2.4. Метод векторних діаграм

Для опису коливань інколи використовують так званий *метод векторних діаграм*. Суть цього методу спирається на певну аналогію гармонічного коливального руху з обертальним рухом вектора.

Візьмемо вектор $\vec{A}$, який з постійною кутовою швидкістю обертається навколо осі, що проходить через точку його початку. На рис. 22 вектор $\vec{A}$ обертається навколо осі, яка проходить через точку *O*, що позначає початок вектора $\vec{A}$. Приймемо також, що вісь обертання перпендикулярна до площини рисунку (площини обертання).

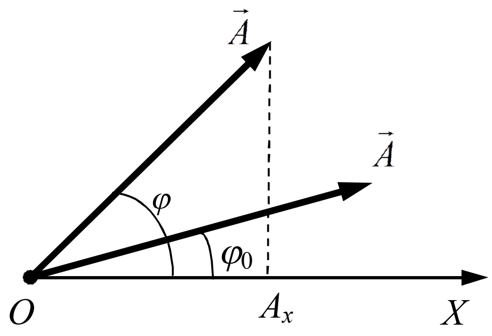

Рис. 22

Положення точок вектора характеризується кутом φ, який є кутом між вектором $\vec{A}$ та віссю *X*. Якщо початковому моменту часу t=0 відповідає деякий кут φ_0, то при обертанні з постійною кутовою швидкістю ω маємо, що кут φ залежить від часу лінійно:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 .$$

Коли початок системи відліку співпадає з початком вектора $\vec{A}$ (з точкою *O*), то проекція вектора $\vec{A}$ на вісь *X* описується виразом

$$A_x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,,$$

де $A = \left|\vec{A}\right|$ – модуль вектора.

Як бачимо часова залежність проекції вектора при його обертальному русі подібна до часової залежності зміщення коливальної системи чи до часової залежності величини заряду при електричних коливаннях в коливальному контурі. Така аналогія дозволяє суттєво спростити знаходження амплітуди та фази коливань, при, наприклад, складанні двох незалежних коливань, які можуть відбуватися в однаковому напрямку і мають однакові частоти, або при аналізі змінного струму в електричних колах, тощо.

2.5. Складання двох гармонічних коливань однакового напрямку та однакової частоти

Використаємо метод векторних діаграм для визначення характеристик результуючого коливання, яке виникає при складанні двох незалежних коливань. Накладатися можуть періодичні напруги чи змінні струми, напруженості електричних полів і таке інше. Зауважимо, що напруги та сили струмів є скалярними величинами, напруженості електричного поля – векторами. Проте результат складання періодичних векторних полів не залежить від їх напрямку, якщо коливання векторів здійснюються в однаковому напрямку.

Нехай в деякій точці простору накладаються два електричні поля, вектори напруженостей яких лежать вздовж однієї осі, яку позначимо *Z*. Коливання напруженостей обох полів відбуваються з однаковою частотою.

Крім того, припустимо, що коливання напруженостей обох полів є гармонічними, а проекції векторів напруженості полів на вісь *Z* описуються виразами

$$E_1 = E_{\max}^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(1)}),$$

$$E_2 = E_{\max}^{(2)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(2)}),$$

відповідно.

Нехай також, амплітудні значення проекцій напруженості полів різні і їх початкові фази є різними: $E_{\max}^{(1)} \neq E_{\max}^{(2)}$, $\varphi_0^{(1)} \neq \varphi_0^{(2)}$.

Для електричних полів виконується принцип суперпозиції, тому проекція напруженості результуючого поля дорівнює сумі проекцій напруженостей обох полів

$$E = E_1 + E_2 = E_{\max}^{(1)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(1)}) + E_{\max}^{(2)} \cos(\omega t + \varphi_0^{(2)}).$$

Очевидно, що коливання результуючого поля будуть відбуватися з частотою ω і будуть описуватися виразом

$$E = E_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

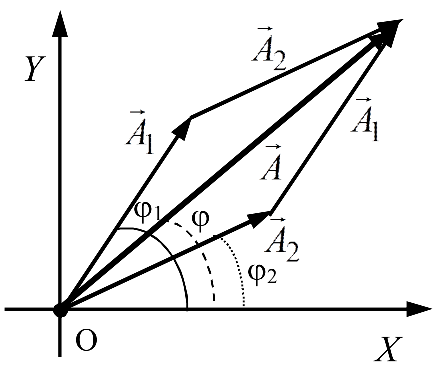

Рис. 23

Для розрахунку амплітуди $E_{\max}$, а також для знаходження початкової фази φ_0 результуючого коливання застосуємо метод векторних діаграм.

Поставимо у відповідність першому коливанню вектор $\vec{A}_1$, який обертається з частотою ω, а другому полю вектор $\vec{A}_2$, який обертається з цією самою частотою (рис. 23). Модулі цих векторів дорівнюють амплітудним значенням напруженостей полів $\left|\vec{A}_1\right| = E_{\max}^{(1)}$, $\left|\vec{A}_2\right| = E_{\max}^{(2)}$. Кути початкової (для $t = 0$) орієнтації векторів $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$ дорівнюють значенням початкових фаз $\varphi_0^{(1)}$, $\varphi_0^{(2)}$ коливань E_1 та E_2. Часові залежність кутів повороту векторів $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$

відповідають фазам обох коливань $\varphi_1 = \omega t + \varphi_0^{(1)}$, $\varphi_2 = \omega t + \varphi_0^{(2)}$. На рис. 23 показане взаємне розташування цих векторів $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ для довільного моменту часу t. Оскільки обидва вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю, то кут між ними не змінюється з часом.

Результуючий вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ також обертається з кутовою швидкістю ω, причому його кут з віссю *X* становить $\varphi = \omega t + \varphi_0$, який є фазою результуючого коливання. Модуль $\vec{A}$ не змінюється з часом і є амплітудою результуючого коливання. Таким чином, обертанню вектора $\vec{A}$ ставиться у відповідність результуюче коливання, яке отримане внаслідок векторного складання двох коливань і яке відбувається з частотою ω.

