

Глава 3. МЕХАНІЧНІ ХВИЛІ

Хвилею називають процес поширення коливань в просторі. Зокрема, в механічних хвилях коливання здійснюють точки середовища. *Точкою середовища* є його малий об'єм, розміри якого значно менші за довжину хвилі. В той же час, розміри такого об'єму залишаються значно більшими розмірів однієї молекули чи міжмолекулярних відстаней в даній речовині, тому в ньому міститься величезна кількість атомів або молекул. В такому разі, точка середовища може характеризуватися тими ж самими фізичними величинами, що й макроскопічні тіла, наприклад, температурою, густиною, тиском. З такого означення також випливає, що точка, або фізично малий об'єм середовища, може зазнавати деформації стиску, розтягу, зсуву тощо. Так, при поширенні хвиль у газах точки середовища зазнають деформацій стиску та розтягу, а у хвилях на поверхні рідини, навпаки, можна обмежитися наближенням, за яким стиском рідини можна знехтувати. Підкреслимо, що поширення механічних хвиль відбувається тільки у середовищі і не можливе у вакуумі.

При поширенні хвиль у газах, або під час хвильового процесу у газі, точки середовища здійснюють одновимірні коливальні рухи вздовж прямої, що співпадає з напрямком поширення самої хвилі. Такі хвилі називають *повздовжніми*. З іншого боку, у хвилі, що поширюється, скажімо, у скрипичній струні, точки середовища також здійснюють одновимірні рухи, але вони відбуваються у напрямку, перпендикулярному до напрямку поширення хвилі. Такі хвилі називаються *поперечними*. Нарешті, у хвиль, які поширюються на поверхні рідини, точки середовища здійснюють більш складний двовимірний рух по коловій траєкторії, в чому можна переконатися, уважно пильнуючи, наприклад, за рухом поплавка вудки.

Під час хвильового процесу точки середовища коливаються відносно своїх положень рівноваги. В рівновазі точки середовища не рухаються відносно одна одної, не зазнають деформацій і не чинять силової дії одна на одну. Отже, хвильовий процес можна розглядати як збурення рівноважного стану середовища. Для хвильового збурення необхідна енергія.

Коли хвиля поширюється у безмежному середовищі, то з часом у хвильовому процесі приймає участь все більше точок середовища. Тому при поширенні хвилі відбувається перенесення енергії, проте таке перенесення енергії не супроводжується перенесенням маси, або, що теж саме, речовини. Хвилі, які переносять енергію, називаються *біжучими*.

Якщо ж хвильовий процес відбувається в обмеженому середовищі, то в цьому випадку перенесення енергії не відбувається, оскільки хвиля не поширюється. При цьому не відбувається і зростання кількості точок середовища, що включаються у хвильовий рух, і тому такі хвилі називаються *стоячими*.

З огляду на те, що поширення хвилі вимагає енергії, для його виникнення необхідне *джерело* хвилі, яке за рахунок власної енергії підтримує існування хвильового процесу в цілому. В біжучій хвилі точки середовища здійснюють вимушені коливання, обумовлені дією джерела хвилі. При цьому коливання точок середовища біжучої хвилі здійснюються з частотою коливань її джерела.

Наприклад, джерелом звукових хвиль, що визначають наш голос і забезпечують спілкування між людьми, є мовний апарат, складовою якого є голосові зв'язки. Під час видиху повітря з легень відбувається збурення коливань зв'язок, які далі поширюються в оточуючому повітрі у вигляді звукових хвиль. Характер збурення залежить від інтенсивності видиху, напруження зв'язок, положення язика, губ. В результаті, виникаючий звуковий процес є досить складним, а точки повітря здійснюють складний коливальний рух з багатьма частотами.

Далі ми вивчатимемо та математично опишемо найпростіші гармонічні хвилі, під час поширення яких точки середовища здійснюють коливання на одній частоті.

