті ним, і світлове поле у точці спостереження, навпаки, визначається всіма іншими зонами Френеля, число яких нічим не обмежене.

На рис. 78 зображено круглий диск. Радіус диску по аналогії з отвором позначимо R_0 , а його центр точкою O . Точкове джерело світла S та точка спостереження A світлового поля знаходяться на осі диску, так що пряма SA проходить через точку O перпендикулярно до площини диску. Відстань від

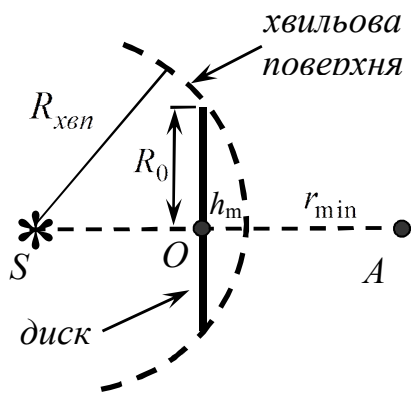


Рис. 78

точкового джерела S до точки O позначимо $R_{xen} - h_m$, а відстань від точки A до точки O позначимо $r_{min} + h_m$ (див. рис. 78).

Хвильовою поверхнею точкового джерела є сфера, що визначає фронт розповсюдженної хвилі. Розглянемо таку умоглядну хвильову поверхню первинної хвилі, яка дотикається до країв диску і радіус якої R_{xen} .

Розіб'ємо її на зони Френеля, припустимо, що відстані R_{xen} та r_{min} були такими, щоб радіус R_0 диску співпадав з радіусом R_m для m -ої зони Френеля, тобто виконувалась рівність:

$$R_0 = R_m, \quad \text{або} \quad R_0 = \sqrt{\frac{R_{xen} r_{min}}{R_{xen} + r_{min}}} m \lambda.$$

Аналогічно попередньому випадку отвору, при визначенні R_m було знехтувано величиною h_m , яка задовольняє умові $h_m \ll R_{xen}, r_{min}$. Оскільки $R_0 \ll R_{xen}$ та $R_0 \ll r_{min}$, тому в цій формулі наближено можна вважати $R_{xen} \approx |SO|$ і $r_{min} \approx |OA|$. З останньої рівності випливає значення m кількості зон, які будуть закриті диском і не даватимуть внеску в амплітуду коливань світлового вектора у точці A :

$$m = \frac{(R_{xen} + r_{min}) R_0^2}{R_{xen} r_{min} \lambda}.$$

Як і для отвору, амплітуда світлового поля в точці A буде визначатися сумою ряду

$$E(A) = \sum_{m+1}^{\infty} (-1)^{j-m-1} E_j(A),$$

де $E_j(A)$ – амплітуда коливань світлового вектора у точці A від j -ої френелевої зони і $E_j(A) > 0$. Внесок до амплітуди коливань від $m+1$ -ої зони прийнятий додатним, оскільки результуюча амплітуда має бути додатною $E(A) > 0$.

Записана сума має для випадку непрозорого диску вигляд:

$$E(A) = E_{m+1}(A) - E_{m+2}(A) + E_{m+3}(A) - E_{m+4}(A) + \dots$$

Перепишемо її інакше:

$$E(A) = \frac{E_{m+1}(A)}{2} + \left[\frac{E_{m+1}(A)}{2} - E_{m+2}(A) + \frac{E_{m+3}(A)}{2} \right] + \\ + \left[\frac{E_{m+3}(A)}{2} - E_{m+4}(A) + \frac{E_{m+5}(A)}{2} \right] + \dots$$

Як вже говорилося, вирази у прямих дужках прямують до нуля. В результаті, отримуємо, що амплітуда коливань світлового поля у точці A дорівнює половині амплітуди коливань $m+1$ -ої зони Френеля

$$E(A) = \frac{E_{m+1}(A)}{2}$$

незалежно від парності чи непарності її номеру.

