1.9. Показникова форма опису власних коливань

Розглянемо дещо інший аналітичний підхід для аналізу і опису коливального руху, для чого використаємо вже відоме нам диференційне рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді показникової функції

$$x(t) = Ce^{\lambda t},$$

де C – довільна константа, а λ – параметр. Обрана пробна функція буде розв'язком, якщо задовольняє диференціальному рівнянню. Знайдемо її похідну другого порядку: $\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$.

Підставимо пробну функцію та її другу похідну в диференціальне рівняння, що дає:

$$Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega_0^2) = 0.$$

Видно, що вибрана нами пробна функція задовольнить диференційному рівнянню тільки у випадку, коли виконується рівність $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, з якої прямо випливає, що $\lambda = \sqrt{-\omega_0^2}$. У загальному випадку корінь з від'ємного числа є комплексним числом. Дійсно, вираз під коренем можна представити у вигляді добутку: $\lambda = \sqrt{-1 \cdot \omega_0^2} = \sqrt{\omega_0^2}\sqrt{-1}$. Перший корінь дає два значення $\sqrt{\omega_0^2} = \pm\omega_0$, а другий – дорівнює *уявній* одиниці, або $\sqrt{-1} = i$. В результаті для параметра λ маємо два значення:

$$\lambda_+ = i\omega_0, \qquad \lambda_- = -i\omega_0.$$

Відповідно, розв'язком диференційного рівняння будуть дві експоненціальні функції.

Оскільки диференційне рівняння лінійне, то його розв'язком має бути довільна лінійна комбінація цих двох експонент:

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t} = C_+ e^{i\omega_0 t} + C_- e^{-i\omega_0 t}.$$

В цьому виразі C_+ та C_- довільні константи, які також можуть бути комплексними числами, але такими, щоб зміщення $x(t)$ було дійсним. Нехай, наприклад, $C_+ = \frac{A}{2}e^{i\varphi_0}$, а $C_- = \frac{A}{2}e^{-i\varphi_0}$; тоді знаходимо:

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{i\varphi_0}e^{i\omega_0 t} + \frac{A}{2}e^{-i\varphi_0}e^{-i\omega_0 t} = \frac{A}{2}\left(e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}\right) =$$

$$=\frac{A}{2}\left[\cos(\omega_0 t+\varphi_0)+i\sin(\omega_0 t+\varphi_0)+\cos(\omega_0 t+\varphi_0)-i\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right]=$$

$$=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\,.$$

Таким чином, приходимо до висновку, що для опису гармонічних коливань можна і дуже зручно використовувати показникову форму представлення функції зміщення. Водночас, часто обмежуються найпростішою формою такого представлення, коли спостережувані зміщення записують лише через дійсну частину показникової функції:

$$x(t)=\mathrm{Re}\,Ce^{i\omega_0 t}\,,$$

де символом Re позначено процедуру знаходження реальної частини від комплексної функції.

1.10. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань

Розглянемо тіло, маса якого m і яке висить на вертикальній пружині з жорсткістю k (див. рис. 8). Знайдемо точку його рівноваги. Для цього введемо систему відліку, початок якої точка O відповідає положенню нижнього кінця недеформованої пружини. Внаслідок деформації пружини, коли до неї прикріпляють тіло, коливальна система придбає потенціальну енергію U, яка складається з двох доданків: енергії деформованої пружини та потенціальної енергії пов'язаної зі зміною висоти, на якій знаходиться тіло, а саме:

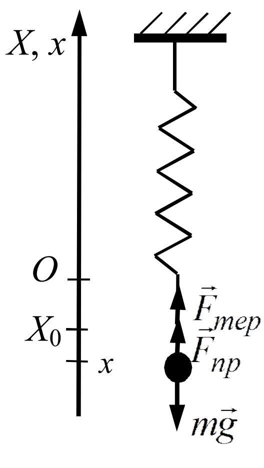

Рис. 8

$$U=U(X)=\frac{1}{2}kX^2+mgX$$

Положення рівноваги відповідає мінімуму потенціальної енергії, що визначається умовою $\dfrac{dU(X)}{dX}=0$.

Прирівнюючи нулеві похідну записаної вище потенціальної енергії по координаті, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$kX+mg=0,$$

яке визначає рівноважне положення пружинного маятника:

$$X_0=-\frac{mg}{k}\,.$$

Перейдемо до власної системи відліку, початок якої співпадає з положенням рівноваги і координатами в якій є зміщення, тобто $x=X-X_0$. Підставимо значення $X=x+X_0$ у вираз для потенціальної енергії:

$$U=\frac{1}{2}k(x+X_0)^2+mg(x+X_0)=\frac{1}{2}kx^2+(kX_0+mg)x+\frac{1}{2}kX_0^2+mgX_0.$$

Використаємо тепер значення X_0, що дає:

$$U=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kX_0^2+mgX_0.$$

Отже, потенціальна енергія коливальної системи залежить від зміщення за квадратичним законом. Два постійних доданки визначають величину потенціальної енергії для положення рівноваги, коли нульовим рівнем прийняте початкове положення нижнього кінця недеформованої пружини, $X_0=0$.

З отриманого виразу для потенціальної енергії, визначеної як функція зміщення відносно положення рівноваги, маємо, що незважаючи на дію сили тяжіння, коливальний рух спричиняє тільки дія пружної сили, проекція якої має звичайний вигляд

$$F_{пр}^x=-\frac{dU}{dx}=-kx.$$

Врахуємо дію сили тертя $\vec{F}_{тер}$. Будемо вважати, що на тіло діє сила в'язкого тертя, яка у відповідності до закону Стокса пропорційна швидкості тіла і направлена протилежно до швидкості

$$\vec{F}_{тер}=-\eta\vec{v},$$

де η – константа. Проекція сили тертя на координатну вісь

$$F_{тер}^x=-\eta v_x.$$

Оскільки швидкість є похідною координати, або $v_x=\frac{dx}{dt}$, то

$$F_{тер}^x=-\eta\frac{dx}{dt}.$$

Тепер, скориставшись другим законом Ньютона, запишемо рівняння

$$ma_x=F_{пр}^x+F_{тер}^x,$$

де $a_x=\frac{d^2x}{dt^2}$ – x-ва проекція прискорення.

Додаючи вище записані вирази для усіх сил, отримаємо рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

Поділимо його на m та введемо нові позначення. В результаті, приходимо до диференційного рівняння:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0,$$

Де стала $\beta \equiv \dfrac{\eta}{2m}$, а $\omega_0^2 \equiv \dfrac{k}{m}$ – як і вище, власна частота.

Отримане рівняння називають *диференційним рівнянням вільних згасаючих коливань*. Воно є лінійним однорідним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами.

