3.6. Швидкість поширення біжучої хвилі в струні

Дотепер в попередніх пунктах цієї глави розглядалося поширення хвиль без врахування фізичних характеристик середовища, в якому відбувається хвильовий процес. Так, ми користувалися поняттям швидкості поширення хвилі, не встановивши, як пов'язана ця швидкість з властивостями середовища. Швидкість поширення хвилі, безумовно, визначається фізичними чинниками, що характеризують хвильовий процес. Тому вивчаючи той або інший конкретний випадок, необхідно дослідити фізичні процеси, що супроводжують хвильовий процес.

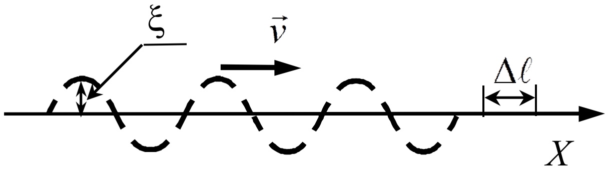

Рис. 39

В цьому пункті ми визначимо швидкість поширення хвилі у натягнутій струні (див. рис. 39). Будемо вважати, що струна є нескінчено тонкою. Точками середовища є фізично малі ділянки струни довжиною $\Delta\ell \to 0$ (очевидно, більш фізичною є умова $\Delta\ell << \lambda$, де λ – довжина хвилі). Силу натягу струни позначимо F. Вважатимемо, що струна однорідна, тобто в усіх її точках густина ρ речовини струни однакова і однакова площа S перерізу струни.

Визначимо швидкість поширення в струні поперечної біжучої хвилі. На рис. 39 зміщення точок струни під час хвильового процесу показане пунктирною кривою.

Очевидно, що швидкість $\vec{v}$ поширення хвилі дорівнює швидкості поширення максимуму зміщення вздовж струни. Поширення максимуму зміщення струни еквівалентне руху ділянок струни, яку тягнуть через трубку, форма якої співпадає з формою кривої зміщення хвилі біля максимуму (див. рис. 40). При цьому припускатимемо, що швидкість, з якою струну тягнуть через трубу, постійна і за величиною дорівнює швидкості поширення хвилі.

На рис. 40 трубку зображено пунктиром, а струну, яку тягнуть через трубку, зображено суцільною лінією. Таке припущення означає, що струна є гнучкою і можна нехтувати можливими деформаціями зсуву.

Виділимо малу ділянку струни довжиною $\Delta\ell$, яка спирається на кут $\Delta\alpha$ з центром заокруглення в точці *O* та радіусом кривизни *R*. За прийнятих умов (форма трубки тотожна кривій зміщень поблизу максимуму зміщення) радіус кривизни *R* дорівнює радіусу кривизни кривої зміщення біля одного з його максимумів.

Виділена ділянка струни рухається з доцентровим прискоренням $\vec{a}_\partial$, яке направлене до точки O. За другим законом Ньютона цього прискорення даній ділянці струни надають сили натягу $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$, які прикладені до її країв

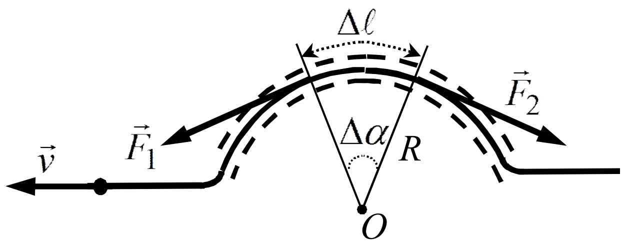

Рис. 40

$$\Delta m \cdot \vec{a}_\partial = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Зміщення точок струни за припущенням незначне, тому можна покласти, що $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| \approx F$. Тоді з рівняння другого закону Ньютона отримаємо

$$\Delta m \frac{v^2}{R} = F \Delta\alpha .$$

Для однорідної струни маса ділянки

$$\Delta m = \rho S \Delta\ell ,$$

а її довжина –

$$\Delta\ell = R\Delta\alpha .$$

Підставимо ці співвідношення до рівняння другого закону Ньютона, звідки отримуємо

$$\rho S R \Delta\alpha \frac{v^2}{R} = F\Delta\alpha .$$

Після необхідного скорочення знаходимо, що швидкість поширення поперечної біжучої хвилі в натягнутій струні визначається формулою

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} .$$

З неї випливає, що швидкість поширення поперечної біжучої хвилі в струні залежить від сили натягу струни. Чим більший натяг, тим більшою є швидкість поширення хвилі в струні, але водночас поширення хвилі гальмується у товстих струнах, зроблених з більш важких матеріалів.