Таким чином, за круглим непрозорим диском амплітуда коливань світлового поля завжди відмінна від нуля. Коли диск закриває лише декілька перших зон Френеля, інтенсивність світла у точці A буде порівняною з інтенсивністю світла, коли б диску не було. Це достатньо неочікуваний результат, бо з точки зору уявлень геометричної оптики точка A знаходиться в області тіні, і строго кажучи інтенсивність світла в її околі мала б бути відсутньою. Таку освітлену область за круглим диском називають *плямою Пуассона*. Можливість послідовного пояснення природи утворення подібної світлової плями є переконливим доказом справедливості припущення Френеля про існування дифракційних зон і характер їх випромінювання.

5.4.6. Дифракція Фраунгофера від щілини

Інший цікавий випадок формування дифракційної картини – це так звана *дифракція Фраунгофера*, або дифракція, що спостерігається для паралельних променів світла. Для її спостереження треба мати джерело, від якого поширюються паралельні промені світла. Такий пучок паралельних променів і направляють на перешкоду. Після огинання променями перешкоди результат її впливу на поширення світла розглядається на нескінченності, коли промені, що продифрагували, вже можна розглядати як паралельні. Іншими словами, при дифракції Фраунгофера промені світла, яке падає на перешкоду, і світла, що дифрагує, розглядаються як плоскі хвилі.

У випадку дифракції Френеля сферичних хвиль від точкового джерела на отворі можна застосовувати метод зон, радіус яких визначається за формулою

$$R_m = \sqrt{\frac{r_{\min} R_{x\delta n}}{r_{\min} + R_{x\delta n}} m \lambda},$$

де λ – довжина хвилі, $R_{x_{\text{ген}}}$ – радіус хвильової поверхні первинної хвилі, який суміщають з площиною отвору, r_{min} – відстань від отвору до екрану (площини спостереження дифракційної картини). При дифракції Френеля радіус зон співставляють з розміром перешкоди (в даному випадку – радіусом отвору).

Коли $r_{\text{min}} \rightarrow \infty$, то ця формула набуває вигляду

$$R_m = \sqrt{m R_{x_{\text{ген}}} \lambda}.$$

Якщо тепер віддаляти джерело світла від перешкоди (тобто вважити, що має місце границя $R_{x_{\text{ген}}} \rightarrow \infty$), то можлива ситуація, коли радіус першої зони Френеля виявиться більшим радіусу отвору. Для таких великих відстаней вже не можна розбивати хвильовий фронт поблизу перешкоди на зони Френеля, а опис явища дифракції треба здійснювати із застосуванням більш строгої теорії.

З фізичних міркувань зрозуміло, що коли $R_{x_{\text{ген}}} \rightarrow \infty$ та $r_{\text{min}} \rightarrow \infty$, то і падаючу і вторинні хвилі можна вважати плоскими.

Здійснимо опис найпростішого випадку дифракції Фраунгофера на однорідній вузькій прямолінійній щілині. Ширину щілини позначимо h , а амплітуду світлового вектора падаючої плоскої хвилі – E_{max} . На рис. 79 зображено хід променів дифракції Фраунгофера на щілині. Промені падаючої монохроматичної хвилі позначено суцільними стрілками, а промені вторинних хвиль – пунктиром.

Після проходження збиральної лінзи паралельні промені вторинних хвиль зберуться у точці f побічного фокусу, яка лежить у фокальній площині лінзи. У цій площині розміщено екран. Припускається, що площини щілини, лінзи та

екрану паралельні між собою, а центр лінзи розташований напроти середини щілини, так що її головному фокусу на екрані відповідає точка F .

Вторинні плоскі хвилі когерентні і при їх накладанні на екрані буде утворюватися дифракційна картина. Результат накладання хвиль залежить від оптичної різниці ходу. Зауважимо, що лінза не змінює оптичної різниці ходу хвиль.

Проведемо перпендикулярно до осі щілини і в її площині координатну вісь X з нулем в точці O , що знаходиться

посередині щілини. Візьмемо на цій осі в точці з координатою x маленьку ділянку щілини шириною dx , якій відповідає вузька смужка щілини.