1.11. Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

Знайдемо розв'язок отриманого у попередньому розділі диференційного рівняння вільних згасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Використаємо для цього метод Ейлера, тобто оберемо пробну шукану функцію $x(t)$ у вигляді показникової функції:

$$x(t) = Ce^{\lambda t},$$

де C – довільна константа, а λ – знову параметр, який треба визначити. Знайдемо першу та другу похідні: $\dfrac{dx}{dt} = \lambda Ce^{\lambda t}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 Ce^{\lambda t}$. Підставимо запропоновану пробну функцію та її похідні у вихідне диференціальне рівняння, завдяки якому отримуємо, так зване *характеристичне* рівняння:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Воно алгебраїчне і має два розв'язки: $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань може бути представлений у вигляді:

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}.$$

Коли тертя мале, тобто $\beta << \omega_0$, то вираз під квадратним коренем виявляється від'ємним, а тому $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{-1\cdot(\omega_0^2 - \beta^2)} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, де знову враховано, що $i = \sqrt{-1}$. В результаті, розв'язок рівняння набуває вигляду:

$$x(t) = C_+ e^{(-\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t} + C_- e^{(-\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2})t}.$$

Слід також врахувати, що просторове зміщення є дійсною функцією часу. Тому, якщо вибрати $C_+ = \dfrac{A}{2}e^{i\varphi_0}$, $C_- = \dfrac{A}{2}e^{-i\varphi_0}$, то знаходимо:

$$x(t) = \frac{A}{2}e^{-\beta t}\left(e^{i(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_o)} + e^{-i(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_o)}\right) =$$

$$=\frac{A}{2}e^{-\beta t}[\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_o)+i\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_o)+$$

$$+\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi_o)-i\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\varphi_o)].$$

У підсумку отримаємо, що зміщення описується залежністю

$$x(t)=Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_o).$$

Наведена функція є розв'язком диференційного рівняння вільних згасаючих коливань і описує часову залежність для зміщення при вільних згасаючих коливаннях.

Вираз, який стоїть перед косинусом, називають *амплітудою згасаючих коливань*. Вона, як видно, зменшується з часом за експоненційним законом, а саме:

$$A(t)=Ae^{-\beta t}.$$

Під час згасаючого коливального процесу фазову періодичність часової залежності зміщення у виразі для $x(t)$ забезпечує гармонічна функція, якою є косинус. Циклічна частота вільних згасаючих коливань визначається співвідношенням

$$\tilde{\omega}_0=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}.$$

Вона, що дуже важливо, є залежною від тертя, яке її завжди зменшує.

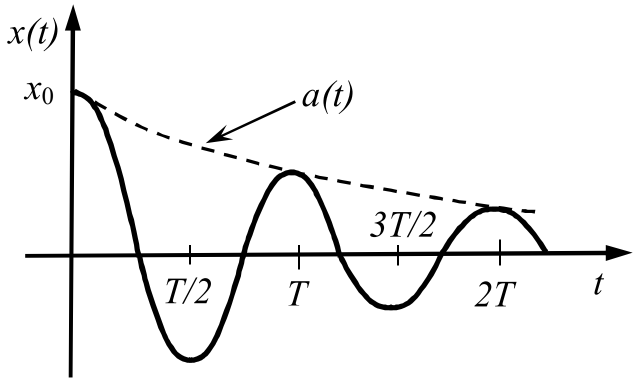

Рис. 9

Відповідно можна ввести і поняття періоду вільних згасаючих коливань, який визначають за стандартною формулою

$$\tilde{T}=\frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}>\frac{2\pi}{\omega_0},$$

який тим самим у присутності тертя дещо збільшується.

На рис. 9 суцільною кривою зображено часову залежність величини зміщення при згасаючих коливаннях. На цьому рисунку пунктиром показана залежність від часу амплітуди коливань. Зауважимо, що графік функції $A(t)$ трішечки зсунутий вправо і не співпадає з максимумами залежності $x(t)$.

Розглянемо, як змінюється повна механічна енергія коливальної системи з тертям. Для цього помножимо диференційне рівняння $m\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+kx=0$ на швидкість:

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\eta(\frac{dx}{dt})^2+kx\frac{dx}{dt}=0\,.$$

В цьому рівнянні перший доданок є часовою похідною кінетичної енергії –

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt})^2=\frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt}=\frac{dE_{кін}}{dt},$$

а третій – часовою похідною потенціальної енергії

$$kx\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dt}=\frac{d(\frac{1}{2}kx^2)}{dt}=\frac{dU}{dt}\,.$$

Отже, можна записати

$$\frac{dE_{кін}}{dt}+\frac{dU}{dt}=-\eta v^2\,,$$

або

$$\frac{d(E_{кін}+U)}{dt}=-\eta v^2\,.$$

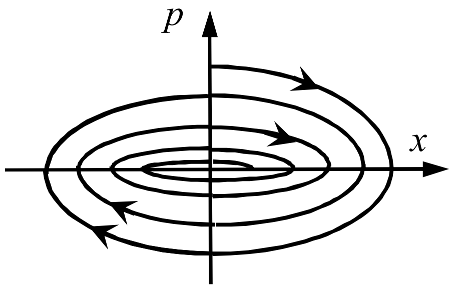

Рис. 10

Звідси випливає, що швидкість зміни повної механічної енергії коливальної системи завжди від'ємна, тобто під час вільних згасаючих коливань повна енергія тільки зменшується.

Дія сил тертя призводить до втрат енергії. Фазовий портрет згасаючих коливань зводиться до спіралі, яка наведена на рис. 10 і яка при $t\to\infty$ прямує до початку координат – точки $x=0$, $p=0$.

1.12. Характеристики вільних згасаючих коливань

Основними характеристиками вільних згасаючих коливань є час релаксації, коефіцієнт загасання, логарифмічний декремент, добротність.

Дамо означення цим поняттям.

Час, за який амплітуда коливань зменшується в e-разів називають *часом релаксації*. Позначають час релаксації грецькою буквою τ.

Вище показано, що амплітуда згасаючих коливань зменшується за експоненціальним законом

$$A(t)=Ae^{-\beta t}\,.$$

Її зменшення в e-разів, $\frac{A}{A(\tau)}=e$, відбувається в момент часу, коли показник експоненти дорівнює „–1”, тобто $\beta\tau=1$. Звідки знаходимо, що час релаксації $\tau=\frac{1}{\beta}$. Таким чином, час релаксації обернено пропорційний до параметра β, який, в свою чергу, називають *коефіцієнтом згасання*.