3.1. Рівняння хвилі

Розглянемо натягнутий резиновий джгут. Добре відомо, що в такому джгуті шляхом невеликого струсу можна утворити збурення, яке поширюватиметься вдовж джгута. На рис. 34 наведено приклад такого

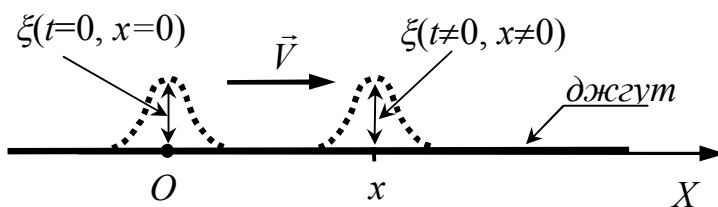


Рис.34

збурення: воно, як видно, представляє собою досить локальне, поперечне зміщення точок джгута, яке зображене пунктиром.

Збурення поширюється, рухаючись вздовж джгута. На рис. 34 показані два різних положення одного збурення, коли воно спочатку, при $t = 0$, проходить точку O початку системи відліку, якому відповідає $x = 0$, і наступне положення, коли його максимум в

момент часу t знаходиться в точці з поточною координатою x . Важливо, що для обох цих моментів часу збурення має однакову форму, змінюється тільки його положення – збурення „біжить” вздовж джгута.

Величина зміщення точок джгута в ході збурення визначається відстанню, на яку точки джгута змістилися від осі X (в перпендикулярному до цієї осі напрямку) відносно положення їх рівноваги. Позначатимемо таке зміщення буквою ξ . Величина зміщення залежить від часу та від координати точок джгута, тобто

$$\xi = \xi(x, t).$$

При поширенні збурення точки джгута зміщуються однаково, але їх зміщення відбуваються з запізненням на час поширення збурення. Таким чином, часова залежність збурення точок джгута описується деякою функцією, аргумент якої можна встановити, а саме:

$$\xi(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

де v - швидкість поширення збурення, яка в розглянутому на рис. 34 випадку поширення збурення в натягнутому джгуті, паралельна координатній осі $\vec{v} \uparrow \uparrow X$.

Коли збурення поширюється у протилежному напрямку $\vec{v} \uparrow \downarrow X$, то в аргументі функції, яка описує величину зміщення, змінюється знак перед дробом, тобто просторово-часова залежність набуває вигляду

$$\xi(x, t) = f\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Зрозуміло, що отримана форма просторово-часового аргументу для функції зміщення відповідає поширенню не тільки поодинокого збурення, а і будь-якому неперервному хвильовому процесу.

Функцію $f(t, x)$ з аргументами $t \pm \frac{x}{v}$ називають *рівнянням хвилі*.

Ця функція визначає, де і коли відбуватиметься зміщення точок середовища під час хвильового процесу.

Коли точка середовища здійснює зміщення за гармонічним законом, то така хвиля називається *гармонічною*. У відповідності до сказаного рівняння гармонічної хвилі, що рухається вздовж джгута, має вигляд:

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right)$$

для хвилі, що поширюється в позитивному напрямку осі X , і

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega(t + \frac{x}{v}) + \varphi_0),$$

для хвилі, що поширюється в зворотному напрямку, де ξ_{\max} – амплітудне зміщення коливань точки, φ_0 – початкова фаза, а ω – частота.

З виразу зміщення для гармонічної хвилі маємо, що кожна точка середовища здійснює гармонічне коливання, але фази коливань різних точок різні і залежать від їх положення.

Рівняння гармонічної хвилі можна також записати, використовуючи показникову функцію; тоді відповідно

$$\xi(x, t) = \text{Re} \xi_{\max} e^{i[\omega(t \pm \frac{x}{v}) + \varphi_0]},$$

де i – уявна одиниця.

3.2. Період, частота, довжина хвилі, хвильове число та фазова швидкість хвилі

У попередньому пункті було отримано рівняння одновимірної гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж прямої і яка описується виразом

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0],$$

де ξ_{\max} – амплітудне значення коливань точок середовища. Величина

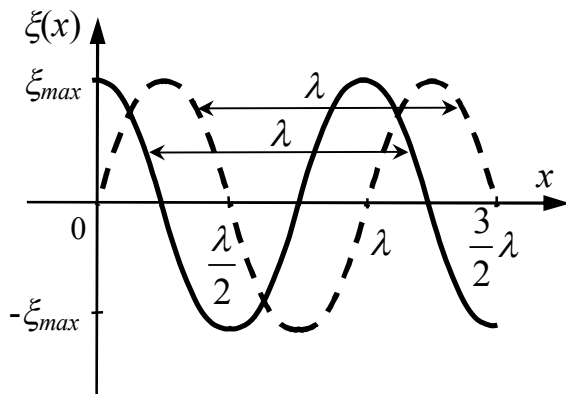


Рис. 35

амплітудного значення точок середовища визначається амплітудою коливань джерела хвилі.