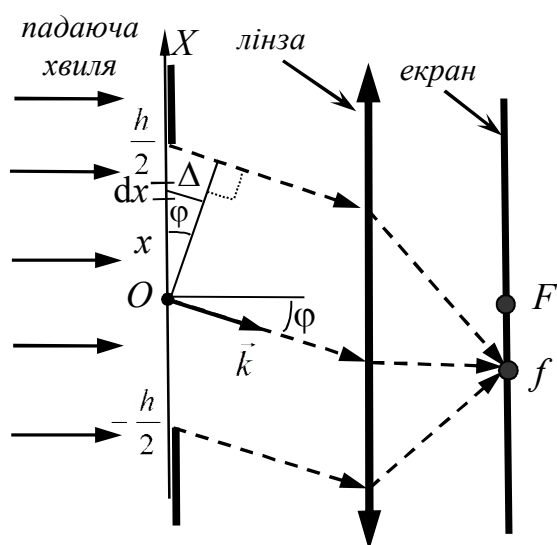


Рис. 79

Як видно з рис. 79, по відношенню до вторинної хвилі, що йде з точки O , оптична різниця ходу для вторинних хвиль цієї смужки складає

$$\Delta = x \sin \varphi,$$

де φ – кут між хвильовим вектором \vec{k} вторинної хвилі та перпендикуляром до площини щілини.

Врахуємо цю різницю ходу в часовій залежності світлового вектора $dE(f)$ вторинної хвилі від цієї смужки, який формується в точці f :

$$dE(f) = E_{\max}^{(sm)} \cos(\omega t - k\Delta),$$

де $E_{\max}^{(sm)}$ – амплітуда вторинної хвилі, ω – її частота, k – хвильове число: $k = |\vec{k}|$ (початкова фаза для спрощення прийнята рівною нулю).

За означенням хвильове число обернено пропорційне до довжини хвилі $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Амплітуда $E_{\max}^{(sm)}$ вторинної хвилі прямо пропорційна амплітуді E_{\max} первинної хвилі, прямо пропорційна ширині dx смужки та обернено пропорційна ширині h щілини, тобто $E_{\max}^{(sm)} = \frac{E_{\max} dx}{h}$. Отже, у точці f часова залежність коливань світлового вектора від виділеної тонкої смужки, має вигляд

$$dE(f) = \frac{E_{\max}}{h} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x\right) dx.$$

Результуюче значення світлового вектора в довільній точці f від всієї щілини знайдемо шляхом інтегрування по ширині щілини, а саме:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{-h/2}^{h/2} dE(f) = \frac{E_{\max}}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x\right) dx = \\ &= \frac{E_{\max}}{h} \left(-\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi \sin \varphi}{\lambda} x\right) \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= \frac{E_{\max}}{h} \left(-\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi}\right) \left[\sin\left(\omega t - \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda}\right)\right]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що для різниці синусів має місце формула:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Використаємо її, щоб отримати остаточний вираз:

$$E(f) = \frac{E_{\max}}{h} \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda} \cos \omega t.$$

Вираз, який стоїть перед останнім косинусом, фактично дає результуючу амплітуду коливань світлового поля вторинних хвиль у точках екрану. Ці хвилі поширюються під кутом φ і мають амплітуду

$$E_{\max}(f) = E_{\max}^{(\varphi)} = E_{\max} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi} \right|.$$

Коли $\varphi=0$, чисельник і знаменник в цьому виразі для $E_{\max}^{(\varphi)}$ прямують до нуля. Але з умови, що границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, отримуємо, що $E_{\max}^{(0)} = E_{\max}$.