Коефіцієнт згасання, як було визначено вище, задається співвідношенням

$$\beta=\frac{\eta}{2m}.$$

З'ясуємо, як властивості речовини, з якої виготовлено тіло, що здійснює коливання, впливають на коефіцієнт згасання та час релаксації. Для цього розглянемо дві кульки однакового розміру. Перша, наприклад, виготовлена з пластмаси, а друга – з свинцю. Густини кульок $\rho_{пл}$ і $\rho_{св}$, а діаметри – $d_{пл}=d_{св}=d$. Нехай також поверхні кульок мають однакову шорохуватість і пофарбовані однаковою фарбою, щоб рівним були коефіцієнти в'язкого тертя: $\eta_{св}=\eta_{св}=\eta$. За цих умов коефіцієнти релаксації мають вигляд:

$$\beta_{пл}=\frac{\eta_{пл}}{2\rho_{пл}\frac{\pi d_{пл}^3}{6}}=\frac{3\eta}{\pi\rho_{пл}d^3}, \qquad \beta_{св}=\frac{\eta_{св}}{2\rho_{св}\frac{\pi d_{св}^3}{6}}=\frac{3\eta}{\pi\rho_{св}d^3}.$$

Звідки легко знайти, що відношення коефіцієнтів та часів релаксації для цих кульок будуть визначатимуться відношенням

$$\frac{\beta_{пл}}{\beta_{св}}=\frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}}, \qquad \frac{\tau_{св}}{\tau_{пл}}=\frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}},$$

тобто безпосередньо залежать від густини.

Для отриманого відношення густин кульок можна наближено записати: $\frac{\rho_{св}}{\rho_{пл}}\approx\frac{13}{2}\geq 6$, тому час релаксації згасаючих коливань маятника зі свинцевою кулькою буде значно більший часу релаксації пластмасової кульки. Це означає, що малі коливання свинцевої кульки продовжуватимуться у часі значно довше.

Щоб розрізнити описані ситуації, вводять величину, що обернена до кількості коливань, які відбуваються за час релаксації. Її називають *логарифмічним декрементом* і позначають буквою θ. Нехай N_e – кількість коливань, які здійснить коливальна система за час релаксації τ (індекс „e” позначає зменшення амплітуди в e-разів). Тоді за наведеним означенням логарифмічний декремент

$$\theta = \frac{1}{N_e}.$$

З іншого боку, кількість коливань, які здійснює система за час релаксації, можна знайти також з відношення $N_e = \frac{\tau}{\tilde{T}}$. Тому логарифмічний декремент

$$\theta = \frac{\tilde{T}}{\tau},$$

де знак «~» підкреслює, що відповідні коливання є згасаючими.

Величина θ характеризує процес зміни амплітуди коливань при їх згасанні. З'ясуємо тепер, як змінюється амплітуда коливань за відрізок часу, рівний одному періоду, від моменту часу t_1 до моменту часу $t_2 = t_1 + \Delta t$, інтервал між якими $\Delta t = \tilde{T}$ є періодом.

Запишемо вираз для амплітуди коливань для моменту часу t_1:

$$A(t_1) = Ae^{-\beta t_1}.$$

А тепер запишемо вираз для амплітуди коливань для моменту часу $t_2 = t_1 + \tilde{T}$

$$A(t_2) = A(t_1 + \tilde{T}) = Ae^{-\beta(t_1 + \tilde{T})} = Ae^{-\beta t_1} e^{-\beta \tilde{T}} = A(t_1)e^{-\beta \tilde{T}}.$$

Шукане відношення цих амплітуд має вигляд:

$$\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})} = e^{\beta \tilde{T}}.$$

Знайдемо логарифм цього виразу

$$\beta \tilde{T} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})}$$

і врахуємо, що коефіцієнт згасання є величиною оберненою до часу релаксації, тобто $\beta = 1/\tau$.

Отже, можна записати

$$\frac{\tilde{T}}{\tau} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + \tilde{T})}.$$

В цій рівності зліва записано відношення періоду до часу релаксації, яке є логарифмічним декрементом.

Таким чином, приходимо до висновку, що логарифмічний декремент – це не що інше, як характеристика ступеня послаблення амплітуди коливань за час, рівний їх періоду:

$$\theta = \ln A(t) - \ln A(t + \tilde{T}),$$

де ми прибрали індекс у часової змінної, оскільки момент часу t_1 був вибраний довільно.

Продовжуючи, доведемо, що ще одна характеристика коливань – добротність визначає втрати енергії коливальної системи під час згасаючого коливного процесу.

Дійсно, розглянемо енергію коливальної системи для двох моментів часу, інтервал між якими знову дорівнює періоду і зміщення в яких максимальні. Тоді для моменту часу t_1 максимальне зміщення $x_{\max}(t_1) = A(t_1) = Ae^{-\beta t_1}$, а для моменту часу t_2 воно дорівнює $x_{\max}(t_2) = A(t_1 + \tilde{T}) = Ae^{-\beta(t_1+\tilde{T})}$. В точках максимумів зміщення система має тільки потенціальну енергію, яка для зафіксованих моментів часу може бути легко розрахована:

$$U(t_1) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2(t_1) = \frac{1}{2}kA^2(t_1) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t_1},$$

$$U(t_1+\tilde{T}) = \frac{1}{2}kx_{\max}^2(t_1+\tilde{T}) = \frac{1}{2}kA^2(t_1+\tilde{T}) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta(t_1+\tilde{T})}.$$

На цьому інтервалі втрати енергії, що йдуть на компенсацію роботи сили тертя, визначаються різницею

$$\Delta U = U(t_1) - U(t_1+\tilde{T}),$$

яку можна записати інакше:

$$\Delta U = \frac{1}{2}kA^2(e^{-2\beta t_1} - e^{-2\beta(t_1+\tilde{T})}) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t_1}(1 - e^{-2\beta\tilde{T}}).$$

Як бачимо, приріст потенціальної енергії, а фактично повної енергії, залежить від вибраного моменту часу t_1, тому доцільно ввести відносну характеристику процесу втрат енергії коливальною системою.

Добротність, яку позначають буквою Q, знаходять з відношення початкової енергії коливальної системи до величини зменшення енергії системи за час одного періоду

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E},$$

яке в нашому випадку є:

$$Q = 2\pi\frac{U}{\Delta U}.$$

Підставимо в цю формулу вище розраховані величини для енергії та її зміни:

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t_1}}{\frac{1}{2}kA^2e^{-2\beta t_1}(1 - e^{-2\beta\tilde{T}})} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta\tilde{T}}}.$$

Як видно з отриманого виразу, добротність не залежить ні від часу, ні від амплітуди коливань, а тому є дуже зручною характеристикою будь-якої коливальної системи.