3.7. Швидкість поширення біжучої повздовжньої пружної хвилі в стрижні

Розглянемо інший приклад, а саме: однорідний стрижень. Визначимо, якою буде швидкість повздовжньої біжучої хвилі, яка поширюється вздовж осі вільного стрижня. Така хвиля буде плоскою. Всі точки площини, що лежать на перпендикулярному перерізі стрижня, матимуть однакову фазу. Вони будуть мати однакове зміщення ξ .

Зміщення у повздовжній хвилі направлені вздовж напрямку її поширення, а в даному випадку – вздовж осі стрижня. Під час поширення хвилі точки середовища стрижня зсуваються по-різному, тим самим створюючи деформації, які, в свою чергу, супроводжуються виникненням пружних сил.

На рис. 41 зображено стрижень, вісь якого позначено *X*. До перерізу стрижня прикладено силу $\vec{F}$, дія якої характеризується напруженням, яке однакове для всіх точок перерізу і яке визначається з відношення сили до площі перерізу стрижня $\sigma = \dfrac{F}{S}$.

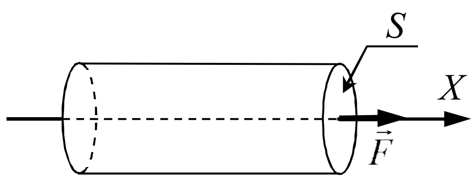

Рис. 41

Крім того, треба враховувати, що сили, які виникають під час хвильового процесу, є неоднорідними, тобто залежать від координати. Дійсно, виділимо малу ділянку стрижня довжиною Δx (рис. 42). Внаслідок дії сили на виникають напруження, які деформують ділянку, абсолютне видовження якої позначимо $\Delta\xi$. Зрозуміло, що відносне видовження ділянки дорівнює відношенню $\Delta\xi / \Delta x$.

За законом Гука напруження прямо пропорційне відносному видовженню

$$\sigma = E\frac{\Delta\xi}{\Delta x},$$

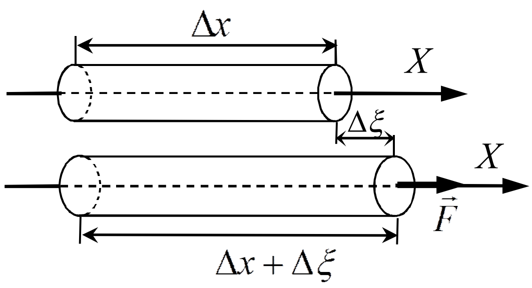

Рис. 42

де *E* – модуль Юнга.

Коли $\Delta\xi \to 0$ та $\Delta x \to 0$, наведений вираз для напруження набуває вигляду

$$\sigma = E\frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Таким чином, у стрижні локальне значення напруження прямо пропорційне просторовій похідній зміщення, тобто є локальним.

Під час хвильового процесу будь-яка мала ділянка стрижня зміщуючись як ціле, деформується та деформує сусідні ділянки (див. рис. 43), оскільки точки лівого та правого боків ділянки зміщуються на різні відстані ξ_L та ξ_R. Це означає, що довжина виділеної ділянки зміниться на величину $\Delta\xi = \xi_R - \xi_L$. Середня швидкість, яку набуває ділянка (її центр мас) в

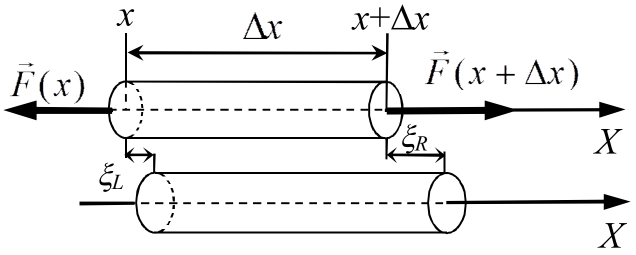

Рис. 43

цілому за час Δt, визначається відношенням $\dfrac{\Delta\xi}{\Delta t}$, а миттєве значення швидкості цієї ділянки визначається похідною $\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$.

Відповідно, прискорення ділянки задається часовою похідною другого порядку від зміщення $\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$.

