Глава 2. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ

Електромагнітні коливання – це коливання, як правило, взаємозв'язаних електричного та магнітного полів. Такі коливальні процеси притаманні багатьом системам, в яких відбувається періодичний рух зарядів (заряджених частинок). Зокрема, електромагнітні коливання супроводжують так звані *квазістаціонарні* процеси, що відбуваються в електричних колах, лінійні розміри яких набагато менші за довжину електромагнітної хвилі з часовим масштабом (періодом) квазіперіодичного процесу. Наприклад, для періодичного процесу з частотою 100 кГц довжина електромагнітної хвилі, яку визначають добутком швидкості світла на період, легко знаходиться і дорівнює $3{\cdot}10^8/10^5 = 3{\cdot}10^3$ м, або 3 км. Якщо періодичний процес зміни електричного поля всередині конденсатора, розміри якого $\sim 10^{-2}$ м, відбувається на такій частоті, то впливом хвильових явищ взагалі можна знехтувати. При цьому можна вважати, що електричне поле в конденсаторі однорідне, і відбувається тільки періодична з часом зміна напруженості поля, тобто часові коливання останнього.

Електричними (*електромагнітними*) коливаннями називають періодичну зміну заряду на ємностях електричних кіл або періодичну зміну електричного струму на індуктивних чи дисипативних (омічних) ділянках кіл. Таке означення електричних коливань передбачає їх опис через заряди конденсаторів кіл або через струми активних чи індуктивних опорів кіл.

Струми в колах при квазіперіодичних процесах задовольняють рівнянню неперервності. Тому для сили струму та заряду на обкладинках конденсаторів виконується співвідношення $I = \pm\dfrac{dq}{dt}$, яке безпосередньо свідчить: періодична зміна заряду призводить до періодичної зміни струму.

2.1. Власні електромагнітні коливання

Власні електромагнітні коливання відбуваються в електричному колі, яке містить ємність та індуктивність і яке в цілому називають *коливальним контуром*. На рис. 16 зображено контур з конденсатором ємністю C та з котушкою, індуктивність якої L.

Підключимо конденсатор коливального контуру до джерела постійного струму. Обкладинки конденсатора набудуть заряду. Відключимо джерело струму, переведемо ключ з положення *1* до положення *2*. Коли ключ знаходиться в положенні *2*, конденсатор і індуктивність утворюють замкнене коло. Тоді конденсатор набуває можливість розрядитися через котушку індуктивності. Але внаслідок явища самоіндукції миттєва компенсація зарядів конденсатора не відбувається.

При підключенні зарядженого конденсатора до котушки в контурі виникає струм, який супроводжується утворенням в котушці електрорушійної сили (ЕРС) самоіндукції, яка протидіє будь-якій часовій зміні струму в колі, бо ЕРС самоіндукції протидіє не тільки наростанню струму, а і його зменшенню.

Процес розрядження конденсатора мав би завершитися, коли миттєве значення його заряду досягне нуля. Але в момент часу, коли заряд конденсатора стає рівним нулеві, миттєве значення сили струму дорівнювати нулю не буде, бо його підтримує ЕРС самоіндукції.

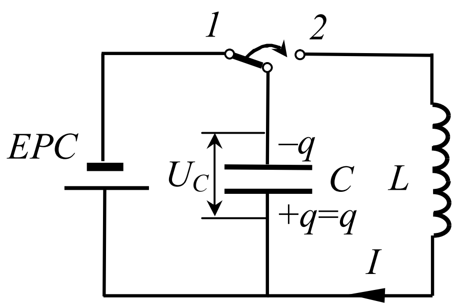

Рис. 16

Тому, в той момент, коли накопичений на обкладинках конденсатора заряд компенсується, розпочнеться зворотній процес зарядження конденсатора. На цьому етапі обкладинки конденсатора набувають зарядів, знаки яких протилежні знакам їх вихідних зарядів. Таке зворотне зарядження конденсатора буде відбуватися до тих пір, поки миттєве значення сили струму знову не стане дорівнювати нулю. В цей момент конденсатор набуває максимального (за модулем) заряду, і знову розпочинається наступний цикл розрядження конденсатора.