Якщо ж $\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi = \pm \pi m$, де $m = 1, 2, 3, \dots$, то чисельник у виразі для цієї амплітуди дорівнює нулеві, і для таких кутів дифракції на екрані буде формуватися дифракційний мінімум. Отже, кути φ_m , для яких при дифракції Фраунгофера від щілини на екрані будуть спостерігаються мінімуми амплітуди світлового поля, визначаються з формули

$$h \sin \varphi_m = \pm m \lambda.$$

Коли виконується рівність $\lambda = h$, то можливим буде тільки значення $m = 1$, якому відповідає $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$. Якщо ширина щілини менша за довжину хвилі, то знайдені вище мінімуми для амплітуди формуватися не зможуть і дифракційна картина буде відсутня. Іншими словами, за умови $\lambda \sim h$ дифракційне розходження падаючого пучка світла становитиме $\pm \frac{\pi}{2}$.

Врахуємо, що інтенсивність первинної плоскої хвилі пропорційна $I_0 \sim E_{\max}^2$, а інтенсивність світла на екрані $I \sim E_{\max}^2(f)$. Звідси знаходимо, що

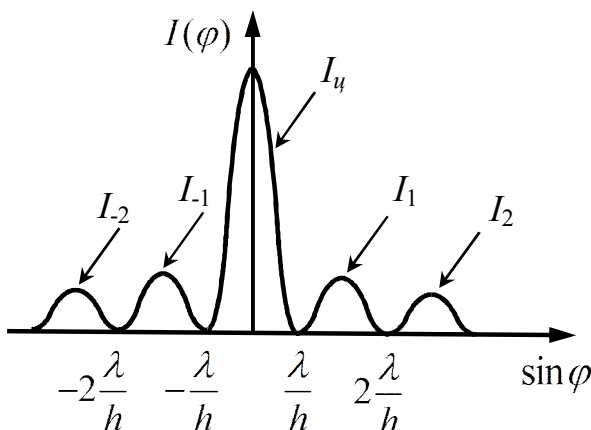


Рис. 80

залежність інтенсивності світла від кута φ при дифракції Фраунгофера на щілині описується виразом

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} h \sin \varphi} \right)^2.$$

З цієї формули видно, що мінімуми інтенсивності дійсно відповідають кутам φ_m .

На рис. 80 наведено графік

залежності інтенсивності $I(\varphi)$ від $\sin \varphi$, з якого випливає, що в основному енергія хвилі припадає на головний (центральный) максимум. Значення кутів, що обмежують цей максимум, визначаються з виразу, що задає мінімальну різницю $h \sin \varphi_u = \pm \lambda$. Це дозволяє знайти, що кутова ширина $\delta\varphi$ центрального максимуму становить

$$\delta\varphi \approx 2 \arcsin \frac{\lambda}{h}.$$

Якщо виконується $\lambda \ll h$, то кутова ширина першого центрального максимуму становить $\delta\varphi = 2\lambda/h$.

З рис. 80 маємо, що інтенсивності амплітуд зменшуються по мірі збільшення номера дифракційного максимуму. Відношення амплітуди центрального максимуму до амплітуди сусіднього, відношення інтенсивності другого максимуму до інтенсивності третього і т.д., утворюють послідовність

$$I_u : I_{\pm 1} : I_{\pm 2} \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : \dots$$

Наведені значення для відношень інтенсивностей сусідніх дифракційних максимумів є універсальними, оскільки не залежать ні від ширини щілини, ні від довжини хвилі, ні від інтенсивності первинної хвилі.

5.4.7. Дифракційні ґрати

Дифракційні ґрати – це оптичний пристрій з великою кількістю дуже вузьких однакових щілин, розділених однаковими непрозорими проміжками (рис. 81). Ширину кожної з прозорих щілин позначимо h , а ширину непрозорого проміжку позначимо ℓ . Суму цих відстаней $d = h + \ell$ називають *періодом дифракційних ґрат*, або *сталю дифракційних ґрат*. Для дифракційних ґрат завширшки L , які містять N щілин, період ґрат можна розрахувати з відношення