Прискорення виникає в результаті дії сил – в даному випадку $\vec{F}(x)$ та $\vec{F}(x+\Delta x)$, які прикладені до лівого та правого кінців ділянки. За другим законом Ньютона можемо записати рівняння її руху:

$$\Delta m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=F(x+\Delta x)-F(x),$$

де $\Delta m=\rho S\Delta x$ – маса ділянки, яка визначається добутком густини ρ на об'єм $S\Delta x$.

Різниця сил пропорційна різниці напружень

$$F(x+\Delta x)-F(x)=[\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)]S.$$

Для різниці напружень обмежимось лінійним наближенням

$$\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)\approx\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x.$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння другого закону Ньютона для ділянки стрижня приймає форму

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=S\frac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x.$$

Після скорочень S та Δx приходимо до диференційного рівняння

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}.$$

Якщо тепер в ньому врахувати, що $\sigma=E\dfrac{\partial\xi}{\partial x}$, то отримаємо диференційне рівняння, яке містить вже тільки одну функцію координати і часу – зміщення:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

З останнього рівняння знаходимо остаточне рівняння, яке приймає вигляд хвильового:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

де

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

– швидкість біжучої повздовжньої пружної хвилі в стрижні. В останній формулі припускається, що, незважаючи на хвильовий процес, густина стрижня залишається незмінною.

При визначенні швидкості поширення хвилі ми також знехтували зміною площі перерізу стрижня під час його деформування. Це так зване наближення „тонкого" стрижня, яке виконується, наприклад, для стального стрижня. В ньому $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sim 5000$ м/с, коли по ньому поширюється хвиля з частотою f =5000 Гц; тоді довжина хвилі становить $\lambda = v / f \sim$ 1 м. Отже, стрижень з діаметром 1 см можна вважати тонким. Для випадку стрижня кінцевого перерізу формула для швидкості модифікується. Зауважимо, що наведений вираз для швидкості розповсюдження повздовжньої біжучої пружної хвилі в тонкому стрижні співпадає з виразом для швидкості поширення повздовжньої пружної біжучої хвилі у безмежному ізотропному твердому середовищі.

3.8. Швидкість поширення хвиль у газах і рідинах

У газах та рідинах поширюються тільки повздовжні пружні хвилі. Дійсно, поширення пружних хвиль супроводжується неоднорідними деформаціями середовища: у поперечних хвилях відбуваються деформації зсуву, а у повздовжніх – деформації стиску та розтягу. Деформації зсуву змінюють не об'єм тіл, а лише їх форму. Деформації стиску чи розтягу, навпаки, змінюють не форму, а об'єм.

Рідини та гази не мають власної форми, займаючи, як відомо, увесь доступний ним об'єм, тому в них можливими є тільки деформації стиску чи розтягу. З цього випливає, що у рідинах та газах можуть існувати і поширюватися тільки повздовжні пружні хвилі. Пружні хвилі, що розповсюджуються у середовищі, називають *звуковими* хвилями.

Розглянемо газ (чи рідину), який розміщений всередині нескінченно довгого циліндру (див рис. 44). Нехай вздовж осі циліндру, яку ми позначимо X, поширюється повздовжня пружна плоска хвиля. Її фазовою поверхнею буде площина перерізу циліндру, яка перпендикулярна до осі X.

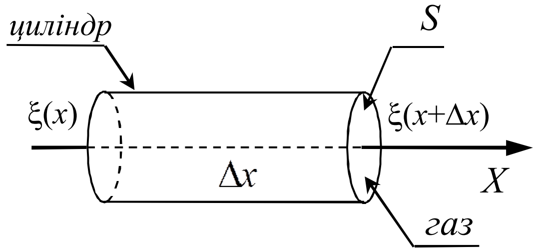

Рис. 44

Виділимо вздовж циліндру ділянку

довжиною Δx. Під час стиску чи розтягу ця ділянка зазнаватиме деформації $\Delta\xi$. Таке деформування ділянки буде супроводжуватися зміною тиску, причому величина додаткового тиску на ділянці буде пропорційна її відносному видовженню

$$\Delta P = -\alpha \frac{\Delta\xi}{\Delta x},$$

де α – коефіцієнт пропорційності, який відіграє таку ж саму роль, що й модуль Юнга для твердих тіл. Знак мінус в цьому виразі означає, що знак додаткового тиску протилежний до знаку деформації. Наприклад, при стисненні, коли $\Delta\xi < 0$, додатковий тиск додатній $\Delta P > 0$.