Коли згасання мале $\beta\tilde{T} << 1$, що відповідає нерівності $\tilde{T} << \tau$, можна скористатися наближеним значенням експоненти, розклавши її: $e^{-2\beta\tilde{T}} \approx 1 - 2\beta\tilde{T}$. Тоді приходимо до більш простого і часто використовуваного виразу для добротності

$$Q = \frac{\pi}{\beta\tilde{T}}.$$

Добуток у знаменнику, як вже нам відомо, є логарифмічним декрементом: $\theta = \beta\tilde{T}$. В результаті, маємо, що добротність і логарифмічний декремент є зв'язаними простим співвідношенням

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

З іншого боку, добротність пропорційна кількості N_e коливань за час релаксації, тому можна записати, що

$$Q = \pi N_e.$$

За вище наведеним означеннями, коефіцієнт згасання $\beta = \frac{\eta}{2m}$, період $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}$, а їх частота $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ – частота власних коливань. Підставляючи ці формули у вираз для добротності, знаходимо:

$$Q = \sqrt{\frac{mk}{\eta^2} - \frac{1}{4}}.$$

У більшості коливальних систем добротність набагато більша одиниці; зокрема, для механічних систем з $Q >> 1$ можна користуватися наближеною формулою

$$Q = \frac{\sqrt{mk}}{\eta}.$$

Зауважимо, що таку величину для Q можна отримати і з відношення амплітудного значення пружної сили $F_{пр}^{(\max)} = kA$ до амплітудного значення сили тертя $F_{тер}^{(\max)} = \eta\tilde{\omega}_0 A = \eta A\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Отже, $F_{пр}^{(\max)} / F_{тер}^{(\max)} =$ $= k / \eta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx k / \eta\omega_0 = \frac{k}{\eta\sqrt{k/m}} = \frac{\sqrt{mk}}{\eta} = Q$, де, зрозуміло, враховано, що $\omega_0 >> \beta$.

1.13. Аперіодичний процес

Треба сказати, що не завжди коливальні системи знаходяться у коливальному режимі, і буває так, коли він у такій системі, яка виведена з стану рівноваги, не встановлюється. Перехідний процес, яким є реакція системи на збурення і який відбувається у вигляді монотонного (без періодичних коливань) повернення системи до початкового стану чи переходу до нового стану рівноваги називають *аперіодичним*. Аперіодичний процес виникає як «відповідь» системи на порушення її рівноваги і стосується відновленню останньої. З'ясуємо умови, за якими повернення системи до свого рівноважного стану відбувається без виникнення коливального процесу.

Запишемо для цього диференційне рівняння, яке описує рух коливальної системи при її незначному відхиленні від положення рівноваги

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\eta\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

Як і вище, перепишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0,$$

де $\beta=\dfrac{\eta}{2m}$, $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$, а m і η – маса та коефіцієнт тертя.

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t)=C_+e^{\lambda_+t}+C_-e^{\lambda_-t},$$

де знову C_+ та C_- – довільні сталі, а $\lambda_\pm=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$.

При $\omega_0>\beta$, коли під коренем у виразі для $\lambda_\pm$ стоїть від'ємна величина, у системі при її збудженні виникають, як було показано, згасаючі коливання.

Якщо ж $\beta>\omega_0$ параметри $\lambda_\pm$ є дійсними і реакція системи на збудження буде описуватися виключно дійсними експоненційними функціями.

Для механічної системи, у якої згасання настільки велике, що виконується нерівність $\beta>\omega_0$, загальний розв'язок диференційного рівняння для зміщення набуває вигляду

$$x(t)=C_+e^{(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+C_-e^{(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}.$$

Як видно, в механічній системі при великій силі тертя гармонічні коливання не виникають, то згідно до наведеного означення відбувається аперіодичний процес.

Значення сталих C_+ та C_- знаходять, використовуючи початкові умови $x_0 = x(t=0)$ для зміщення системи та її початкової швидкості $v_0 = \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}$.

Задовольняючи цим умовам, приходимо до системи двох рівнянь

$$x_0 = C_+ + C_-,$$

$$v_0 = C_+(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) + C_-(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) = (C_+ - C_-)\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} - \beta x_0.$$

Зробимо прості перетворення у другому рівнянні, що дає:

$$C_+ + C_- = x_0,$$

$$C_+ - C_- = \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}.$$

Розв'язком цієї системи двох лінійних рівнянь є значення:

$$C_+ = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right),\ C_- = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right).$$

Таким чином, для довільних величин початкової швидкості v_0 та зміщення x_0 аперіодичний процес переходу механічної системи до початкового стану рівноваги описується виразом:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-\beta t}\left[\left(x_0 + \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right)e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + \left(x_0 - \frac{v_0 + \beta x_0}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right)e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right].$$

Принципово, що незалежно від початкових умов величина зміщення при $t \to \infty$ прямує до нуля: $x(t \to \infty) \to 0$, тобто система плавно повертається у свій вихідний стан, або до рівноваги.

У випадку, коли систему відхили від положення рівноваги $x_0 \neq 0$ і відпустили з нульовою швидкістю $v_0 = 0$, часова залежність зміщення описується іншим виразом, а саме:

$$x(t) = \frac{x_0}{2}e^{-\beta t}\left[\left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right)e^{t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} + \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right)e^{-t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}\right],$$

або

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}\left[ch(t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}sh(t\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})\right],$$

де використані функції гіперболічних косинуса та синуса.

При такому способі збудження системи зміщення буде монотонно спадаючою функцією від часу, хід якої на рис. 11 показано суцільною кривою.

Коли ж системі в положенні рівноваги $x_0 = 0$ миттєво надали початкової швидкості, $v_0 \neq 0$, часова залежність зміщення описується наступним виразом

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{-\beta t}\frac{v_0}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}(e^{t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}-e^{-t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}),$$

або

$$x(t)=\frac{v_0}{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}}e^{-\beta t}sh(t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}).$$

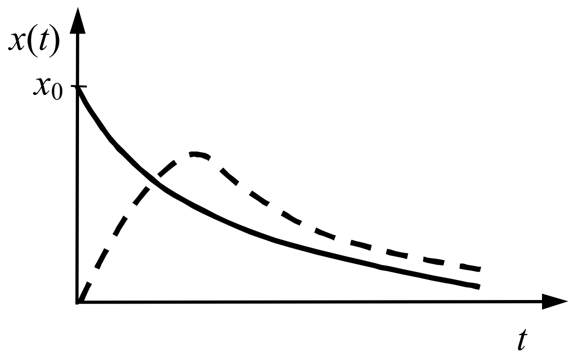

Рис. 11

Видно, що в цьому випадку зміщення визначається добутком спадаючої та зростаючої функцій, а тому функція часової залежності $x(t)$ має максимум. Хід цієї часової залежності зміщення від часу для такого способу збурення на рис. 11 показаний пунктирною кривою.