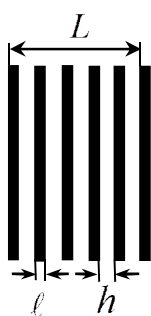


Рис. 81

$$d = \frac{L}{N}.$$

Направимо перпендикулярно до поверхні ґрат плоску монохроматичну хвилю. Після проходження світлом однієї щілини, вектор світлового поля в площині екрану, паралельного щілині, здійснює коливання, які описуються формулою

$$E = \frac{E_{\max}}{h} \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \frac{\pi h \sin \varphi}{\lambda} \cos \omega t, \quad \text{або} \quad E = E_{\max}^{(\varphi)} \cos \omega t,$$

де λ – довжина хвилі, ω – її частота, E_{\max} – амплітуда первинної хвилі, $E_{\max}^{(\varphi)}$ – амплітуда хвилі після проходження нею щілини, φ – кут напрямку поширення хвилі після проходження ґрат.

Тепер треба розрахувати поле після накладання хвиль від різних щілин. Хвилі, що проходять через сусідні щілини (рис. 82), відрізняються різницею ходу

$$\Delta = d \sin \varphi,$$

яка обумовлює різницю у величинах фаз коливань полів цих хвиль. Величина різниці фаз може бути отримана з очевидного співвідношення, а саме:

$$\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi,$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

В результаті, в площині екрану коливання величин векторів світлового поля хвиль від кожної (від 1-ої до N -ої)

щілини ґратки можна записати у вигляді:

$$E_1 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos \omega t$$

$$E_2 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos(\omega t + \delta),$$

$$E_3 = E_{\max}^{(\varphi)} \cos(\omega t + 2\delta),$$

.....,

$$E_N = E_{\max}^{(\varphi)} \cos[\omega t + (N - 1)\delta].$$

Як бачимо, фази коливань вектора світлового поля утворюють арифметичну прогресію.

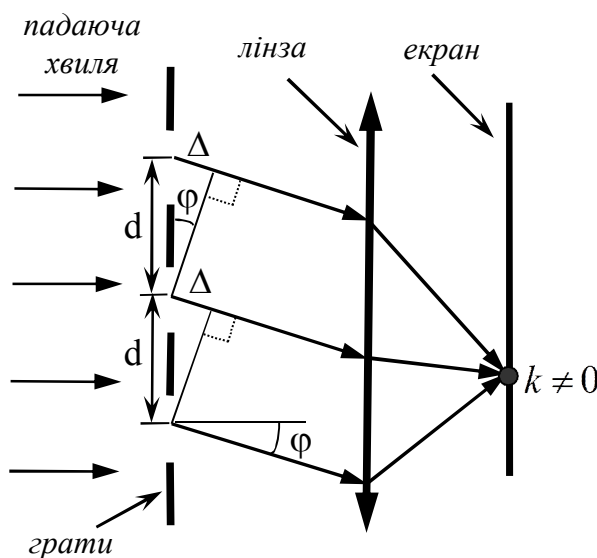


Рис. 82

Результуюче світлове поле визначається шляхом складання коливань

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N =$$

$$= E_{\max}^{(\varphi)} [\cos \omega t + \cos(\omega t + \delta) + \cos(\omega t + 2\delta) + \dots + \cos(\omega t + (N - 1)\delta)].$$

Знаходження амплітуди результуючого коливання при накладанні декількох коливань, фаза яких відрізняється на однакове число, утворюючи арифметичну прогресію, було здійснене у пункті 2.5. Застосуємо формулу для амплітуди результуючого коливання, яку там наведено. Це дає, що після проходження хвилею ґрат амплітудне значення вектора світлового поля визначається за формулою

$$E_{\max}(\varphi) = E_{\max}^{(\varphi)} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Підставимо в цей вираз величину δ та величину $E_{\max}^{(\varphi)}$. В результаті, приходимо до формули:

$$E_{\max}(\varphi) = E_{\max} \frac{\sin\left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi \sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)}.$$