Помножимо в попередньому виразу чисельник та знаменник на площу S перерізу циліндру. Отримаємо, що зміна тиску пропорційна відносній зміні об'єму

$$\Delta P = -\alpha \frac{S\Delta\xi}{S\Delta x} = -\alpha \frac{\Delta V}{V},$$

де враховано, що добуток $S\Delta x$ – це не що інше, як об'єм виділеної ділянки: $S\Delta x = V$, а добуток $S\Delta\xi$ – зміна об'єму ділянки під час хвильового процесу: $S\Delta\xi = \Delta V$.

Коли $\Delta V \to 0$, то останній вираз можна записати з використанням диференціалів:

$$dP = -\alpha \frac{dV}{V}.$$

Таким чином, параметр α, який характеризує пружні здатності середовища, виявляється термодинамічною величиною:

$$\alpha = -V \frac{dP}{dV}.$$

Як вже говорилося, цей параметр подібний до модуля Юнга. Тому вираз для швидкості поширення повздовжньої пружної хвилі в газі чи рідині можна записати у вигляді

$$v = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{V}{\rho_0}\left|\frac{dP}{dV}\right|},$$

де ρ_0 - густина незбуреного хвилею середовища.

Розрахуємо параметр α у випадку поширення пружної звукової хвилі в ідеальному газі.

Експерименти показують, що при поширенні пружних хвиль у газах, деформування ділянок середовища відбувається без теплообміну з сусідніми точками. Це означає, що стиск чи розтяг точок середовища відбувається адіабатно. Рівняння адіабати описується виразом

$$PV^{\gamma} = const,$$

де γ – коефіцієнт адіабати.

Продиференціюємо рівняння адіабати:

$$V^{\gamma} dP + \gamma PV^{\gamma - 1} dV = 0.$$

Поділимо останню рівність на PV^{γ} та запишемо диференційне рівняння адіабатного процесу:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

З цього рівняння, використовуючи формулу для параметра α, знаходимо, що цей параметр прямо пов'язаний з тиском рівноважного стану газу:

$$\alpha = \gamma P_0.$$

Отже швидкість поширення пружної хвилі в ідеальному газі визначається формулою

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}.$$

Далі врахуємо рівняння стану ідеального газу (рівняння Менделєєва-Клапейрона), яке має вигляд

$$P_0 V = \frac{m}{\mu} RT,$$

де m – маса газу, μ – молярна маса газу, R – універсальна газова стала, а T – абсолютна температура. За означенням густина газу $\rho_0 = \dfrac{m}{V}$, тому шукане відношення набуває форми $\dfrac{P_0}{\rho_0} = \dfrac{R}{\mu} T$.

Таким чином, формулу для швидкості поширення пружної хвилі (швидкість звукової хвилі) в ідеальному газі можна записати у вигляді

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}.$$

Для газу параметр адіабати γ дорівнює відношенню питомих теплоємностей $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V}$, де c_P – питома теплоємність газу при $P = const$, а c_V – питома теплоємність газу при $V = const$, причому $c_P = c_V + R$. Для одноатомного ідеального газу $\gamma = \dfrac{5}{3}$, для двохатомного ідеального газу $\gamma = \dfrac{7}{5}$.

Підставляючи у формулу для v необхідні чисельні значення можна знайти, що швидкість поширення звукових хвиль в повітрі при нормальних умовах (T=273 К) становить приблизно 330 м/с.

Зазвичай при аналізі пружних хвиль у газах і рідинах користуються не зміщенням точок середовища, а додатковим тиском, що виникає при поширенні хвилі. Величину додаткового тиску визначають як різницю між миттєвим значенням тиску і тиском у рівноважному стані $\Delta P = P - P_0$. З попередньо проведеного розгляду за умови, що на рис. 44 $\Delta x \to 0$, випливає, що величина додаткового тиску становить $\Delta P = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Величина параметра α дорівнює добутку $\alpha = \rho_0 v^2$, де v – швидкість поширення хвилі, ρ_0 – густина рівноважного (не збуреного хвилею) середовища.