За теоремою косинусів модуль вектора $\vec{A}$ визначається формулою:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{\left|\vec{A}_1\right|^2 + \left|\vec{A}_2\right|^2 + 2\left|\vec{A}_1\right|\left|\vec{A}_2\right|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\,.$$

Нами було прийнято, що модулі векторів дорівнюють амплітудним значенням коливань напруженостей полів. Різниця кутів не залежить від часу: $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)}$. Отже, у відповідності до попередньої формули знаходимо амплітуду результуючого коливання

$$E_{\max} = \sqrt{(E_{\max}^{(1)})^2 + (E_{\max}^{(2)})^2 + 2E_{\max}^{(1)}E_{\max}^{(2)}\cos(\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)})}\,.$$

Початкова фаза φ_0 результуючого коливання дорівнює куту орієнтації вектора $\vec{A}$ для моменту часу *t*=0. З рис. 23 видно, що $tg\varphi_0 = \dfrac{A_y}{A_x}$, де A_x та A_y – проекції вектора $\vec{A}$ на осі *X* та *Y*. В результаті, знаходимо, що початкова фаза результуючого коливання задовольняє рівності

$$tg\varphi_0 = \frac{E_{\max}^{(1)}\sin\varphi_0^{(1)} + E_{\max}^{(2)}\sin\varphi_0^{(2)}}{E_{\max}^{(1)}\cos\varphi_0^{(1)} + E_{\max}^{(2)}\cos\varphi_0^{(2)}}\,.$$

Розглянемо декілька найпростіших випадків.

1) Різниця фаз між коливаннями полів E_1 та E_2 кратна 2π, тобто $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = 2\pi n$, де n – ціле число. Тоді обидві напруженості коливаються синфазно, а амплітуда результуючого коливання максимально з можливих:

$$E_{\max} = E_{\max}^{(1)} + E_{\max}^{(2)}\,.$$

2) Різниця фаз між коливаннями дорівнює куту, що є непарним до значення π, або $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = \pi(2n+1)$, де n – ціле число. Тоді коливання напруженостей полів E_1 та E_2 відбуваються протифзно, а тому амплітуда результуючого коливання буде найменшою з можливих:

$$E_{max} = \left| E_{max}^{(1)} - E_{max}^{(2)} \right|.$$

3) Коли ж різниця фаз коливань напруженостей E_1 та E_2 зсунута на $\dfrac{\pi}{2}$, тобто $\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)} = 2\pi n \pm \dfrac{\pi}{2}$, амплітуда результуючого коливання визначається за теоремою Піфагора, як гіпотенуза прямокутного трикутника:

$$E_{max} = \sqrt{(E_{max}^{(1)})^2 + (E_{max}^{(2)})^2}\ .$$

Застосуємо тепер метод векторних діаграм для розрахунку результуючого коливання при складанні декількох коливань, які відбуваються в одному напрямку і початкові фази яких утворюють арифметичну прогресію:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)\,,\ \ x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0 + \delta)\,,\ x_3(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0 + 2\delta)\,, ...$$

$$x_N(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0 + (N-1)\delta)\,,$$

де N – кількість коливань. Ці N – коливань мають однакову частоту ω і однакову амплітуду A. Фаза коливань відрізняється на величину δ і послідовно зростає на δ при збільшенні номера коливання.

Згідно з методом векторних діаграм кожному з цих коливань відповідає вектор $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, ... $\vec{A}_j$ ... $\vec{A}_N$. Модулі векторів за припущенням однакові $\left|\vec{A}_1\right| = \left|\vec{A}_2\right| = ...\left|\vec{A}_N\right| = A$, тому амплітуда A_P результуючого коливання знаходиться як сума: $\vec{A}_P = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + ... + \vec{A}_N$.

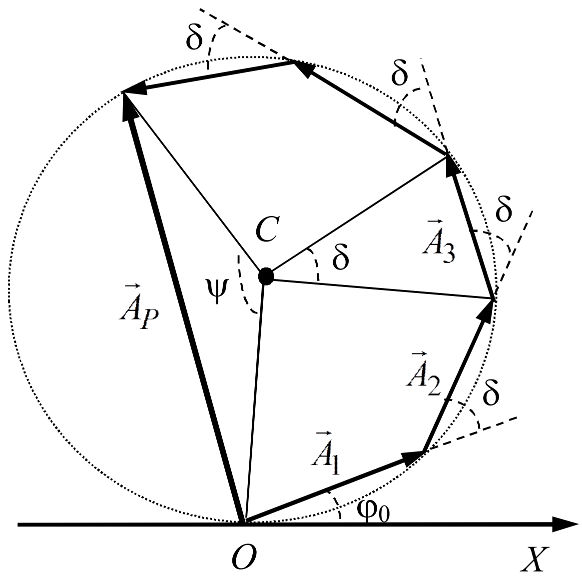

Рис. 24

Як видно з рис. 24, при геометричному додаванні цих векторів їх початки та кінці лежать на колі з центром в точці C (на рис. 24 положення цих векторів і кути між ними відповідають моменту часу t=0).

З геометричної побудови маємо, що кут φ_P, на який спирається вектор результуючого коливання, є $\varphi_P = 2\pi - N\delta$.

Таким чином, амплітуда результуючого коливання може бути розрахована точно:

$$A_P = \left|\vec{A}_P\right| = 2|OC|\sin\frac{\varphi_P}{2} = 2|OC|\sin\frac{2\pi - N\delta}{2} = 2|OC|\sin\frac{N\delta}{2}.$$

Врахуємо, що $\left|OC\right|$ є радіусом кола на рис. 24, який також легко знаходиться:

$$\left|OC\right| = \frac{\left|\vec{A}_j\right|}{2\sin\frac{\delta}{2}} = \frac{A}{2\sin\frac{\delta}{2}}.$$

В результаті отримуємо, що амплітуда результуючого коливання при накладанні коливань, фази яких утворюють арифметичну прогресію, визначається за формулою

$$A_P = A\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Це співвідношення відоме фахівцям і використовується, зокрема, в оптиці при описі багатопроменевої інтерференції.

2.6. Змінний струм

Струм в електричних колах, який виникає під дією зовнішньої періодичної ЕРС, називають *змінним* струмом.

Зовнішню періодичну в часі ЕРС можна отримати за допомогою генераторів змінного струму. Найпростіший генератор змінного струму складається з рамки, що має площу S. На неї намотано N витків і вона обертається з постійною кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі з вектором індукції $\vec{B}$ (див. рис. 25).