Таким чином, приходимо до фізичної картини періодичного процесу в коливальному контурі: при підключенні до котушки зарядженого конденсатору в контурі буде відбуватися циклічний процес розрядження та зарядження конденсатору. Іншої мовою, в коливальному контурі будуть відбуватися коливання електричного поля (в конденсаторі) та магнітного поля (в котушці). Спостерігати за коливаннями можна, наприклад, шляхом вимірювань напруги U_C на конденсаторі або вимірюванням сили струму $I(t)$, що тече в котушці.

Здійснимо математичний опис електричних коливань у коливальному контурі. Напруга на конденсаторі, який підключений паралельно до котушки, дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці; тому можна записати рівність

$$U_C = -L\frac{dI}{dt},$$

якою враховано, що ЕРС самоіндукції котушки пропорційна швидкості наростання струму, а саме: $\mathcal{E}_{\tilde{n}^{3}} = -L\dfrac{dI}{dt}$.

Для електричних коливань у коливальному контурі виправдовується припущення, за яким для повільних квазістаціонарних коливальних процесів зберігається пряма пропорційність між миттєвими значеннями заряду конденсатора та напруги на ньому. Приймемо заряд додатно зарядженої обкладинки конденсатора (нижньої обкладинки конденсатора на рис. 16) зарядом конденсатора $q(t)$. При обході цього контора за годинниковою стрілкою напруга на конденсаторі $U_C = \dfrac{q}{C}$. З урахуванням цього отримаємо рівняння

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Для струму, напрямок якого на рис. 16 позначено стрілкою, виконується співвідношення $I = \dfrac{dq}{dt}$, бо заряд перенесений струмом йде на збільшення заряду конденсатора. В результаті, приходимо до диференційного рівняння другого порядку

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0.$$

Коли це рівняння поділити на індуктивність, то фактично отримуємо вже відоме з розгляду механічних коливань диференційне рівняння вільних незгасаючих коливань, а саме:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0,$$

де тепер введено позначення $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$. Величину ω_0 називають *власною* частотою електричних коливань контуру. Як видно, вона визначається за формулою, яку називають *формулою Томпсона*:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Легко записати період власних коливань:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Зрозуміло також, що вільні незгасаючі коливання заряду в контурі в загальному випадку описуються гармонічною функцією

$$q(t)=Q_{\max}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\,,$$

де $Q_{\max}$ – амплітуда заряду, φ_0 – початкова фаза. У разі збурення коливань шляхом надання конденсатору початкового заряду, як це показано на рис. 16, часова залежність для заряду описується виразом

$$q(t)=Q_{\max}\cos\omega_0 t\,,$$

де амплітудне значення заряду $Q_{\max}$ дорівнює його початковому значенню $q_0=q(t=0)$, яке пропорційне ЕРС джерела постійного струму: $Q_{\max}=q_0=CE_{дж}$.

Коливання струму також відбувається за гармонічним законом

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=-I_{\max}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\,,$$

де $I_{\max}=\omega_0 Q_{\max}$ – амплітудне значення сили струму. Видно, що воно пропорційне добутку власної частоти на амплітудне значення заряду.

Власні електричні коливання є ідеалізованими, бо при їх визначенні нехтували дією активного електричного опору, і тому такі коливання виявляються незгасаючими, причому енергія власних електромагнітних коливань не змінюється. Повна енергія коливального контуру дорівнює сумі енергії електричного поля конденсатора та енергії магнітного поля індуктивності:

$$W(t)=\frac{q^2}{2C}+\frac{LI^2}{2}\,.$$

Оскільки $W(t)=const\equiv W$, то похідна від повної енергії контуру має дорівнювати нулю. Таким чином, якщо диференціювати по часу вираз для повної енергії, що зберігається, то прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{C}q\frac{dq}{dt}+LI\frac{dI}{dt}=0\,.$$

Враховуючи, що $I=\dfrac{dq}{dt}$, то знову отримуємо диференціальне рівняння вільних незгасаючих коливань.