Врахуємо, що інтенсивність падаючої на ґрати плоскої світлової хвилі пропорційна $I_0 \sim E_{\max}^2$, а інтенсивність світла на екрані $I(\varphi) \sim E_{\max}^2(\varphi)$. Звідси прямо знаходимо, що внаслідок дифракції інтенсивність світла у площині екрану в залежності від кута φ описується виразом

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi h}{\lambda} \sin \varphi} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi Nd}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)} \right)^2.$$

У другому дробу цього виразу чисельник та знаменник стають рівними нулю для кутів, що задовольняють умові $\pi(d/\lambda) \sin \varphi_m = \pm m\pi$, де $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Отже, для кутів φ_m , які визначаються виразом

$$d \sin \varphi_m = \pm m\lambda$$

на екрані мають спостерігатися дифракційні максимуми. Цю формулу називають *формулою дифракційних ґрат*, а відповідно максимуми – *головними максимумами*.

Оскільки границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$, то для кута $\varphi = 0$ другий дріб дорівнює

N^2 . Звідси для $\varphi = 0$ інтенсивність світла набуває значення $I(\varphi = 0) = I_0 N^2$, тобто інтенсивність центрального максимуму дифракційних ґрат значно збільшується.

Для інших кутів, а саме: $\pi N(d/\lambda) \sin \varphi_p = \pm p\pi$, де $p = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots$ (крім точок $N, 2N, \dots$) чисельник другого дробу дорівнює нулю. Для цих кутів на екрані будуть спостерігатися мінімуми інтенсивності, які лежать між головними максимумами. Кутове положення цих мінімумів визначається з умови:

$$d \sin \varphi_p = \pm \frac{p}{N} \lambda.$$

Між ними розташовуються максимуми, але з слабкою інтенсивністю світла.

Таким чином, дифракційна картина від ґрат представляє собою сукупність дуже інтенсивних головних максимумів, між якими знаходяться

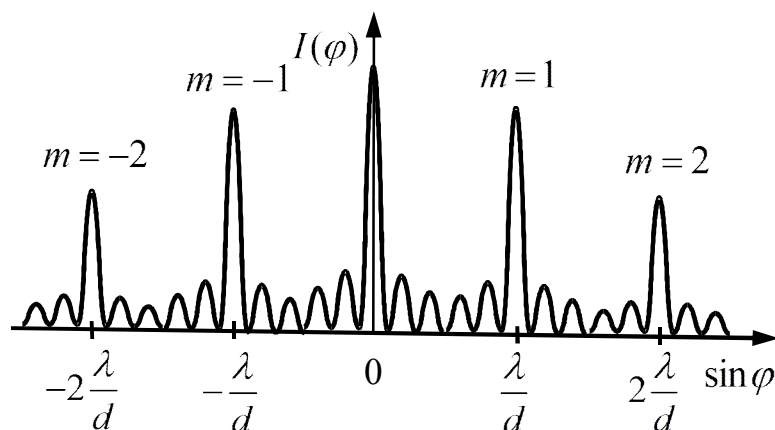


Рис. 83

велика кількість інших максимумів відносно малої інтенсивності (див. рис. 83).

Перший дріб у формулі для інтенсивності дає також мінімуми. Тому треба мати на увазі, що інколи можливе співпадіння кутового положення одного з головних максимумів з кутовим положенням

мінімуму, обумовленим першим дробом (він відповідає кутовому положенню мінімуму для однієї щілини). Такі кути задаються рівністю

$$h \sin \varphi_j = \pm j \lambda,$$

де $j = 1, 2, 3, \dots$

І коли має місце співпадіння $\varphi_j = \varphi_m$, то головний максимум з номером m буде подавлений деяким мінімумом від щілини і на дифракційній картині спостерігатися не буде. Легко переконатися, що умову такого гасіння головного максимуму можна записати у інший спосіб:

$$\frac{d}{h} = \frac{m}{j}.$$

5.4.8. Дифракційні ґрати як оптичний прилад

З формули для кутової залежності інтенсивності для дифракції на ґратах випливає, що положення головних максимумів залежать не тільки від параметрів типу h або d , але й від довжини хвилі. Чим більшою є довжина хвилі, тим більшими виявляються величини кутів φ_m . Це в свою чергу, свідчить, що коли на дифракційні ґрати направити немонохроматичне світло, то вони будуть його розкладати, утворюючи кольоровий спектр, причому найбільше буде відхилятися червона складова світла. Тим самим, дифракційні ґрати можуть служити оптичним приладом, який дозволяє аналізувати світлові пакети та отримувати спектр хвиль, що їх утворюють.