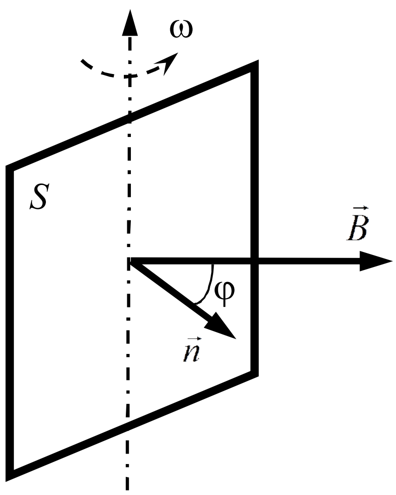

Рис. 25

ЕРС індукції, яка виникає в рамці, визначається за законом Фарадея

$$U_{зов} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

де Ψ – магнітний потік, який пронизує рамку. Він розраховується за формулою $\Psi = N\Phi$, в якій Φ – магнітний потік через поверхню, натягнуту на рамку з одним витком. Величина $\Phi = BS\cos\varphi$, де φ – кут повороту між вектором $\vec{n}$ нормалі до цієї поверхні і вектором індукції магнітного поля $\vec{B}$, модуль якого $B = \left|\vec{B}\right|$. При рівномірному обертанні рамки кут повороту φ

лінійно залежить від кутової швидкості $\varphi(t)=\omega t+\varphi_0$, де φ_0 визначає початкову $(t=0)$ орієнтацію рамки.

Таким чином, приходимо до висновку, що величина $U_{зов}$ ЕРС, яка утворюється в рамці при його рівномірному обертанні в однорідному магнітному полі, змінюється з часом за гармонічним законом:

$$U_{зов}(t)=-N\frac{dBS\cos(\omega t+\varphi_0)}{dt}=NBS\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=U_{\max}\sin(\omega t+\varphi_0),$$

де $U_{\max}=NBS\omega$ – амплітудне значення ЕРС генератора.

Початкову орієнтацію рамки (насправді, мова йде про початковий момент часу $t=0$, який може бути довільним) зручно вибрати так, щоб $\varphi_0=\pi/2$. Тоді ЕРС генератора описуватиметься виразом

$$U_{зов}(t)=U_{\max}\cos\omega t.$$

Частота коливань ЕРС генератора співпадає з частотою обертання рамки.

Коли генератор підключається до електричного кола, то ЕРС генератора слугує зовнішньою напругою. В результаті, під дією зовнішньої періодичної ЕРС в колі виникає змінний струм з частотою цієї ЕРС. Часову залежність змінного струму можна записати у вигляді

$$I(t)=I_{\max}\cos(\omega t-\varphi_{зс}),$$

де $I_{\max}$– амплітудне значення сили струму в колі, а $\varphi_{зс}$ позначає зсув (різницю) фаз між коливанням зовнішньої напруги та коливанням сили струму. Основною задачею теорії електричних кіл є розрахунок $I_{\max}$ та $\varphi_{зс}$.

2.7. Активний опір

Розглянемо опір *R*, який підключено до генератора змінного струму, ЕРС якого змінюється за законом,

$$U_{зов}(t)=U_{\max}\cos\omega t,$$

де $U_{\max}$ – амплітуда напруги, а ω – її частота.

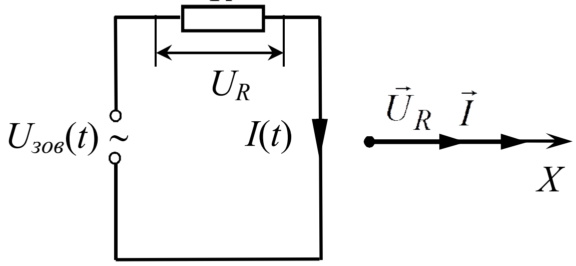

Рис. 26

Коли до генератора змінного струму підключити опір, як це показано на рис. 26, то напруга на опорі дорівнює ЕРС генератора

$$U_R=U_{зов}.$$

Для квазістаціонарних процесів миттєві значення сили струму та напруги задовольняють закону Ома

$$U_R=IR.$$

З урахуванням виписаних співвідношень отримуємо, що сила змінного струму набуває вигляду

$$I(t)=\frac{U_{\max}}{R}\cos\omega t=I_{\max}\cos\omega t,$$

де $I_{\max}=\dfrac{U_{\max}}{R}$ – амплітудне значення сили струму, яке визначається через амплітудне значення напруги та опір.

Фази коливань сили струму та коливань напруги на опорі однакові, тобто $\varphi_{зс}=0$. На векторній діаграмі, яка зображена на рис. 26, вектори $\vec{U}_R$ та $\vec{I}$, які відповідають коливанням напруги та сили струму на опорі, виявляються паралельними векторами.

Електричний струм при проходженні через опір R виконує роботу, тому такі опори називають *активними*. Для квазістаціонарних процесів миттєва потужність роботи струму визначається за формулою

$$P=IU_R.$$

З неї знаходимо, що миттєве значення потужності змінного струму визначається виразами

$$P=I_{\max}^2R\cos^2\omega t,\quad \text{або}\quad P=\frac{(U_{\max}^{(R)})^2}{R}\cos^2\omega t,$$

де $U_{\max}^{(R)}$ – амплітудне значення напруги на провіднику: $U_{\max}^{(R)}=RI_{\max}$.

Як правило, проходження струму відбувається на проміжках часу набагато більших періоду коливань, тому інтерес представляє розрахунок середнього значення потужності.

Середнє значення $\cos^2\omega t$ за час набагато більший періоду (або середнє за час, рівний одному періоду) обраховується просто, так що $\left\langle\cos^2\omega t\right\rangle=\dfrac{1}{2}$. Використовуючи це значення, знаходимо, що середнє значення потужності змінного струму на опорі R дорівнює

$$\left\langle P\right\rangle=\frac{I_{\max}^2R}{2}=\frac{(U_{\max}^{(R)})^2}{2R}.$$

Введемо поняття діючих значень сили струму та напруги. *Діючим* називають таке значення постійної сили струму (або напруги), який за час одного періоду виконує таку саму роботу, що і змінний струм. При такому введенні діючих значень сили струму I_∂ та напруги U_∂ потужність кола буде визначатися за формулами:

$$P=I_\partial^2R,\quad \text{або}\quad P=\frac{U_\partial^2}{R}.$$

Порівнюючи ці вирази з виразами для середньої потужності, знаходимо, що діючі значення сили струму та напруги в $\sqrt{2}$ разів менші їх амплітудних значень:

$$I_\partial = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \qquad U_\partial = \frac{U_{\max}^{(R)}}{\sqrt{2}}.$$

Наприклад, значення напруги 220 В в міських електричних мережах є діючим. Відповідно, амплітудне значення напруги в міських мережах в $\sqrt{2}$ разів більше. При цьому більшість електроприладів – амперметрів та вольтметрів – вимірюють діючі значення сили струму або напруги.