Легко переконатися, що величина повної енергії контуру дорівнює максимальному значенню електричної енергії конденсатора, або максимальному значенню енергії магнітного поля котушки. Отже, можна записати:

$$W = \frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Під час коливань напруженість електричного поля в середині конденсатора змінюється за гармонічним законом

$$E(t) = \frac{U_C}{d} = \frac{q}{Cd} = E_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де d – відстань між пластинами конденсатора, а $E_{\max} = \dfrac{Q_{\max}}{Cd}$ – амплітудне значення напруженості електричного поля.

Коли діаметр котушки індуктивності значно менший її довжини, то магнітне поле в котушці можна вважати однорідним. Вектор індукції магнітного поля в ній здійснює гармонічні коливання, які описуються виразом

$$B = \frac{\psi}{NS_{\text{ï åð}}} = \frac{LI}{NS_{\text{ï åð}}} = -B_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $S_{пер}$ – площа перерізу котушки, N – кількість витків в ній, ψ – магнітний потік, а $B_{\max} = \dfrac{LI_{\max}}{NS_{пер}}$ – амплітудне значення вектора індукції магнітного поля в котушці.

Таким чином, під час електричних коливань відбувається періодична зміна таких фізичних величин в контурі, як заряд на обкладинках конденсатора, електричний струм в котушці, напруженість електричного поля в конденсаторі, індукція магнітного поля в котушці.

Зробимо важливе зауваження, що стосується коливань заряду на обкладинках конденсатора, яких в конденсаторі дві. Заряди на них під час коливань змінюються періодично, але їх знаки протилежні, тому заряди обкладинок коливаються в протифазі. Вище, у відповідності до рис. 16, зарядом конденсатора було позначено заряд обкладинки, похідна якого дорівнює силі струму в контурі $I = \dfrac{dq}{dt}$, коли заряд, який переносить струм, дорівнює швидкості зміни заряду на обкладинці. Якщо зарядом конденсатора вибрати заряд іншої обкладинки, тоді в формулі зв’язку між силою струму і зарядом зміниться знак: $I = -\dfrac{dq}{dt}$. Отже, існує певна невизначенність опису коливань заряду на обкладинках конденсатора, яким може бути обрано заряд однієї з них. Але, насправді, така невизначенність не впливає на характеристики коливального процесу. Дійсно, коли вибрати зарядом конденсатора заряд верхньої обкладинки на рис. 16, то $I=-\dfrac{dq}{dt}$, а при вказаному на цьому рисунку напрямку обходу контуру напруга на конденсаторі також зміниться на протилежну: $U_C=-\dfrac{q}{C}$. Але незважаючи на це, диференціальне рівняння коливань в контурі, як легко перевірити, залишається одним і тим же.

2.2. Вільні згасаючі електромагнітні коливання

До згасання електричних коливань призводить втрата енергії на активному опорі. Для опису згасаючих електричних коливань розглянемо коливальний контур, який додатково до ємності C та індуктивності L містить також омічний опір R (див. рис. 17). Врахуємо, що сума напруги U_C на конденсаторі та напруги U_R на опорі дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці, тобто

$$U_C+U_R=-L\frac{dI}{dt},$$

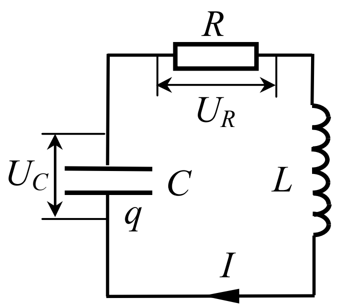

Рис. 17

де враховано, що ЕРС самоіндукції котушки пропорційна швидкості наростання струму $\mathcal{E}_{\tilde{n}^{3}}=-L\dfrac{dI}{dt}$. Обхід контуру, зображеного на рис. 17, здійснимо за годинниковою стрілкою. Напруга на конденсаторі дорівнює $U_C=\dfrac{q}{C}$, а на опорі – $U_R=RI$. З їх урахуванням у попередньому співвідношенні приходимо до рівняння

$$\frac{q}{C}+RI=-L\frac{dI}{dt}.$$

Використаємо в цьому рівнянні співвідношення, яке зв'язує силу струму та заряд $I=\dfrac{dq}{dt}$, і зробимо прості перетворення. Після цього одержимо диференційне рівняння другого порядку:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0.$$

Поділивши його на індуктивність, знову прийдемо до відомого з розгляду механічних коливань диференційного рівняння вільних згасаючих коливань, а саме:

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2 q=0,$$

де, як і вище, $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$ – квадрат власної частоти, $\beta=\dfrac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання.