1.14. Диференційне рівняння вимушених гармонічних коливань

Коли на коливальну систему діє зовнішня сила, яка сама періодично залежить від часу, в системі виникають і відбуваються *вимушені* коливання. Обмежимося розглядом вимушених коливань, коли часова залежність зовнішньої періодичної сили описується функцією

$$\vec{F}=\vec{F}_{\max}\cos\omega t,$$

де $\vec{F}_{\max}$ – максимальне (амплітудне) значення сили, а ω – її частота.

Для простоти розглянемо горизонтальний пружинний маятник, жорсткість пружини якого дорівнює k, а маса тіла – m.

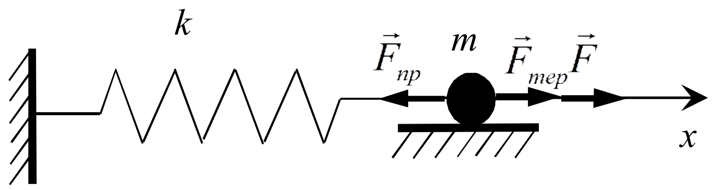

Рис. 12

При записі рівняння руху тіла маятника врахуємо, що на нього, крім пружної сили $\vec{F}_{пр}$ (див. рис. 12), діють також сила в'язкого тертя $\vec{F}_{тер}$ та зовнішня сила $\vec{F}$, яка направлена горизонтально.

У відповідності до другого закону Ньютона запишемо рівняння

$$m\vec{a}=\vec{F}_{пр}+\vec{F}_{тер}+\vec{F}.$$

Сила в'язкого тертя направлена протилежно до швидкості і згідно припущенню відповідає закону Стокса

$$\vec{F}_{тер}=-\eta\vec{v},$$

де η – константа. У випадку системи, яку зображено на рис. 12, будуть спостерігатися одновимірні коливання. Координатну вісь направимо вздовж лінії руху тіла. В цій системі проекція сили тертя буде пропорційна похідній від зміщення x:

$$F_{тер}^{x} = -\eta v_x = -\eta \frac{dx}{dt}.$$

В такий спосіб введеній системі координат рівняння другого закону Ньютона набуде вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \eta\frac{dx}{dt} + F_{\max}\cos\omega t,$$

де ми опустили індекс проекції у зовнішньої сили.

Поділимо це рівняння на m та введемо нові позначення, звідки отримаємо диференційне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m\cos\omega t,$$

В якому, як і раніше, $\beta \equiv \dfrac{\eta}{2m}$ – коефіцієнт згасання, $\omega_0^2 \equiv \dfrac{k}{m}$ – власна частота, а $f_m \equiv \dfrac{F_{\max}}{m}$.

Отримане диференційне рівняння другого порядку є неоднорідним і містить в правій частині періодичну функцію, яка залежить від часу. Це рівняння називають *диференційним рівнянням вимушених коливань*.

1.15. Розв’язок диференційного рівняння вимушених гармонічних коливань

Як було показано, вимушені коливання описуються неоднорідним диференційним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m\cos\omega t.$$

Очевидно, що у загальному випадку його розв’язок можна представити сумою розв’язків однорідного рівняння $x_{од}(t)$ та окремого (частинного) розв’язку $x_{част}(t)$, який задовольняє ненульовій правій частині рівняння

$$x(t) = x_{од}(t) + x_{част}(t).$$

Однорідне рівняння описує згасаючі коливання, і функція його розв’язку експоненціальна згасає з часом:

$$x_{од}(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_o).$$

Визначимо, як залежить від часу зміщення для усталених коливань, коли виконується припущення, що зовнішня сила діє нескінченно довго. В цьому випадку доданком до зміщення від вільних згасаючих коливань можна знехтувати (бо $t \to \infty$), тому для усталених коливань зміщення визначається лише частинним розв'язком диференційного рівняння $x(t) = x_{част}(t)$.

Припустимо, що зміщення для таких коливань буде гармонічним з постійною незалежною від часу амплітудою і відбуватися з частотою вимушуючої сили. За такого припущення зміщення можна представити у вигляді

$$x(t) = \operatorname{Re} Ae^{i\omega t}.$$

Підставимо показникову функцію $Ae^{i\omega t}$ в диференційне рівняння та отримаємо:

$$i^2\omega^2 Ae^{i\omega t} + 2i\beta\omega Ae^{i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{i\omega t} = f_m e^{i\omega t},$$

де враховано, що $\operatorname{Re} e^{i\omega t} = \cos\omega t$.

З виписаного рівняння знаходимо амплітуду

$$A = A(\omega) = \frac{f_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}.$$

Помножимо чисельник і знаменник дробу амплітуди на вираз, який комплексно спряжений до знаменника, в результаті чого маємо:

$$A(\omega) = f_m \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega)} = f_m \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}.$$

Врахуємо, що будь-яке комплексне число z може бути представлене у вигляді $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = \sqrt{\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z}\, e^{i \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}}$. Згідно з цим представленням знаходимо, що

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}\; e^{i \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}.$$

Тепер вираз для амплітуди можна переписати у спосіб:

$$A(\omega) = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\; e^{i \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}}$$

Отже, для усталених вимушених коливань зміщення описується формулою

$$x(t) = \operatorname{Re} \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\; e^{i(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2})}.$$

Дійсна її частина має вигляд

$$x(t)=\frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t-\mathrm{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}) \ .$$

Таким чином, сформулюємо основні висновки:

- усталені вимушені коливання завжди мають частоту зовнішньої періодичної сили;

- амплітуда усталених вимушених коливань прямо пропорційна амплітудному значенню вимушуючої сили;

- фаза коливань зміщення зсунута відносно фази зовнішньої періодичної сили так, що коливання зміщення завжди відбуваються з запізненням по відношенню до коливань вимушуючої сили, причому спочатку, коли $\omega<\omega_0$, це запізнення менше $\pi/2$, при $\omega=\omega_0$ досягає $\pi/2$, а потім, коли $\omega>\omega_0$, запізнення по фазі знаходиться в інтервалі від $\pi/2$ до π.

1.16. Резонанс

Коли на коливальну систему діє гармонічна сила $F=F_{\max}\cos\omega t$, де $F_{\max}$ – амплітудне значення сили, а ω – її циклічна частота, то через деякий час в системі, як було вище продемонстровано, виникають усталені коливання, частота яких дорівнює частоті вимушуючої сили, а їх зміщення описуються виразом

$$x(t)=A(\omega)\cos(\omega t-\alpha),$$

де

$$A(\omega)=\frac{F_{\max}}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

– амплітуда, а

$$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

– зсув фаз для часових залежностей сили і зміщення.