2.8. Ємнісний опір

Розглянемо конденсатор з ємністю C, що підключений до генератора змінного струму (див. рис. 27), ЕРС якого змінюється за законом косинуса

$$U_{зов}(t) = U_{\max}\cos\omega t,$$

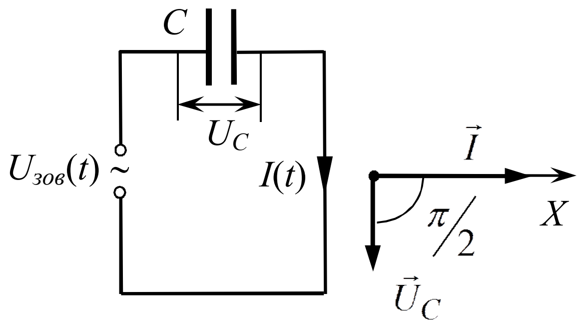

Рис. 27

де $U_{\max}$ – амплітудне значення ЕРС генератора, а ω – її частота.

При підключенні ємності до генератора змінного струму напруга на ємності дорівнює ЕРС генератора

$$U_C = U_{зов}.$$

Врахуємо, що для квазістаціонарних процесів миттєве значення напруги на конденсаторі пропорційне миттєвому значенню заряду конденсатора

$$U_C = \frac{q}{C}.$$

Виходячи з цих співвідношень знаходимо, що миттєве значення заряду конденсатора описується виразом

$$q(t) = CU_{\max}\cos\omega t.$$

Продиференціюємо цей вираз та знайдемо силу струму

$$I(t) = -\omega C U_{\max}\sin\omega t,$$

що тече через конденсатор.

Отриманий вираз для сили струму можна переписати у спосіб

$$I(t) = I_{\max}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

де $I_{\max}$ – амплітуда сили струму, величина якої визначається за формулою

$$I_{\max} = \omega C U_{\max}.$$

Коефіцієнт пропорційності між амплітудним значенням сили струму та амплітудним значенням напруги на конденсаторі обернено пропорційний *ємнісному* опору X_C, який визначається за формулою

$$X_C = \frac{1}{\omega C}.$$

Отже, при проходженні через конденсатор змінного стругу амплітудне значення сили струму на конденсаторі прямо пропорційне амплітудному значенню напруги на конденсаторі і обернено пропорційне ємнісному опору, або

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_C}.$$

Зауважимо, що така пропорційність виконується тільки для амплітудних значень, бо коливання сили струму на конденсаторі зсунуті по фазі відносно коливань напруги на величину $\varphi_{зс} = -\frac{\pi}{2}$, внаслідок чого напрямок вектора сили струму $\vec{I}$ на векторній діаграмі перпендикулярний до вектора напруги $\vec{U}_C$ (див. рис. 27), причому вектор сили струму випереджає вектор напруги.

Запишемо вираз для миттєвої потужності:

$$P = IU_C.$$

Підставимо в нього миттєві значення сили струму та напруги. Така підстановка демонструє, що миттєва потужність змінюється за законом синуса з вдвічі більшою частотою

$$P = I_{\max}^2 X_C \cos\omega t \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -I_{\max}^2 X_C \cos\omega t \sin\omega t = -\frac{1}{2} I_{\max}^2 X_C \sin 2\omega t.$$

Середнє значення синусу за час, кратний періоду, дорівнює нулеві. Тому при проходженні змінного струму через конденсатор середнє значення потужності за час, значно більший одного періоду, також дорівнюватиме нулю, $\langle P \rangle = 0$. Іншими словами, при проходженні змінного струму через конденсатор електрична енергія не виділяється і не втрачається.

2.9. Індуктивний опір

Розглянемо котушку з індуктивністю *L*, яку підключено до генератора змінного ступу (див. рис. 28) з ЕРС, яка змінюється за законом

$$U_{зов}(t) = U_{\max} \cos\omega t,$$

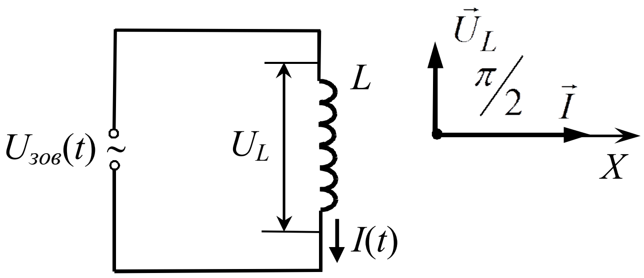

Рис. 28

де $U_{\max}$ – амплітудне значення ЕРС, а ω – її частота.

Тепер напруга на котушці дорівнює ЕРС генератора

$$U_L = U_{зов}.$$

Активний опір ідеальної котушки дорівнює нулю. Тому сума напруги на котушці та ЕРС самоіндукції, що виникає в ній при проходженні змінного струму, дорівнює нулю, або

$$U_L + E_{ci} = 0.$$

За відсутності такої компенсації струм в ідеальній котушці з $R = 0$ сягав би нескінченності.

Величина ЕРС самоіндукції пропорційна похідній силі струму

$$\mathcal{E}_{\tilde{n}^{3}} = -L\frac{dI}{dt}.$$

В результаті, комбінуючи виписані вирази, приходимо до співвідношення

$$\frac{dI}{dt} = \frac{U_{\max}}{L}\cos\omega t.$$

Шляхом прямого інтегрування цього рівняння знаходимо шукану залежність для сили струму, а саме:

$$I(t) = \frac{U_{\max}}{\omega L}\sin\omega t.$$

Цей вираз для сили струму можна переписати у вигляді

$$I(t) = I_{\max}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

де $I_{\max}$ – амплітудне значення сили струму, величина якого визначається за формулою

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L}.$$

Проходження змінного струму котушкою прийнято описувати за допомогою *індуктивного* опору X_L, який визначають за формулою

$$X_L = \omega L.$$

Амплітудне значення сили струму в котушці прямо пропорційне амплітудному значенню напруги на ній і обернено пропорційне її індуктивному опору

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{X_L}.$$

Зауважимо, що така пропорційність виконується тільки для амплітудних значень. Коливання сили струму в котушці також зсунуті по фазі відносно коливань напруги на ній, але тепер $\varphi_{зс} = \frac{\pi}{2}$, внаслідок чого, напрямок вектора сили струму $\vec{I}$ на векторній діаграмі перпендикулярний до напрямку вектора напруги $\vec{U}_L$ (див. рис. 28), і вектор сили струму в даному випадку індуктивного опору відстає від вектора напруги.