Характеристиками дифракційних ґрат є кутова дисперсія, роздільна здатність та область дисперсії.

Кутова дисперсія визначає кутове відхилення падаючих на ґрати хвиль в залежності від їх довжини. Позначають кутову дисперсію буквою D і розраховують за формулою

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda},$$

де $d\varphi$ – кутовий зсув положення головного максимуму при зміні довжини хвилі на $d\lambda$.

Продиференціюємо формулу дифракційних ґрат. Прийдемо до зв'язку між $d\varphi$ та $d\lambda$, який має вигляд

$$d \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = m \cdot d\lambda.$$

Це дає вираз для кутової дисперсії у вигляді

$$D = \frac{m}{d \cdot \cos \varphi}.$$

З нього випливає, що величина D росте як при збільшенні порядку головного максимуму, так і при зростанні кутів головних максимумів.

Роздільна здатність тих чи інших дифракційних ґрат визначається як найменша різниця довжин хвиль, які може розділити прилад. Величина роздільної здатності розраховується за формулою

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

де $\delta\lambda$ – найменша різниця довжин хвилі, які можуть бути розділені (розрізнені) за допомогою ґрат (тобто ґрати «бачать» ці хвилі як різні за довжинами).

Хвилі однакової інтенсивності з довжинами λ та $\lambda - \delta\lambda$ можна розрізнити, коли, щонайменше, головний максимум хвилі з довжиною λ співпадає з першим мінімумом для хвилі з довжиною хвилі $\lambda - \delta\lambda$. Цій умові відповідають рівняння:

$$d \sin \varphi = m\lambda,$$

$$d \sin \varphi = \left(m + \frac{1}{N}\right)(\lambda - \delta\lambda).$$

Віднявши від другого рівняння перше та знехтувавши величинами другого порядку малості, отримуємо:

$$\frac{\lambda}{N} - m \cdot \delta\lambda = 0,$$

де прийнято, що $N \gg 1$, а $\delta\lambda \ll \lambda$.

В результаті, знаходимо, що формула для роздільної здатності ґрат набуває вигляду

$$R = mN.$$

Таким чином, роздільна здатність ґрат зростає, тобто чутливість їх покращується, при збільшенні номеру головного максимуму (за рахунок росту m) та при збільшенні кількості щілин в ґратах.

Зрозуміло, що перекриття спектрів сусідніх максимумів є негативним явищем, яке обмежує використання ґрат, бо при такому перекритті чутливість знижується і ґрати стають недієздатними. Діапазон довжин хвиль $\Delta\lambda$, для яких спектри сусідніх головних максимумів не перекриваються, називається *дисперсійною областю*.

Для знаходження величини дисперсійної області порівняємо кути положення двох сусідніх головних максимумів для хвиль з довжинами λ та $\lambda - \Delta\lambda$

$$\begin{aligned}d \sin \varphi &= m\lambda, \\d \sin \varphi &= (m+1)(\lambda - \Delta\lambda).\end{aligned}$$

Аналогічно попередньому випадку знайдемо різницю цих рівнянь, що дає:

$$\lambda - (m+1)\Delta\lambda = 0.$$

Звідси легко заключити, що дисперсійна область обмежена інтервалом довжин хвиль

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m+1}.$$

Видно, що дисперсійна область пропорційна довжині хвилі, але її величина на відміну від роздільної здатності зменшується при збільшенні номера головного максимуму та не залежить від числа щілин у ґратці.