Нагадаємо також, що в цих формулах $\omega_0^2=\frac{k}{m}$, $\beta=\frac{\eta}{2m}$, де m – маса тіла, k – жорсткість пружини (ефективна жорсткість коливальної системи), а η – коефіцієнт в’язкого тертя.

З наведених формул випливає, що амплітуда усталених вимушених коливань залежить від частоти зовнішньої сили. Видно, що залежність амплітуди $A(\omega)$ від частоти зовнішньої сили має максимум, який є прямим наслідком того, що її знаменник має мінімум. Тому при знаходженні точки максимуму амплітуди обмежимося розглядом похідної від виразу, що стоїть під коренем у знаменнику для $A(\omega)$, та прирівняємо цю похідну нулю

$$-2 \cdot 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega = 0 .$$

Звідси знаходимо, що точці екстремуму амплітуди відповідає частота

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} .$$

Звернемо увагу, що частота ω_p, яку прийнято називати *резонансною*, не співпадає ні з власною частотою ω_0 вільних незгасаючих коливань, ні з частотою $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ вільних згасаючих коливань, причому $\omega_p < \tilde{\omega}_0 < \omega_0$ (зауважимо також, що у відсутності тертя всі ці частоти співпадають). На резонансній частоті амплітуда вимушених коливань має найбільше значення

$$A(\omega_p) = A_p = \frac{F_{\max}}{m\sqrt{(2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{F_{\max}}{2m\beta\tilde{\omega}_0} .$$

Коли $\beta << \omega_0$, амплітуда коливань на резонансній частоті має величину

$$A_p = \frac{F_{\max}}{2m\beta\omega_0} = \frac{F_{\max}}{\eta\omega_0} ,$$

або

$$A_p = \frac{F_{\max}}{\eta}\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

З наведених виразів для A_p видно, що при $\omega = \omega_p$ амплітудне значення зовнішньої сили дорівнює максимальному значенню сили тертя $F_{\max} = \eta\omega_0 A_p = F_{тер}^{(\max)}$. Таке узгодження величин сил означає, що за умови $\omega = \omega_p$ часова залежність зовнішньої сили та часова залежність швидкості коливальної системи мають однакову фазу.

Дійсно, з виразу для зсуву фаз $\alpha(\omega)$ маємо, що на резонансній частоті $\alpha(\omega = \omega_p) \to \frac{\pi}{2}$. Синфазність коливань зовнішньої сили та швидкості коливальної системи призводить до того, що потужність зовнішньої сили дорівнює (за модулем) потужності сили тертя, а отже на резонансній частоті робота зовнішньої сили виконується виключно для компенсації сили тертя.

Явище значного зростання амплітуди вимушених коливань при зміні частоти коливань і прямуванні $\omega \to \omega_0$ називається *резонансом*. Повний резонанс виникає на так званій резонансній частоті коливальної системи. В складних системах власна частота може бути не одна (в деяких випадках їх кількість може бути практично необмеженою), що, в свою чергу, визначає наявність в таких системах цілого набору резонансних частот.

На рис. 13 наведено залежності амплітуди вимушених коливань від частоти зовнішньої сили. Такі залежності можна отримати і експериментально, коли в умовах експерименту є можливість змінювати частоту зовнішньої сили, залишаючи при цьому незмінним амплітудне значення останньої.

Графіки залежності $A(\omega)$ називають *резонансними кривими*. На рис. 13 такі криві побудовані для різних значень коефіцієнту згасання, $\beta_2 > \beta_1$ та $\beta = 0$. Видно, що при зменшенні коефіцієнта згасання амплітуда вимушених коливань зростає, резонансна крива звужується і стає більш гострою. Відповідно, зростає амплітуда коливань на резонансній частоті ω_p. Коли $\beta \to 0$, резонансна частота прямує до значення власної частоти $\omega_p \to \omega_0$, а амплітуда при резонансі прямує до нескінченості $A_p(\beta \to 0) \to \infty$.

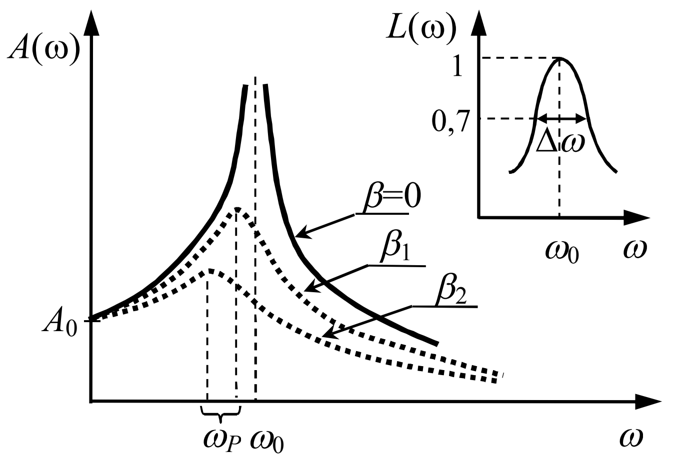

Рис. 13

При $\omega \to 0$ амплітуда зміщення у відповідності до закону Гука приймає значення $A_0 = A(\omega \to 0) = \frac{F_{\max}}{k}$. Коли ж $\omega >> \omega_p$ і, більше того, $\omega \to \infty$, амплітуда вимушених коливань прямує до нуля $A(\omega \to \infty) \to 0$.

При слабкому згасанні вираз $A(\omega)$ для амплітуди вимушених коливань можна значно спростити, якщо скористатися наступними наближеннями:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 \approx 4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2,$$

$$4\beta^2\omega^2 \approx 4\beta^2\omega_0^2.$$

З їх урахуванням вираз для $A(\omega)$ набуде вигляду

$$A(\omega) = \frac{F_{\max}}{2m\beta\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 / \beta^2 + 1}}, \qquad \text{або} \qquad A(\omega) = \frac{F_{\max} Q}{k} L(\omega),$$

де $L(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 / \beta^2 + 1}}$ позначено функцію, яку у фізиці прийнято називати *лоренцевою* функцією, або, інколи *лоренціаном*, $Q = \frac{1}{\eta}\sqrt{mk}$ – добротність.

Ширину $\Delta\omega$ резонансної кривої знаходять з умови зменшення амплітуди коливань в $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ разів (див. рис. 13). Очевидно, що ширина резонансної кривої становить $\Delta\omega = 2\beta$.

Підсумовуючи, слід також наголосити, що добротність коливальної системи можна визначити з ширини резонансної кривої. Дійсно, для слабкого згасання справедливе наближення $Q = \frac{\pi}{\beta\tilde{T}} \approx \frac{\pi}{\beta T} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\frac{\omega_0}{2\pi}$, з якого приходимо до формули

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega},$$

яка широко використовується у практиці.