Розподіл зміщень для гармонічної хвилі з $\varphi_0 = 0$ і для $t=0$ наведено на рис. 35, де цей розподіл позначено суцільною лінією.

Частота коливань точок середовища під час хвильового

процесу, як і завжди, позначена буквою ω , яка задає так звану *циклічну частоту*, а одиниця її вимірювання $[\omega] = \text{с}^{-1}$.

Вже зазначалося, що частота хвилі дорівнює частоті коливань її джерела.

Період коливань точок середовища під час хвильового процесу також обернено пропорційний частоті хвилі

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Частоту (не циклічну) коливань точок хвилі позначають f ; вона визначається рівністю

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Часта f вимірюється в герцах $[f] = \text{Гц}$.

Довільна стадія коливань визначається фазою. Як бачимо з рівняння гармонічної хвилі, фаза коливань залежить від положення точок середовища. Точки, які мають різні координати, можуть коливатися однаково. Це можливо, якщо різниця фаз коливань для двох і більше різних точок середовища кратна числу 2π . Найменша відстань між точками середовища, які коливаються однаково, називається *довжиною хвилі*. З виразу для фази знаходимо, що має місце рівність

$$\omega \frac{\lambda}{v} = 2\pi,$$

якщо λ – довжина хвилі: на рис. 35 її позначено подвійною стрілкою. З цього означення легко отримати стандартну формулу для довжини хвилі

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}.$$

Як видно, довжина хвилі – це відстань, яку проходить хвиля за час, рівний періоду.

На рис. 35 також зображено (пунктирною кривою) розподіл зміщень для моменту часу $t = T/4$.

З використанням введених понять періоду та довжини хвилі рівняння хвилі можна записати у вигляді

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right),$$

яке прийнято писати дещо інакше:

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, так зване *хвильове число*.

Циклічна частота ω визначається кількістю коливань, що відбуваються за час 2π секунд, а хвильове число відповідає кількості довжин хвиль, яка припадає на відстань 2π метрів.

Як вже говорилося, фаза коливань гармонічної хвилі в будь-який момент залежить від часу та положення точок середовища у спосіб:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0.$$

Визначимо умову, за якою значення фази є постійним, $\varphi(x, t) = const$. Ця умова не виконується для будь-якої точки середовища з фіксованим значенням координати. Але фаза може залишатися незмінною, при переміщенні вздовж напрямку поширення хвилі. Знайдемо похідну від виразу для фази за означеної вище умови, що фаза не змінює свого значення:

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0.$$

Знаходимо, що фіксоване значення фази відповідає руху вздовж напрямку поширення хвилі зі швидкістю $v_\phi = \frac{dx}{dt}$, яку називають *фазовою швидкістю* і яка визначається виразом

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}.$$

Фазова швидкість гармонічної хвилі дорівнює швидкості поширення хвилі $v_\phi = v$.

3.3. Рівняння плоскої хвилі

В розглянутому вище прикладі поширення поперечної хвилі в натягнутому джгуті, коливання здійснювали точки середовища, які лежать на прямій джгута. Було отримано рівняння хвилі, яке описує поширення біжучої хвилі вздовж джгута і яке має вигляд

$$\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де ξ_{\max} – амплітуда коливань точок середовища, ω – частота хвилі, а k – хвильове число.