Запишемо вираз для миттєвої потужності

$$P = IU_L.$$

Підставимо в цей вираз миттєві значення сили струму та напруги. Знайдемо, що миттєва потужність і тут змінюється за законом синуса з вдвічі більшою частотою

$$P = I_{\max}^2 X_L \cos\omega t \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_{\max}^2 X_L \cos\omega t \sin\omega t = \frac{1}{2} I_{\max}^2 X_L \sin 2\omega t.$$

Застосуємо ті ж міркування, що і для ємнісного опору: середнє значення синусу за час одного періоду дорівнює нулю. А отже, при проходженні змінного струму через котушку індуктивності середнє значення потужності струму за час, значно більший одного періоду, також зникає, тобто $\langle P \rangle = 0$. Це означає, що при проходженні змінного струму через ідеальну котушку електрична енергія, як і у випадку ємнісного опору, не виділяється.

2.10. Закон Ома для кола зі змінним струмом

Розглянемо електричне коло, яке вміщує активний опір R конденсатор ємністю C та котушку з індуктивністю L, коли ці елементи з'єднані послідовно (рис. 29) і до них підключено генератор змінного струму з ЕРС, яка змінюється за законом синуса

$$U_{зов}(t) = U_{\max}\cos\omega t,$$

де $U_{\max}$ – амплітуда напруги, а ω – її частота.

В колі під дією зовнішньої ЕРС виникає змінний струм з частотою напруги генератора

$$I(t) = I_{\max}\cos(\omega t - \varphi_{зс}),$$

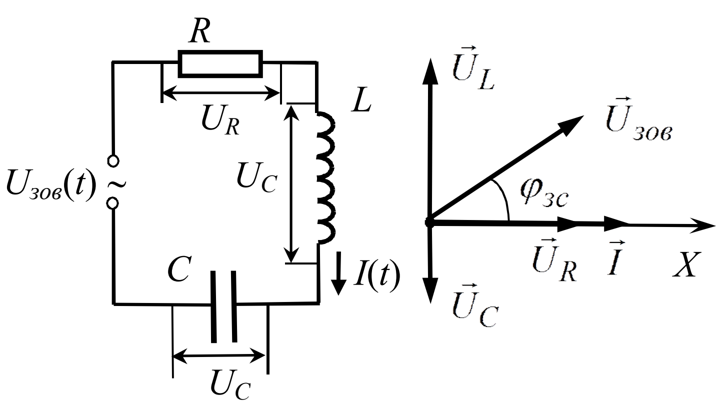

Рис. 29

де $I_{\max}$ – амплітудне значення сили струму в колі, а $\varphi_{зс}$ – зсув фаз між коливанням зовнішньої ЕРС та коливанням сили струму. Для розрахунку $I_{\max}$ та $\varphi_{зс}$ зручно використати метод векторних діаграм.

1. В колі з послідовним з'єднанням опору, ємності та індуктивності напруга на генераторі дорівнює сумі напруг на ділянках кола

$$U_{зов} = U_R + U_L + U_C .$$

Інакше, коливання напруги на генераторі дорівнює сумі коливань на ділянках кола.

Поставимо у відповідність коливанням напруг $U_{зов}$, U_R, U_L та U_C вектори $\vec{U}_{зов}$, $\vec{U}_R$, $\vec{U}_L$ та $\vec{U}_C$. На діаграмі, яку наведено на рис. 29, враховано, що коливання напруги на опорі *R* мають однакову фазу з коливаннями струму, а тому вектори $\vec{U}_R$ та $\vec{I}$ паралельні. Коливання напруги на ємності відстають по фазі на $\frac{\pi}{2}$ коливання сили струму, тому вектор $\vec{U}_C$ направлений перпендикулярно до вектора $\vec{I}$. Коливання ж напруги на індуктивності випереджають по фазі на $\frac{\pi}{2}$ коливання сили струму, тому вектор $\vec{U}_L$ теж перпендикулярний до вектора $\vec{I}$ і направлений протилежно до вектора $\vec{U}_C$.

Всі напруги зв'язані векторною рівністю

$$\vec{U}_{зов} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C .$$

Що стосується модулів цих векторів, то з наведеної на рис. 29 діаграми випливає, що для них справедливе співвідношення

$$\left|\vec{U}_{зов}\right| = \sqrt{\left|\vec{U}_R\right|^2 + (\left|\vec{U}_L\right| - \left|\vec{U}_C\right|)^2} .$$

Згідно методу векторних діаграм модулі векторів визначаються амплітудами коливань, тому $\left|\vec{U}_{зов}\right| = U_{\max}$, $\left|\vec{U}_R\right| = U_{\max}^{(R)}$, $\left|\vec{U}_C\right| = U_{\max}^{(C)}$ і $\left|\vec{U}_L\right| = U_{\max}^{(L)}$. З урахуванням цих означень маємо, що амплітуди коливань напруги задовольняють умові

$$U_{\max} = \sqrt{(U_{\max}^{(R)})^2 + (U_{\max}^{(L)} - U_{\max}^{(C)})^2} .$$

Для кожної з ділянок кола амплітудні значення напруги пропорційні амплітудному значенню сили струму:

$$U_{\max}^{(R)} = RI_{\max}, \qquad U_{\max}^{(C)} = \frac{I_{\max}}{\omega C}, \qquad U_{\max}^{(L)} = \omega L I_{\max} .$$

Завдяки цим рівностям приходимо до формули

$$U_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\ .$$

Перепишемо її у вигляді

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \equiv \frac{U_{\max}}{Z_{noc}}\,,$$

де Z_{noc} називають *повним* опором електричного кола, при послідовному з'єднанні елементів, а саме:

$$Z_{noc} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\ .$$

Використовуючи раніше введені означення для опорів різної природи, вираз для повного опору у послідовному ланцюгу можна переписати інакше:

$$Z_{noc} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \equiv \sqrt{R^2 + X^2}\ ,$$

де різниця $X \equiv X_L - X_C$ називається *реактивним* опором.

Бачимо, що повний опір Z_{noc} цього кола мінімальний, коли $X \equiv 0$, або, що теж саме, частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою кола $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. На цій частоті не тільки пропадає реактивний опір кола, а й амплітудне значення сили струму максимальне.