Таким чином, отримуємо, що додатковий тиск, утворений хвилею, описується виразом

$$\Delta P = -\rho_0 v^2 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

В ідеальному газі ця формула набуває вигляду

$$\Delta P = -\gamma P_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

З нього знаходимо, що для плоскої гармонічної хвилі $\xi(x,t) = \xi_{\max}\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$, яка поширюється в ідеальному газі, вираз для доданого хвилею тиску можна записати у вигляді

$$\Delta P = \gamma P_0 \xi_{\max} k \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Отже, пружну хвилю у газі (чи рідині) можна означити як хвилю поширення тиску, а її рівняння можна записати наступним чином

$$\Delta P = (\Delta P)_{\max} \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

де $(\Delta P)_{\max}$ – амплітудне значення тиску хвилі, яке для ідеального газу пов’язане з амплітудним зміщенням $(\Delta P)_{\max} = \rho_0 v^2 k \xi_{\max} = \rho_0 v \omega \xi_{\max}$, а для ідеального газу – $(\Delta P)_{\max} = \gamma P_0 \xi_{\max} k$.

Наприклад, поряд зі струменем газу, що витікає з реактивного двигуна, амплітудне значення звуку $(\Delta P)_{\max} \sim 300$ Па, що на межі порогу больового відчуття людини (атмосферний тиск становить $P_0 = 10^5$ Па). Для частоти $f = 1$ кГц, на якій людина сприймає звуки найкраще, амплітудне значення зміщення точок повітря при такому стиску буде становити малу величину – лише $\xi_{\max} = \frac{(\Delta P)_{\max}}{\gamma P_0 k} = \frac{\lambda (\Delta P)_{\max}}{2\pi \gamma P_0} = \frac{v_0 (\Delta P)_{\max}}{2\pi f \gamma P_0} = \frac{300 \cdot 340}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^5 \cdot 1{,}7 \cdot 10^3} \approx 10^{-4}$ м.

Водночас, на цій частоті амплітудне значення прискорення точок повітря, яке пропорційне квадрату частоти, буде дуже великим $a_{\max} = \omega^2 \xi_{\max} = (2\pi f)^2 \xi_{\max} = (2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^3)^2 \cdot 10^{-4} \approx 4 \cdot 10^3$ м/с^2. Таким чином, прискорення точки середовища при такому хвильовому процесі може бути в декілька тисяч разів більшим прискорення вільного падіння (більш строго треба розглядати весь спектр хвиль, які утворюються при роботі турбіни двигуна). Таке велике прискорення треба враховувати при розгляді впливу на живі організми звукових хвиль великої амплітуди, а також ультразвукових хвиль, частоти яких більші 20 кГц.

3.9. Енергія пружних хвиль

Визначимо пружну енергію повздовжньої хвилі, яка поширюється вздовж осі X в ізотропному однорідному пружному середовищі і рівняння якої має вигляд

$$\xi(x,t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx + \varphi_0)\,.$$

Виберемо довільну точку середовища. Під час хвильового процесу вона здійснює коливальних рух, тому має кінетичну енергію.

Величина кінетичної енергії точки середовища легко обчислюється за формулою

$$\Delta E_{кін} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \Delta m\,,$$

де $\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$ – миттєва швидкість коливального руху точки, а Δm – її маса.

Як відомо $\Delta m = \rho \Delta V$, де ΔV – об’єм точки середовища, ρ – його густина. Тепер вираз для кінетичної енергії набуде вигляду

$$\Delta E_{кін} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \rho \Delta V\,.$$

Характеризуватимемо енергію хвилі за допомогою фізичної величини, яку називають *густиною кінетичної енергії хвилі* і яку визначають відношенням

$$e_{кін} = \frac{\Delta E_{кін}}{\Delta V}, \text{ коли } \Delta V \to 0\,.$$

З урахуванням попередніх співвідношень бачимо, що миттєве значення густини кінетичної енергії хвилі визначається добутком

$$e_{кін} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2.$$

Для плоскої хвилі швидкість точок середовища легко знаходиться з її (хвилі) рівняння

$$\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} = -\omega \xi_{\max} \sin(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Отже, миттєве значення густини кінетичної енергії плоскої хвилі має вигляд

$$e_{кін} = \frac{\rho}{2} \omega^2 \xi_{\max}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