1.17. Параметричний резонанс

Явище резонансу спостерігається не тільки за умови дії зовнішньої періодичної вимушуючої сили необхідної частоти, а й тоді, коли відбувається періодична зміна того чи іншого параметру коливальної системи. В цьому випадку можна також досягти великих значень амплітуди коливань, які тим самим визначатимуть явище *параметричного резонансу*. Збурити коливання маятника (наприклад, гойдалки) легше за все, коли частота поштовхів (що відіграють роль зовнішньої сили) співпадає з власною частотою коливань самої гойдалки – це випадок звичайного резонансу. Але досягти значної амплітуди коливань гойдалки можна і тоді, коли на ній дитина вчасно присідає та випрямляється – це вже випадок параметричного резонансу. Легко перевірити, що при цьому частота присідань дитини на гойдалці має бути приблизно в два рази більшою частоти власних коливань гойдалки з дитиною, коли дитина гойдається без присідань. Причина параметричного розкачування гойдалки обумовлена тим, що присідаючи та випрямляючись дитина змінює положення центру тяжіння, а отже – ефективну довжину маятника. Крім того, періодично рухаючись, дитина виконує роботу, що йде на зростання амплітуди коливань.

Розберемо явище параметричного резонансу на простому прикладі математичного маятника. Рівняння коливань такого маятника має вигляд

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

де, як ми знаємо, власна частота $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$. Якщо під час коливного процесу змінюється довжина маятника, то відношення $\frac{g}{\ell}$ стає залежним від часу, тобто залежною від часу стає і частота ω_0. Коли зміна довжини маятника здійснюється за гармонічним законом, вираз для довжини математичного маятника може бути представлений у вигляді:

$$\ell(t) = \ell_0(1 - \delta \sin \omega t),$$

де $\delta < 1$ – стала.

Припустимо, що виконується нерівність $\delta << 1$, тоді відношення прискорення вільного падіння до довжини маятника можна записати наступним чином

$$\frac{g}{\ell(t)} = \frac{g}{\ell_0(1 - \delta \sin \omega t)} \approx \frac{g}{\ell_0}(1 + \delta \sin \omega t) = \omega_0^2(1 + \delta \sin \omega t),$$

де тепер $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell_0}$ і є сталою величиною.

Отже рівняння, яке описує процес коливань маятника за умови, що його довжина періодично змінюється, набуває вигляду:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2(1 + \delta \sin \omega t)\varphi = 0.$$

Це диференційне рівняння називають *рівнянням Матьє*. Воно добре вивчене у математиці, його розв'язками є так звані *функції Матьє*.

Особливий інтерес представляють розв'язки, що відповідають певним співвідношенням частот ω_0 та ω. Наприклад, у випадку, коли частота ω задовольняє співвідношенню

$$\omega = \frac{2\omega_0}{n},$$

де n – ціле число, відбувається зростання амплітуди коливань системи.

Розв'язок рівняння Матьє для таких значень частот представляє собою зростаючу з часом амплітуду, помножену на гармонічну функцію з частотою ω_0.

Найбільш цікавим є випадок n=1, коли частота зміни параметру в два рази перевищує власну частоту коливальної системи, тобто $\omega = 2\omega_0$. Переконаємося, що в цьому випадку дійсно відбуватиметься значне розкачування маятника.

Для математичного маятника ефективною пружною силою є сила тяжіння, потужність якої

$$N = M\frac{d\varphi}{dt} = -mg\ell_0(1-\delta\sin\omega t)\cdot\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

де M – момент сили тяжіння, $\dfrac{d\varphi}{dt}$ – кутова швидкість, а плече сили тяжіння $\ell(t)\sin\varphi \approx \ell_0(1-\delta\sin\omega t)\cdot\varphi$. Знак мінус враховує, що момент сили тяжіння протилежний до кутового зміщення.

Якщо коливання відбуваються з власною частотою коливальної системи і описуються виразом $\varphi(t) = A\sin\omega_0 t$, то вираз для потужності набуде вигляду

$$N = -mg\ell_0 A^2\omega_0(1-\delta\sin\omega t)\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t = -\frac{1}{2}mg\ell_0 A^2\omega_0(1-\delta\sin\omega t)\sin 2\omega_0 t.$$

Розрахуємо середнє значення потужності за час, набагато більший періоду: $t >> T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Середнє синуса дорівнює нулю, тому величина середньої потужності буде визначатися середнім значенням добутку двох синусів

$$\left\langle N\right\rangle = \frac{1}{2}mgl_0 A^2\omega_0\delta\left\langle \sin\omega t\sin 2\omega_0 t\right\rangle.$$

З цього виразу випливає, що середнє значення потужності, розраховане за час набагато більший періоду, буде відмінне від нуля тільки при $\omega = 2\omega_0$, коли воно є скінчене і додатне: $\left\langle N\right\rangle = \dfrac{1}{4}mgl_0 A^2\omega_0\delta$. Таким чином, якщо довжина маятника дещо змінюється з частотою $\omega = 2\omega_0$, яка і стає частотою параметричного резонансу, то амплітуда коливань системи зростатиме, оскільки в цьому випадку сила тяжіння знову стає розгойдуючою силою. В протилежному випадку, коли $\omega \neq 2\omega_0$, величина $\left\langle N\right\rangle \to 0$ і ефективність сили тяжіння зникає.

1.18. Коливання в системах з в’язями

Коливальні системи з в’язями представляють сукупність двох і більшої кількості коливальних систем, які взаємодіють між собою. Інколи такі системи називають зв’язаними. Найпростішим прикладом(див. рис. 14) зв’язаної коливальної системи можуть бути два горизонтальні пружинні маятники, які з’єднані між собою пружиною.

Припустимо для простоти, що маси тіл обох коливальних систем однакові. Однакові також жорсткості пружин цих коливальних систем. Пружина з жорсткістю k_{12} забезпечує взаємозв’язок між цими двома пружинними маятниками.