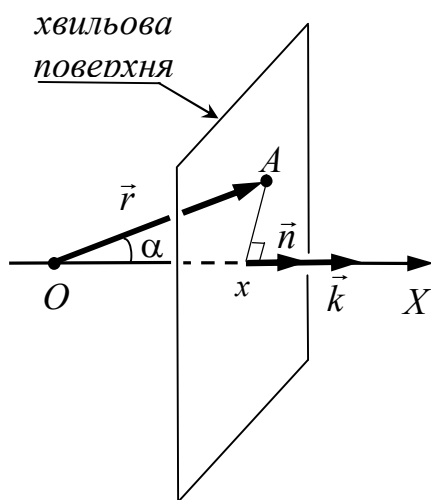


Рис. 36

Це рівняння хвилі називають *рівнянням плоскої хвилі*, бо воно може описувати не тільки одновимірну гармонічну хвилю, що поширюється вздовж прямої, як це має місце для джгута.

Дійсно, рівняння плоскої хвилі відповідає процесу поширення тривимірної просторової хвилі у середовищі. На рис. 36 зображено поширення такої тривимірної плоскої хвилі вздовж координатної осі X.

Всі точки площини, яка перпендикулярна до осі X , мають (див. рис. 36) однакове значення координати x , а тому вони мають однакове значення фази, тобто, як кажуть, коливаються *синфазно*. Поверхня, яку утворюють точки, які коливаються синфазно, або однаково, називається *хвильовою поверхнею*. Для плоскої хвилі хвильовою поверхнею є площина.

Орієнтацію хвильової площини у просторі задає одиничний вектор \vec{n} перпендикулярний до цієї площини. У випадку, що наведений на рис. 36, $\vec{n} \uparrow\uparrow X$.

Положення довільної точки A на хвильовій поверхні задається радіус-вектором \vec{r} . Він складає кут α з віссю X . Тоді координата точки A задається скалярним добутком векторів:

$$x = \vec{r} \vec{n} = |\vec{r}| \cos \alpha .$$

Введемо поняття хвильового вектора. *Хвильовим вектором* називають вектор, перпендикулярний до хвильової поверхні, величина якого дорівнює хвильовому числу. Позначають хвильовий вектор \vec{k} , а його модуль $|\vec{k}| = k$ був визначений у попередньому пункті.

У відповідності до введеного означення, хвильовий вектор визначає напрямок поширення хвилі. Для випадку плоскої хвилі цей вектор направлений перпендикулярно до хвильової поверхні, тому вектори \vec{k} та \vec{n} є колінеарними, $\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{n}$, а отже можна покласти, що

$$\vec{k} = k\vec{n} .$$

В результаті такого означення хвильового вектора, добуток хвильового числа k на x -ву координату може бути представлений у вигляді

$$kx = k\vec{r}\vec{n} = \vec{k}\vec{r} .$$

Таким чином, рівняння плоскої хвилі набуде форми

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де \vec{r} – радіус-вектор положення довільної точки середовища, яка приймає участь у хвильовому процесі, а $\xi(\vec{r}, t)$ – її зміщення у довільний момент часу t . Це рівняння відповідає такій плоскій хвилі, в якій точки середовища під час коливань здійснюють одновимірний рух, а відповідні зміщення описується однією проекцією $\xi(\vec{r}, t)$.

Рівняння плоскої хвилі можна також записати у вигляді

$$\xi(\vec{r}, t) = \text{Re} \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} .$$

За такого представлення плоскої хвилі її напрямок поширення задає хвильовий вектор \vec{k} .

3.4. Хвильове рівняння

Хвильовим рівнянням називають диференціальне рівняння, що описує рух точок середовища під час хвильового процесу. Вище нами було показано, що при поширенні хвилі вздовж осі X , коли $\vec{v} \uparrow \uparrow X$, чи в протилежному напрямку, коли $\vec{v} \uparrow \downarrow X$, зміщення описується функцією

$$\xi(x, t) = f\left(t \mp \frac{x}{v}\right),$$

яку можна представити як складну функцію від аргументу. Для цього введемо змінну $\tau = t \mp \frac{x}{v}$, що має розмірність часу. З урахуванням цього частинні похідні першого порядку для зміщення визначаються виразами:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{df}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{df}{d\tau}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{df}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \mp \frac{1}{v} \frac{df}{d\tau},$$

де враховано, що $\frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$, $\frac{\partial \tau}{\partial x} = \mp \frac{1}{v}$. Бачимо, що частинна похідна по координаті залежить від напрямку поширення хвилі.