Середнє значення густини кінетичної енергії хвилі, розраховане за час, значно більший періоду, дорівнює половині її амплітудного значення, а саме:

$$\overline{e}_{кін} = \frac{\rho}{4} \omega^2 \xi_{\max}^2.$$

При поширенні пружної хвилі відбувається деформування точок середовища. Тому під час хвильового процесу кожна точка середовища, крім кінетичної, має ще й потенціальну енергію. Пружна енергія точки середовища може бути представлена

$$\Delta E_{пр} = \frac{1}{2} \kappa (\Delta \xi)^2,$$

де κ – коефіцієнт жорсткості. Величина цього коефіцієнта пропорційна модулю Юнга і визначається розмірами точки середовища: $\kappa = E\dfrac{\Delta S}{\Delta x}$, де Δx – лінійний розмір точки, визначений у напрямку поширення хвилі, а ΔS – її поперечний переріз. З урахуванням таких означень

$$\Delta E_{пр} = \frac{1}{2} E \frac{\Delta S}{\Delta x} (\Delta \xi)^2 = \frac{1}{2} E \Delta S \Delta x \left(\frac{\Delta \xi}{\Delta x}\right)^2.$$

Відношення $\dfrac{\Delta \xi}{\Delta x}$ відповідає відносному видовженню точки середовища, яке у границі $\Delta x \to 0$, $\Delta \xi \to 0$ дорівнює частинній похідній $\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$.

Отже, пружна енергія точки пропорційна її об’єму $\Delta V = \Delta S \Delta x$:

$$\Delta E_{пр} = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Delta V$$

і виникає, коли зміщення неоднорідні по простору. Цьому завжди задовольняє хвильовий процес у суцільному пружному середовищі.

Пружну енергію хвилі характеризують *густиною потенціальної енергії хвилі*, яку визначають відношенням

$$e_{пр} = \frac{\Delta E_{пр}}{\Delta V}, \qquad \text{коли } \Delta V \to 0.$$

З урахуванням цього означення густину пружної енергії повздовжньої хвилі можна записати у вигляді

$$e_{np} = \frac{1}{2}E(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 .$$

Для плоскої пружної хвилі

$$\frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = k\xi_{\max}\sin(\omega t - kx + \varphi_0) .$$

Миттєве значення густини потенціальної енергії плоскої гармонічної повздовжньої хвилі також легко знайти

$$e_{np} = \frac{1}{2}Ek^2\xi_{\max}^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) .$$

Видно, що густини кінетичної та потенціальної енергій хвилі мають однакові фази.

Врахуємо дисперсійне співвідношення $k = \frac{\omega}{v}$, де v – швидкість поширення пружної хвилі, яка в твердому середовищі визначається формулою $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Знайдемо

$$e_{np} = \frac{1}{2}E(\frac{\omega}{v})^2\xi_{\max}^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{1}{2}E\frac{\rho}{E}\omega^2\xi_{\max}^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) = e_{\kappa i н} .$$

Таким чином, у пружній хвилі миттєві значення густин кінетичної та потенціальної енергій однакові. Однаковими є і їх середні значення.

Густина повної енергії повздовжньої пружної хвилі дорівнює сумі густин її кінетичної та потенціальної енергій

$$e = e_{\kappa i н} + e_{np} .$$

Миттєве значення густини повної енергії повздовжньої пружної хвилі визначається виразом

$$e = \frac{\rho}{2}(\frac{\partial\xi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}E(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2 .$$

Для плоскої повздовжньої пружної хвилі густина повної енергії дорівнює подвоєній густині кінетичної енергії або подвоєній густині потенціальної енергії. Отже, мають місце рівності:

$$e = 2e_{\kappa i н} = 2e_{np} = \rho\omega^2\xi_{\max}^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) .$$

З них можна порахувати амплітудне значення густини повної енергії пружної повздовжньої хвилі:

$$e_m = \rho\omega^2\xi_{\max}^2 .$$

Середнє значення густини повної енергії хвилі дорівнює

$$\overline{e} = 2\overline{e}_{\kappa i н} = 2\overline{e}_{np} = \frac{\rho}{2}\omega^2\xi_{\max}^2 .$$

Таким чином, середнє значення густини повної енергії хвилі співпадає з максимальним значенням густини кінетичної енергії (або, що теж саме, максимальним значенням густини потенціальної енергії) хвилі.