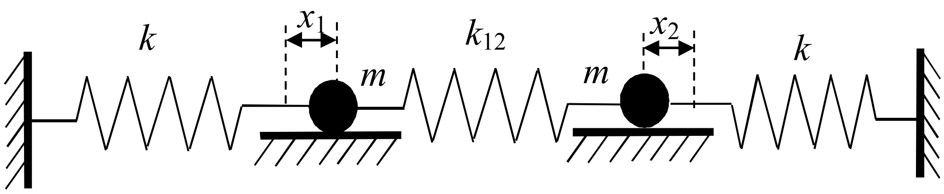

Рис. 14

Згідно з другим законом Ньютона маємо два диференційні рівняння руху:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2),$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1).$$

Поділимо ці рівняння на масу тіл, переписавши їх у вигляді:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + (\frac{k}{m} + \frac{k_{12}}{m})x_1 - \frac{k_{12}}{m}x_2 = 0,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + (\frac{k}{m} + \frac{k_{12}}{m})x_2 - \frac{k_{12}}{m}x_1 = 0.$$

Позначимо $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\gamma^2 = \frac{k_{12}}{m}$ і представимо систему наступним чином:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + (\omega_0^2 + \gamma^2)x_1 - \gamma^2 x_2 = 0,$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + (\omega_0^2 + \gamma^2)x_2 - \gamma^2 x_1 = 0.$$

Будемо шукати розв'язок цих рівнянь у вигляді

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad x_2 = A_2 e^{i\omega t}.$$

Підставляючи ці функції у диференційне рівняння, отримаємо систему однорідних лінійних рівнянь

$$(\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2)A_1 - \gamma^2 A_2 = 0,$$

$$-\gamma^2 A_1 + (\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2)A_2 = 0.$$

Зазначена система має ненульовий розв'язок тільки у випадку, коли детермінант, побудований з коефіцієнтів цієї системи рівнянь, дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2 & -\gamma^2 \\ -\gamma^2 & \omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи цей детермінант, приходимо до квадратного рівняння

$$(\omega_0^2 + \gamma^2 - \omega^2)^2 - \gamma^4 = 0,$$

якому задовольняють два значення для частоти коливань

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 + \gamma^2 \pm \gamma^2,$$

де

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\gamma^2}\,, \qquad \omega_2 = \omega_0\,.$$

Таким чином, обидва тіла коливальної системи одночасно приймають участь у двох коливальних рухах з двома різними частотами ω_1 і ω_2, які можна вважати власними частотами зв'язаної коливальної системи.

Для з'ясування, що це за рухи, складемо спочатку обидва рівняння другого закону Ньютона, що дає

$$m\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -k(x_1 + x_2)\,,$$

або

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0\,.$$

Отже маємо, що сума зміщень обох тіл здійснює синфазне коливання з меншою частотою $\omega_2 = \omega_0$. Видно, що на таке коливання між маятниковий зв'язок впливу на чинить і воно відбувається так, начебто ніякого зв'язку немає.

Тепер розглянемо різницю рівнянь Ньютона:

$$m\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -k(x_1 - x_2) - 2k_{12}(x_1 - x_2)\,,$$

або

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + (\omega_0^2 + 2\gamma)(x_1 - x_2) = 0\,.$$

Звідси бачимо, що різниця зміщень тіл коливається з більш високою частотою ω_2, яка є частотою протифазного коливання пари, на яке впливає між маятникова взаємодія, збільшуючи вихідну частоту.

Обидва коливальні рухи – як суми, так і різниці зміщень – називаються *нормальними коливаннями*, а їх частоти називаються *нормальними частотами*.

Резонанс у системі з в'язями може спостерігатися при співпадінні частоти зовнішньої сили хоча б з однією з нормальних частот системи. Коли нормальні частоти мають близькі значення (слабкий зв'язок між коливальними системами), можлива резонансна передача енергії з однієї підсистеми до іншої.

1.19. Биття

Як вже зазначалося у пунктах 1.15 та 1.18, тіло коливальної системи може здійснювати декілька рухів, кожний з яких можна описувати гармонічними функціями. Розглянемо досить простий випадок, коли тіло здійснює одновимірний коливальний рух, який є сумою двох гармонічних рухів

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

де

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1),$$
$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

В загальному випадку амплітуди, частоти та фази рухів $x_1(t)$, $x_2(t)$ можуть бути різними. Ми ж розглянемо найбільш цікавий випадок, коли частоти цих рухів незначно відрізняються між собою, причому будемо вважати $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$, а $\Delta\omega << \omega_1$. Крім того, заради простоти опису припустимо, що амплітуди обох коливань взагалі однакові: $A_1 = A_2 = A$. Початкові фази обох коливань приймемо рівними нулю $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Коливання, які отримують в результаті накладання двох коливань однакового напрямку з близькими частотами, називають *биттям*.

За зроблених припущень зміщення, що відповідає результуючому коливанню тіла, визначається сумою

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t.$$

Використаємо представлення суми косинусів їх добутками:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

звідки знаходимо

$$x(t) = 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2} \approx 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos\omega t.$$

Таким чином, результуючий рух можна представити добутком амплітуди, яка відносно повільно залежить від часу, і гармонічної функції, частота якої дорівнює півсум частот обох коливань $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, а період $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Амплітуда результуючого коливання залежить, як видно, від часу і описується виразом

$$A_{бит}(t) = \left| 2A\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t) \right|.$$

Отже, биття є коливальним рухом з амплітудою, яка періодично змінюється у часі, а ця залежність є набагато повільнішою, ніж самі коливання.

На рис. 15 наведено часові залежності для зміщення (суцільна крива) та амплітуди (пунктир) биття. Максимальне значення цієї амплітуди дорівнює $2A$.

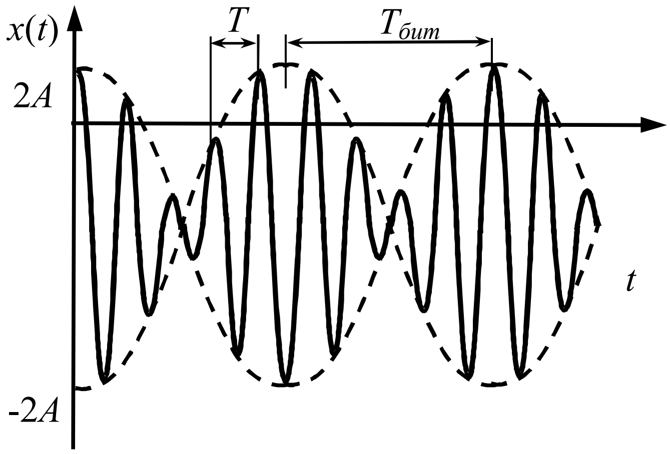

Рис. 15

Оскільки в правій частині формули для $A_{бит}(t)$ стоїть модуль косинуса, то частота зміни амплітуди (*частота биття*) подвоюється. Період биття визначається різницею частот $\Delta\omega$, а саме:

$$T_{бит} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

і зазвичай $T_{бит} >> T$, оскільки $\Delta\omega << \omega$.

Явище биття є дуже поширеним. Наприклад, коливання моста, які збурює вантажівка, проїжджаючи по ньому, мають вигляд биття. Спектр подібних коливань є широким, а тому головною проблемою є те, як уникнути співпадіння їх частот з однією з резонансних частот самої споруди, щоб запобігти її можливому руйнуванню.