Розрахуємо величину напруг на конденсаторі та індуктивності на резонансній частоті; маємо:

$$U_{\max}^{(C)}(\omega = \omega_0) = I_{\max}(\omega = \omega_0)X_C(\omega = \omega_0) = \frac{U_{\max}}{R\omega_0 C} = \frac{U_{\max}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx QU_{\max}\,,$$

$$U_{\max}^{(L)}\ (\omega = \omega_0) = I_{\max}(\omega = \omega_0)X_L(\omega = \omega_0) = \frac{U_{\max}\omega_0 L}{R} = \frac{U_{\max}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx QU_{\max}\,.$$

Здійснений в цих виразах перехід до формул з використанням добротності Q виправданий лише тільки при малому згасанні, що відповідає нерівності $\beta << \omega_0$.

Отже, на частоті $\omega = \omega_0$ амплітудні значення коливань напруг на ємності та індуктивності однакові – $U_{\max}^{(C)}(\omega = \omega_0) = U_{\max}^{(L)}(\omega = \omega_0)$, а на векторній діаграмі сума векторів $\vec{U}_L + \vec{U}_C = 0$. Вимушені коливання в контурі з послідовним з'єднанням ємності, індуктивності та опору, які відбуваються на власній частоті контуру, називають *резонансом напруг*.

З наведеної на рис. 29 діаграми випливає, що зсув фази між коливанням сили струму та ЕРС генератора для довільної частоти визначається з виразу

$$tg\varphi_{зс} = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

З цього співвідношення легко отримати, що

$$tg\varphi_{зс} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$$

Видно, що в колі з послідовним з'єднанням різних елементів тангенс зсуву фаз між силою струму і ЕРС генератора визначається відношенням величини реактивного опору до величини активного опору. На власній частоті $\omega = \omega_0$, коли $X_L - X_C$=0, зсуву фаз між коливаннями сили струму та зовнішньої ЕРС не буде, $\varphi_{зс} = 0$.

2. Розглянемо тепер випадок паралельного підключення опору *R*, ємності *C* та індуктивності *L* до зовнішньої періодичної ЕРС, як це показано на рис. 30.

Розрахуємо амплітудне значення сили струму, що тече цим колом, та зсув фаз між змінним струмом та зовнішньою напругою.

При паралельному з'єднанні елементів кола, напруга на них буде однаковою $U_{зов}$=U_R=U_L=U_C, проте величина повної сили струму визначається сумою сил струмів

$$I = I_R + I_L + I_C.$$

Таким чином, коливання сили струму кола є сумою коливань сил струмів на ділянках кола.

Знову поставимо у відповідність коливанням сил струмів I, I_R, I_L та I_C вектори $\vec{I}$, $\vec{I}_R$, $\vec{I}_L$ та $\vec{I}_C$. На діаграмі, яку наведено на рис. 30, враховано, що коливання струму на опорі *R* мають однакову фазу з коливаннями напруги на ньому, а тому вектори $\vec{U}_{зов}$ та $\vec{I}$ будуть паралельними. Коливання струму на ємності випереджають коливання напруги на ній, тобто їх фази відрізняються на $\frac{\pi}{2}$, тому вектор $\vec{I}_C$ є перпендикулярним до вектора $\vec{U}_{зов}$. Коливання ж струму на індуктивності відстають по фазі на $\frac{\pi}{2}$ від коливань напруги на ній, тому вектор $\vec{I}_L$ направлений протилежно до вектора $\vec{I}_C$.

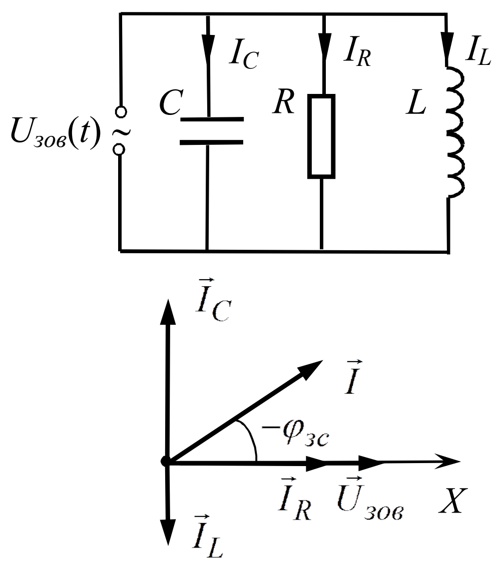

Рис.30

З наведеної на рис. 30 діаграми випливає, що для модулів векторів сил струмів виконується співвідношення

$$\left|\vec{I}\right| = \sqrt{\left|\vec{I}_R\right|^2 + (\left|\vec{I}_C\right| - \left|\vec{I}_L\right|)^2}\ .$$

Модулі векторів визначаються амплітудами коливань сил струмів: $\left|\vec{I}\right| = I_{\max}$, $\left|\vec{I}_R\right| = I_{\max}^{(R)}$, $\left|\vec{I}_C\right| = I_{\max}^{(C)}$, $\left|\vec{I}_L\right| = I_{\max}^{(L)}$. З урахуванням цих рівностей амплітуди коливань сил струмів задовольняють співвідношенню

$$I_{\max} = \sqrt{(I_{\max}^{(R)})^2 + (I_{\max}^{(L)} - I_{\max}^{(C)})^2}\ .$$

Амплітудні значення сил струмів на кожній ділянці кола прямо пропорційні амплітудному значенню напруги на них, або

$$I_{\max}^{(R)} = \frac{U_{\max}}{R},\ I_{\max}^{(C)} = \omega C U_{\max},\ I_{\max}^{(L)} = \frac{U_{\max}}{\omega L}.$$

Звідси знаходимо шукану амплітуду, так що

$$I_{\max} = U_{\max}\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}\ .$$

Аналогічно випадку послідовного з'єднання елементів перепишемо цей вираз у спосіб:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_{пар}},$$

де $Z_{пар}$ – повний опір кола при паралельному з'єднанні його елементів. Величина цього повного опору, як легко бачити, визначається за формулою

$$\frac{1}{Z_{пар}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{Z_{пар}} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C})^2}\ .$$

З неї випливає, що повний опір $Z_{пар}$ є максимальним за тієї ж умови, а саме: частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою кола $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

З наведеної на рис. 30 діаграми видно, що зсув фаз між коливаннями сили струму довільної частоти в колі з паралельним з'єднанням елементів можна визначити з виразу

$$tg\varphi_{зс} = \frac{I_L - I_C}{I_R} \equiv R(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}).$$