Тепер запишемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{d^2 f}{d\tau^2},$$
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \mp \frac{1}{v} \frac{d^2 f}{d\tau^2} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 f}{d\tau^2}.$$

Звідси випливає, що частинна похідна другого порядку по координаті на відміну від похідної першого порядку не залежить від напрямку поширення хвилі.

З виразів для похідних другого порядку приходимо до рівності

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

яка фактично є диференціальним рівнянням. Воно в однаковій мірі виконується для хвиль, що розповсюджуються і вздовж осі X , і протилежно до неї. Таке рівняння є хвильовим рівнянням. Воно лінійне, тому у загальному випадку його розв'язком є сума функцій обох можливих аргументів, а саме:

$$\xi(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right),$$

де перший доданок описує поширення хвилі вздовж осі X , а другий – в протилежному напрямку.

Узагальнене хвильове рівняння містить суму частинних похідних зміщення по всім трьом координатам і може бути представлено виразом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Це рівняння можна записати використовуючи поняття лапласіану, яким „скорочено” позначають суму частинних похідних другого порядку

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

де $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, або *лапласіан*.

Переконаємося, що плоска гармонічна хвиля задовольняє узагальненому хвильовому рівнянню. Для цього запишемо рівняння хвилі у вигляді

$$\xi(\vec{r}, t) = \text{Re} \xi_{\text{max}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)},$$

де ξ_{max} – амплітудне зміщення, а \vec{k} – хвильовий вектор, а i – уявна одиниця.

Представимо записану комплексну функцію дещо інакше:

$$\tilde{\xi}(\vec{r}, t) \equiv \tilde{\xi} = \xi_{\text{max}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = \xi_{\text{max}} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)},$$

де k_x , k_y , k_z – просторові проекції хвильового вектора, а x , y , z – проекції радіус-вектора (координати точки середовища).

Порахуємо лапласіан від функції $\tilde{\xi}$

$$\Delta \tilde{\xi} = \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial z^2} = (-i)^2 \xi_{\text{max}} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)}.$$

Отже, вираз для лапласіану від функції $\tilde{\xi}$ можна записати у вигляді

$$\Delta \tilde{\xi} = -k^2 \xi_{\text{max}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}, \quad \text{або} \quad \Delta \tilde{\xi} = -k^2 \tilde{\xi},$$

де враховано, що $(-i)^2 = -1$, а k^2 – квадрат модуля хвильового вектора (квадрат хвильового числа).

В результаті, отримуємо, що лапласіан зміщення плоскої гармонічної хвилі прямо пропорційний зміщенню і визначається його добутком на квадрат хвильового вектора.

Тепер порахуємо часову похідну другого порядку від $\tilde{\xi}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial t^2} = (i)^2 \omega^2 \xi_{\text{max}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = -\omega^2 \tilde{\xi}.$$

Порівнюючи два останні вирази, прямо приходимо до рівності

$$k^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} = \frac{1}{v^2} \omega^2 \xi_{\max} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}.$$

Отже, ми продемонстрували, що функція $\tilde{\xi}$ задовольняє узагальненому хвильовому рівнянню, коли виконується рівність

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2},$$

яку можна записати простіше: $\omega = vk$. Отриманий зв'язок між хвильовим вектором та частотою називають *дисперсійним співвідношенням*.

Хвильовий вектор гармонічної плоскої хвилі прямо пропорційний частоті. Проте зауважимо, що згасання або нелінійні ефекти призводять до порушення цієї пропорційності.

3.5. Сферична хвиля

Запишемо узагальнене хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

права частина якого містить суму похідних другого порядку від зміщення по координатах x, y, z , які визначені в декартовій системі координат.