Аналогічно випадку механічних коливань розв’язок цього диференційного рівняння вільних згасаючих електричних коливань є добутком експоненційної спадаючої функції на гармонічну функцію. Тому залежність величини заряду від часу для вільних згасаючих електричних коливаннях описується виразом

$$q(t)=Q_{\max}e^{-\beta t}\cos(\tilde{\omega}_0 t+\varphi_0),$$

де $\tilde{\omega}_0=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – частота коливань, $Q_{\max}$ – амплітудне значення заряду для початкового моменту часу.

Видно, що амплітуда коливань заряду під час згасаючих коливань зменшується за експоненційним законом

$$Q_{\max}(t)=Q_{\max}e^{-\beta t}.$$

На рис. 18 суцільною кривою показано хід часової залежності заряду коливального контуру, коли початкова фаза $\varphi_0=0$ і коли для t=0 початковий заряд дорівнює його амплітуді $Q_{\max}$.

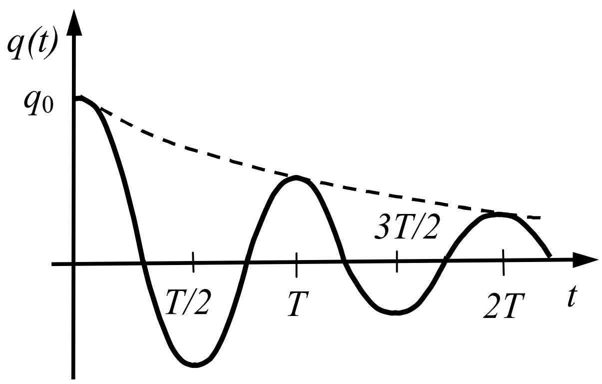

Рис. 18

На рис. 18 пунктирною кривою також зображено часову залежність $Q_{\max}(t)$ амплітудного значення заряду.

Період вільних згасаючих електричних коливань визначається за формулами:

$$\tilde{T}=\frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}=\frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}}}>T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC},$$

де використано позначення для величин ω_0 та β.

З формули для періоду випливає, що існує деякий критичний опір $R_{кр}$, який розділяє границю між коливальним і аперіодичним процесами і який, як легко зрозуміти, визначається рівністю $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. При $R < R_{кр}$ здійснюватимуться вільні згасаючі коливання, а при $R > R_{кр}$ відбуватиметься аперіодичний процес.

За означенням *час релаксації* – це час, за який амплітуда коливань зменшується в *e*-разів. Для коливального електричного контуру час релаксації

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R},$$

де знову використано, що $\beta = \frac{R}{2L}$ – коефіцієнт згасання.

Логарифмічний декремент згасаючих електричних коливань визначається як величина, що обернена до кількості коливань, які відбуваються за час релаксації. Отже, величина логарифмічного дектеременту коливального контуру визначається за формулою, аналогічною випадку механічних коливань, але іншого конкретного виду:

$$\theta = \frac{\tilde{T}}{\tau} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \frac{R}{2L} = \frac{\pi R}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Для випадку слабкого згасання, коли $\beta << \omega_0$, отримуємо, що $\theta \approx \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Щоб охарактеризувати втрати енергії коливальної системи під час згасаючих електричних коливань, користуються поняттям добротності, яке також визначається з відношення

$$Q = \frac{\pi}{\theta}.$$

Якщо підставити до нього величину логарифмічного декременту, то легко знайдемо, що *добротність* електричного контуру має вигляд

$$Q = \frac{L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

і для слабкого ($\beta << \omega_0$) згасання її величина $Q \approx \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Звернемо увагу, що при умові $R > R_{кр}$ величина Q стає уявною; останнє свідчить, що до аперіодичного процесу поняття добротності незастосовне.