З цього співвідношення прямо знаходимо, що

$$tg\varphi_{зс} = R(\frac{1}{\omega L} - \omega C).$$

Припустимо, що у кола з паралельним з'єднанням елементів активний опір прямує до нескінченності, тобто $R \to \infty$. В цьому випадку з схеми на рис. 30 опір R можна вилучити. Іншими словами, розглянемо коло, в якому ємність та котушка підключені паралельно до генератора змінного струму. Як видно, для такого підключення амплітудне значення сили струму буде визначатися за формулою

$$I_{\max} = (\frac{1}{\omega L} - \omega C) U_{\max}.$$

Якщо частота зовнішньої напруги співпадає з власною частотою $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, при якій $\frac{1}{\omega L} - \omega C = 0$, то струм (повний струм) в колі зникає, або $I_{\max}(\omega = \omega_0) = 0$, незважаючи, на те що $U_{\max} \neq 0$. Справа в тому, що на цій частоті коливання сил струмів на ємності та індуктивності відбуваються точно в протифазі. Хоча амплітуди цих струмів однакові і скінчені, з векторної діаграми видно, що $\vec{I}_L + \vec{I}_C = 0$. За таких умов струм, що тече через ємність, повністю компенсує струм, що тече через індуктивність. Подібні вимушені коливання в електричному контурі при паралельному підключенні до нього змінної напруги, частота якої співпадає з власною частотою контуру, називають *резонансом струмів*.

2.11. Коефіцієнт потужності

Розрахуємо потужність, яку споживає електричне коло, при проходженні змінного струму. Нехай до кола підключено змінну напругу

$$U_{зов}(t) = U_{\max} \cos \omega t,$$

де $U_{\max}$ – амплітудне значення змінної напруги, а ω – її частота. Ця напруга визиває в колі змінний струм, який коливається з частотою змінної напруги:

$$I(t) = I_{\max} \cos(\omega t - \varphi_{зс}),$$

де $I_{\max}$ – амплітудне значення сили струму в колі, а $\varphi_{зс}$ – зсув фаз між коливанням зовнішньої напруги та коливанням сили струму.

Струм виконує роботу, миттєве значення потужності якої

$$P = IU_{зов} = I_{\max} U_{\max} \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi_{зс}).$$

Як правило, електроприлади, які використовуються у техніці при вимірюванні потужності, реєструють її середнє значення. При розрахунку середньої потужності зробимо деякі перетворення:

$$\langle P \rangle = I_{\max} U_{\max} \langle \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi_{зс}) \rangle =$$

$$= I_{\max} U_{\max} (\cos \varphi_{зс} \langle \cos^2 \omega t \rangle + \sin \varphi_{зс} \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle).$$

Врахуємо, що за час значно більший періоду коливань середнє $\left\langle \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2}$, а середнє $\left\langle \cos\omega t \sin\omega t \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sin 2\omega t \right\rangle = 0$.

Таким чином, середнє значення потужності в колі зі змінним струмом визначається співвідношенням

$$\left\langle P \right\rangle = \frac{1}{2} I_{\max} U_{\max} \cos\varphi_{зс}.$$

Для кола з послідовно з'єднаними опором, ємністю та індуктивністю, векторна діаграма якого наведена на рис. 28, амплітудне значення напруги на опорі $U_{\max}^{(R)} = U_{\max} \cos\varphi_{зс}$, тому для такого кола середня потужність дорівнює

$$\left\langle P \right\rangle = \frac{1}{2} I_{\max} U_{\max}^{(R)} = \frac{1}{2} I_{\max}^2 R.$$

Запишемо вираз для середньої потужності з використанням не амплітудних, а діючих значень сили струму і напруги $I_д = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$, $U_д = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$. Тоді прийдемо до висновку, що середнє значення потужності змінного струму визначається за формулою

$$\left\langle P \right\rangle = I_д U_д \cos\varphi_{зс}.$$

Величину $\cos\varphi_{зс}$, яка входить у вираз для середньої потужності, називають *коефіцієнтом потужності*.

Для кола з послідовним з'єднанням опору, ємності та індуктивності величина коефіцієнта потужності дорівнює відношенню активного опору до повного опору. Дійсно, з векторної діаграми на рис. 29 маємо

$$\cos\varphi_{зс} = \frac{\left|\vec{U}_R\right|}{\left|\vec{U}_{зов}\right|} = \frac{U_{\max}^{(R)}}{U_{\max}} = \frac{I_{\max} R}{I_{\max} Z_{пос}} = \frac{R}{Z_{пос}}.$$

Коефіцієнт потужності характеризує вплив зсуву фаз між силою струму в колі та прикладеною до нього напругою на потужність, яку отримує коло (споживач). В електротехніці бажаною є, зрозуміло, ситуація, коли $\cos\varphi_{зс} \to 1$. Якщо ж $\cos\varphi_{зс}$ є малими, то забезпечення необхідної потужності здійснюється за рахунок збільшення сили струму, що призводить до зростання втрат енергії в провідниках, які з'єднують споживача з джерелом струму (генератором).

2.12. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань

В пунктах 2.5 та 2.10 було розглянуто складання коливань скалярних величин (наприклад, напруг), або коливань векторних величин, які здійснюються в однаковому напрямку, коли вектори напруженостей електричних полів коливаються вздовж однієї осі.

В цьому пункті ми вивчатимемо складання двох коливань, які відбуваються в перпендикулярних напрямках. Розглянемо, наприклад, складання коливань напруженостей двох електричних полів, якщо вектор напруженості одного поля направлений вздовж осі *X*, а вектор напруженості іншого поля – вздовж осі *Y*, причому осі *X* та *Y* перпендикулярні між собою, $X \perp Y$. Часові залежності коливань проекцій обох полів описуються гармонічними функціями

$$E_x(t) = E_{\max}^{(x)} \cos\omega_X t\,,$$

$$E_y(t) = E_{\max}^{(y)} \cos(\omega_Y t + \alpha)\,,$$

де ω_x, ω_y – частоти відповідних коливань, $E_{\max}^{(x)}$, $E_{\max}^{(y)}$ – амплітудні значення коливань проекцій напруженостей обох полів, а α – різниця фаз між цими коливаннями.

Напруженість результуючого поля представляє собою суму (суперпозицію) напруженостей обох полів

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}\,,$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$ – одиничні вектори (орти), що лежать вздовж координатних осей.