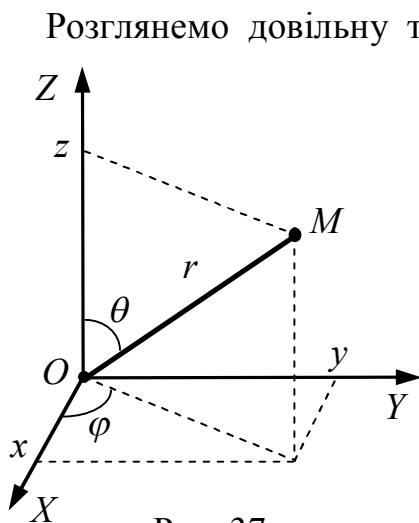


Рис. 37

Розглянемо довільну точку M з координатами x, y, z у декартовій системі координат. Перейдемо до сферичної системи координат, в якій положення точки характеризується відстанню r від неї до початку системи відліку та двома кутами θ та φ (див. рис. 37). Запишемо відомі формули зв'язку між координатами декартової та сферичної систем координат:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \theta.$$

В сферичній системі координат лапласіан від зміщення, як відомо, має вигляд

$$\Delta \xi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}.$$

З урахуванням такого запису лапласіану узагальнене хвильове рівняння у сферичній системі відліку набуває вигляду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Знаходження розв'язку цього рівняння спирається на знання методів математики, який називають математичною фізикою.

Обмежимося розглядом найпростішого випадку, коли хвиля має сферичну симетрію, тобто хвильові зміщення залежать тільки від відстані r до початку системи відліку і не залежать від кутів θ та φ . Іншою мовою, в такій хвилі величини зміщень не залежать від напрямку її поширення. Хвильовою поверхнею будь-якої сферичної хвилі є сфера з центром в точці O (див. рис. 38). В сферичній хвилі хвильовий вектор співнапрямлений з радіус-вектором \vec{r} точки на поверхні сфери $\vec{k} \uparrow \uparrow \vec{r}$.

У випадку, зображеному на рис. 38, джерело сферичної хвилі знаходиться в точці O . Точкою M на цьому рисунку позначено довільну точку середовища, яка лежить на хвильовій поверхні, радіус якої $r = |\vec{r}| = |\overline{OM}|$

Отже, для сферичної хвилі зміщення залежать тільки від r та t (тобто $\xi(\vec{r}, t) = \xi(r, t)$), тому похідні $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = 0$. У підсумку, хвильове рівняння

для зміщень сферичної хвилі значно спрощується і приймає вигляд:

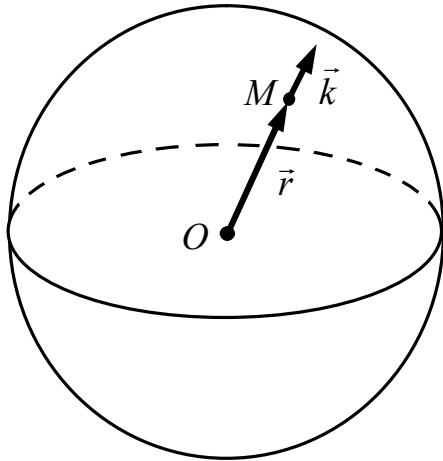


Рис. 38

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Це рівняння можна перетворити, переписавши його у вигляді

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\xi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

або, що теж саме,

$$\frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\xi)}{\partial t^2}.$$

Якщо тепер ввести функцію $\zeta = r\xi$, то хвильове рівняння для сферичної хвилі набуде, як видно, свого звичайного

вигляду:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Розв'язок цього рівняння у загальному випадку можна представити сумою двох функцій

$$\zeta(r, t) = f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Звідси знаходимо вираз для зміщень у сферичній хвилі:

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right).$$

Тоді рівняння гармонічної сферичної хвилі можна записати у остаточному вигляді:

$$\xi(r, t) = \frac{C}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0),$$

де C - константа. У сферичній хвилі, яка поширюється від центру сфери (знак „-” перед добутком kr) амплітуда зменшується обернено пропорційно відстані до її центру.

Коли ж сферична хвиля збігається до центру сфери (знак „+” перед kr), то амплітуда хвилі по мірі наближення до центру навпаки, наростає. Така властивість амплітуди сферичних хвиль при їх русі до центру використовується у техніці – зокрема, у так званих „концентраторах” хвиль. Одні з перших досліджень концентраторів ультразвукових хвиль були проведені саме в НТУУ „КПІ”.