2.3. Вимушені електромагнітні коливання

Вимушені електричні коливання відбуваються під дією зовнішньої періодичної ЕРС. Розглянемо контур, який містить ємність *C*, індуктивність *L* та опір *R* (див. рис. 19). Припустимо, що до контуру послідовно підключена зовнішня ЕРС, яка змінюється за гармонічним законом

$$U_{зов}(t) = U_{\max}\cos\omega t,$$

де $U_{\max}$ – амплітудне значення зовнішньої ЕРС.

Сума напруги U_C на конденсаторі та напруги U_R на опорі дорівнює сумі ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці, та зовнішньої ЕРС, тобто

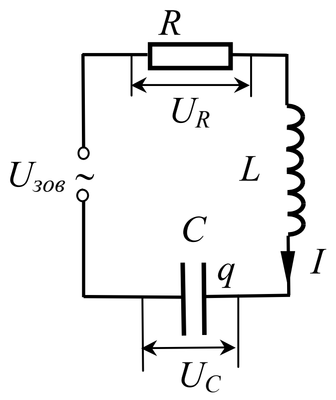

Рис. 19

$$U_C + U_R = -L\frac{dI}{dt} + U_{зов}(t),$$

де враховано, що ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_{сі} = -L\dfrac{dI}{dt}$.

При обході контуру на рис. 18 за годинниковою стрілкою маємо $U_C = \dfrac{q}{C}$, та $U_R = RI$. В результаті, приходимо до рівняння

$$\frac{q}{C} + RI = -L\frac{dI}{dt} + U_{\max}\cos\omega t.$$

Підставимо в це рівняння співвідношення між силою струму та зарядом конденсатора $I = \dfrac{dq}{dt}$ та зробимо прості перетворення. Тоді одержимо неоднорідне диференційне рівняння другого порядку

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_{\max}\cos\omega t.$$

Якщо його поділити на індуктивність, то прийдемо до вже відомого з розгляду вимушених механічних коливань диференційного рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = u_m\cos\omega t,$$

де введено позначення $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$, $2\beta = \dfrac{R}{L}$ та $u_m \equiv \dfrac{U_{max}}{L}$.

Коли час дії періодичної ЕРС значно більший часу релаксації, то в контурі будуть відбуватися так звані *усталені* коливання, які здійснюються за гармонічним законом. Частота усталених вимушених коливань дорівнює частоті зовнішньої ЕРС. Залежність заряду від часу для усталених коливань описуються виразом

$$q(t) = Q_{max}(\omega)\,cos(\omega t - \alpha).$$

Амплітудне значення $Q_{max}(\omega)$ заряду при вимушених коливаннях в контурі пропорційне амплітудному значенню U_{max} зовнішньої ЕРС, а саме:

$$Q_{max}(\omega) = \frac{U_{max}}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

Величина α різниці фаз часових залежностей заряду та зовнішньої ЕРС знаходиться за формулою

$$\alpha = arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\ .$$

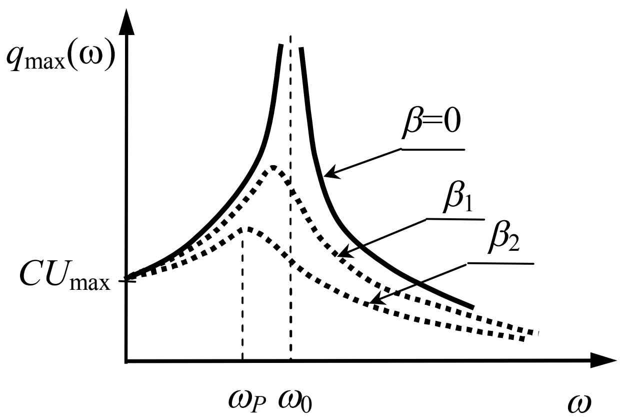

Рис. 20

Хід залежності амплітудного значення заряду від частоти вимушених коливань $Q_{max}(\omega)$ при різних значеннях коефіцієнта згасання ($\beta = 0$, $\beta_1 < \beta_2$) показано на рис. 20.