Таким чином, в результаті складання напруженостей двох взаємно перпендикулярних полів, маємо вектор, проекції якого здійснюють коливання.

Проведемо опис результуючого коливання у найпростішому випадку, коли частоти коливань напруженостей обох полів однакові, $\omega_x = \omega_y = \omega$.

Запишемо рівняння коливань проекцій у вигляді

$$\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} = \cos\omega t\,,$$

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = \cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha\,.$$

З цих можна співвідношень записати рівняння:

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \cos\alpha \pm \sin\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}}\right)^2}\,,$$

або

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} - \frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}} \cos\alpha = \pm \sin\alpha \sqrt{1 - \left(\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}}\right)^2}\,.$$

Піднесемо це рівняння до квадрату та зробимо прості перетворення. У підсумку, приходимо до рівності:

$$\left(\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}}\right)^2+\left(\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}}\right)^2-2\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}}\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}}\cos\alpha=\sin^2\alpha$$

Проведемо аналіз отриманого рівняння в залежності від величини різниці фаз коливань α .

Розглянемо спочатку випадок, коли $\alpha=0$. Тоді записане рівняння для проекцій векторів дає співвідношення:

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}}=\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}},$$

яке відповідає прямо пропорційній залежності між проекціями, і з якого випливає, що вектор результуючого поля коливається вздовж прямої.

Треба врахувати, що функції $E_x(t)$ та $E_y(t)$ обмежені їх амплітудним значенням, тому отримане рівняння для проекцій задає відрізок, який на рис. 31 лежить у першому та третьому квадрантах. Цей відрізок визначає множину точок положення кінця вектора $\vec{E}(t)$ результуючої напруженості. Початок вектора $\vec{E}(t)$ нерухомий і лежить в точці *O* початку системи координат на рис. 31. На рис. 31 показано вектор $\vec{E}(t)$ для двох довільних моментів часу: t_1, якому відповідає вектор $\vec{E}_1=\vec{E}(t_1)$, та t_2, якому відповідає вектор $\vec{E}_2=\vec{E}(t_2)$.

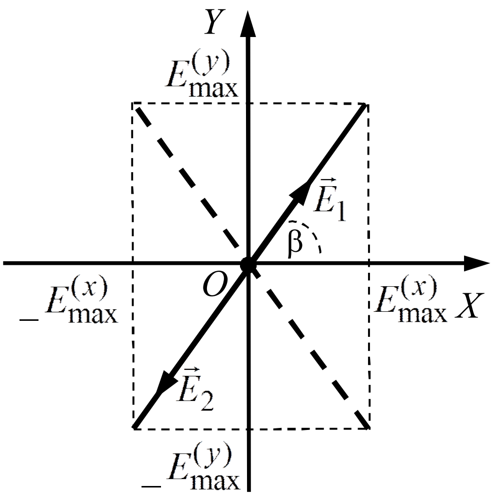

Рис. 31

Таким чином, в результаті складання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковими частотою та фазою, буде формуватися коливання з тими ж самими частотою і фазою. Вектор результуючого коливання здійснює коливання вздовж осі, яка складає кут β з віссю *X*. Величина цього кута визначається відношенням:

$$tg\beta=\frac{E_{\max}^{(y)}}{E_{\max}^{(x)}}.$$

Амплітуда такого результуючого коливання дорівнює

$$E_{\max}=\sqrt{(E_{\max}^{(x)})^2+(E_{\max}^{(y)})^2}\ .$$

Припустимо тепер, що $\alpha=\pi$. Тоді рівняння для проекцій набуває вигляду

$$\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}} = -\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}},$$

яке також описує пряму, яка, одначе, лежить у другому та третьому квадрантах на рис. 31. Відрізок, що відповідає цим коливанням, на рис. 31 зображений пунктиром і є симетричним відносно осі Y до відрізку, отриманому при $\alpha = 0$.

В оптиці коливання вектора напруженості електричного поля хвилі, які відбуваються вздовж прямої, називають *лінійно поляризованими*.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли зсув фаз між коливаннями $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$. Для такого зсуву фаз рівняння для проекцій набуває вигляду

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{\max}^{(x)}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{E_{\max}^{(y)}}\right)^2 = 1.$$

Це рівняння відповідає еліпсу (див. рис. 32) з півосями $E_{\max}^{(x)}$ та $E_{\max}^{(y)}$. З'ясуємо, що це за еліпс.

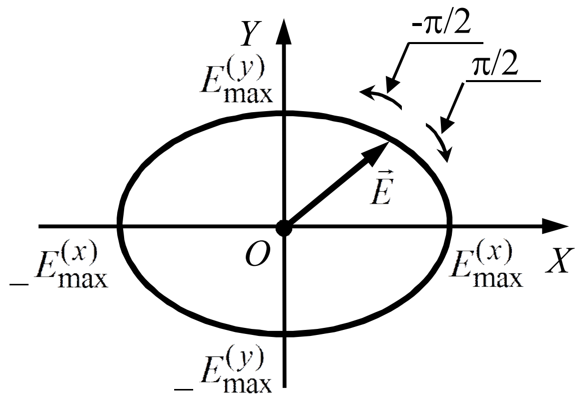

Рис. 32

При накладанні коливань напруженостей двох взаємно перпендикулярних полів, фази яких відрізняються на $\frac{\pi}{2}$, отримаємо електричне поле з результуючою напруженістю, що характеризується вектором $\vec{E}$. Початок цього вектора лежить у точці O початку системи відліку, а кінець вектора $\vec{E}$ лежить на еліпсі (див. рис. 32). Іншою мовою, кінець вектора $\vec{E}$ результуючої напруженості поля описує з часом еліпс. При цьому при часовому обертанні вектора $\vec{E}$ змінюється і його модуль.

В оптиці такі коливання вектора напруженості називають *еліптично поляризованими*. Коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то обертання здійснюється за рухом годинникової стрілки. Якщо так, то такі коливання називають *право* поляризованими. Коли $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, то вони здійснюється проти руху годинникової стрілки і називаються *ліво* поляризованими. На рис. 32 відповідні напрямки обертального руху вектора $\vec{E}$ позначено стрілками.

У випадку, коли амплітуди коливань проекцій напруженостей обох полів будуть однаковими $E_{\max}^{(x)} = E_{\max}^{(y)}$, кінець вектора $\vec{E}$ описуватиме колову траєкторію, а його модуль, звичайно, не буде змінюватися у часі. Такі коливання вектора напруженості відбуваються з *круговою поляризацією*.