Частота зовнішньої ЕРС, при якій амплітудне значення заряду буде найбільшим, визначається за формулою

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ .$$

Видно, що значення частоти ω_p, яка є резонансною частотою для коливань заряду в контурі, залежить від опору *R* контуру.

На частоті $\omega = \omega_p$ амплітудне значення заряду має вигляд:

$$Q_{max}(\omega = \omega_p) = \frac{U_{max}}{L\sqrt{(2\beta^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{U_{max}}{2L\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{U_{max}}{2L\beta\tilde{\omega}_0}.$$

Коли $\omega \to 0$, то амплітуда коливань заряду $Q_{max}(\omega = 0) = CU_{max}$, а коли $\omega \to \infty$, ця амплітуда $Q_{max}(\omega \to \infty) \to 0$.

При малому згасанні ($\beta << \omega_0$) вираз для амплітуди коливань заряду при резонансі може бути представлений у формі:

$$Q_{\max}(\omega_p) = \frac{U_{\max}}{R\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \approx \frac{C}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}U_{\max} = CQU_{\max},$$

де $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ – добротність при слабкому згасанні. Оскільки відношення заряду конденсатора до його ємності дорівнює напрузі на ньому, то приходимо до цікавого і досить корисного співвідношення, за яким при умові резонансу відношення амплітудного значення напруги на конденсаторі до амплітудного значення зовнішньої ЕРС дорівнює добротності контуру:

$$\left.\frac{U_{\max}^{(C)}}{U_{\max}}\right|_{\omega=\omega_p} = Q.$$

Сила струму при вимушених коливаннях в контурі описується виразом

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{U_{\max}\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\sin(\omega t - arctg\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}).$$

Бачимо, що амплітудне значення сили струму має не таку, як амплітуда заряду, частотну залежність; дійсно

$$I_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}\omega}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Поділимо чисельник та знаменник цього виразу на частоту ω та внесемо її під знак кореня в знаменнику, що дає

$$I_{\max}(\omega) = \frac{U_{\max}}{L\sqrt{(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega)^2 + 4\beta^2}}.$$

Коли вираз у дужках знаменника стає рівним нулю, амплітудне значення сили струму буде найбільшим. Таким чином, при вимушених коливаннях максимальне значення амплітуди сили струму спостерігається тоді, коли частота зовнішньої ЕРС співпадає з власною частотою коливального контуру, $\omega = \omega_0$. Хід частотної залежності амплітудного значення сили стуму в контурі при усталених вимушених коливаннях показано на рис. 21 при $\beta = 0$ та при $\beta \neq 0$. Залежності $I_{\max}(\omega)$ називають *резонансними кривими електричного контуру*.

При $\omega = \omega_0$ величина амплітуди сили струму в контурі має вигляд

$$I_{max}(\omega = \omega_0) = \frac{U_{max}}{2\beta L} = \frac{U_{max}}{R}.$$

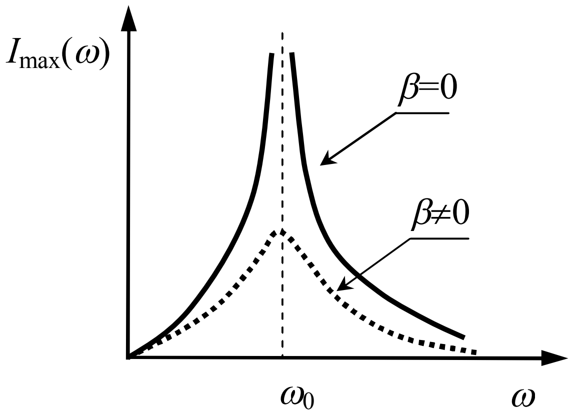

Рис.21

Це означає, що коли частота зовнішньої ЕРС співпадає з власною частотою контуру, то коливання напруги на конденсаторі і коливання ЕРС самоіндукції котушки відбуваються протифазно, причому їх амплітудні значення однакові. Іншою мовою, на частоті $\omega = \omega_0$ сума напруг на конденсаторі та котушці дорівнює нулю, а тому напруга зовнішнього джерела струму падає тільки на опорі *R*.