3.10. Стоячі хвилі

Уявимо випадок, коли зміщення точок середовища описується виразом

$$\xi = \xi(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi_0),$$

Він свідчить, що в такому хвильовому процесі всі точки середовища коливаються з однаковою частотою і мають однакову фазу, але амплітуди $\xi(\vec{r})$ коливань точок різні. Подібні хвильові процеси називають *стоячими хвилями*.

Розглянемо найбільш простий випадок стоячих хвиль – так звані плоскі стоячі хвилі, коли амплітуда залежить лише від однієї просторової змінної, наприклад від *x*. Плоску стоячу хвилю можна отримати як результат накладання двох гармонічних плоских хвиль, які мають однакову амплітуду, довжину хвилі та частоту і які поширюються в протилежних напрямках.

Дійсно, візьмемо дві хвилі

$$\xi_1(x,t) = \xi_{\max}\cos(\omega t - kx + \varphi_1), \quad \xi_2(x,t) = \xi_{\max}\cos(\omega t + kx + \varphi_2),$$

перша поширюється вздовж осі *X*, а друга протилежно. Припустимо, що зміщення точок середовищах для обох хвиль відбуваються в одному напрямку (нехай обидві хвилі є повздовжніми).

При накладанні двох таких хвиль результуюче зміщення буде дорівнювати сумі

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t).$$

Отже,

$$\xi(x,t) = \xi_{\max}[\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + \cos(\omega t + kx + \varphi_1)].$$

Для знаходження цієї суми використаємо тригонометричну формулу

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

за допомогою якої знаходимо

$$\xi(x,t) = 2\xi_{\max}\cos(kx - \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})\cos(\omega t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}).$$

Видно, що цей вираз відповідає умові для плоскої стоячої хвилі.

З нього отримуємо, що коли $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, рівняння стоячої хвилі набуває простого вигляду

$$\xi(x,t) = 2\xi_{\max}\cos kx \cos\omega t.$$

Як бачимо, амплітуда коливань точок середовища в такій хвилі залежить від координати і визначається за формулою

$$\xi_{\max}(x) = 2\xi_{\max}\left|\cos kx\right|,$$

з чого випливає, що амплітуда плоскої стоячої хвилі є періодичною просторовою функцією з періодом $\dfrac{\lambda}{2}$.

Знайдемо координати точок $x_{\max}$, для яких амплітуда максимальна $\xi_{\max}(x_{\max}) = 2\xi_{\max}$ і які задовольняють очевидній умові

$$\left|\cos kx_{\max}\right| = 1.$$

Це означає, що у стоячій хвилі максимальну амплітуду мають точки з координатами

$$x_{\max} = \frac{\pi n}{k} = \frac{n\lambda}{2},$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$. Точки з координатами $x_{\max}$, в яких амплітуда стоячої хвилі максимальна, називаються *пучностями*. Відстань між найближчими пучностями $\Delta x_{\max} = \dfrac{\lambda}{2}$.

Тепер знайдемо координати точок $x_{\min}$, для яких амплітуда мінімальна $\xi_{\max}(x_{\min}) = 0$ і які фактично задовольняють умові нерухомості

$$\left|\cos kx_{\min}\right| = 0.$$

Як легко зрозуміти, в стоячій хвилі таку амплітуду мають точки з координатами

$$x_{\min} = \frac{\pi}{k}\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

де знову $n = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$. Точки $x_{\min}$, в яких амплітуда стоячої хвилі мінімальна і дорівнює нулю, називаються *вузлами*. Відстань між найближчими вузлами $\Delta x_{\min} = \Delta x_{\max} = \dfrac{\lambda}{2}$.

Точки середовища, які лежать між сусідніми вузлами, мають однакову фазу і коливаються синфазно. При переході через вузол фаза коливань стрибком змінюється на π.

Легко зрозуміти, що відстань між найближчими вузлом та пучністю дорівнює $\dfrac{\lambda}{4}$.

На рис. 45 показано розподіл зміщень точок вздовж осі x в стоячій хвилі для трьох різних моментів часу: $t_1 < t_2 < t_3$. На рис. 45 для моменту часу t_1 всі точки мають амплітудне зміщення і в пучностях з координатою $x_{\max} = 0$ чи $x_{\max} = \lambda$ зміщення дорівнює $2\xi_{\max}$, а в точках $x_{\max} = \lambda/2$ чи $x_{\max} = 3\lambda/2$ зміщення від'ємне і дорівнює $-2\xi_{\max}$. З часом величина зміщень в цих точках

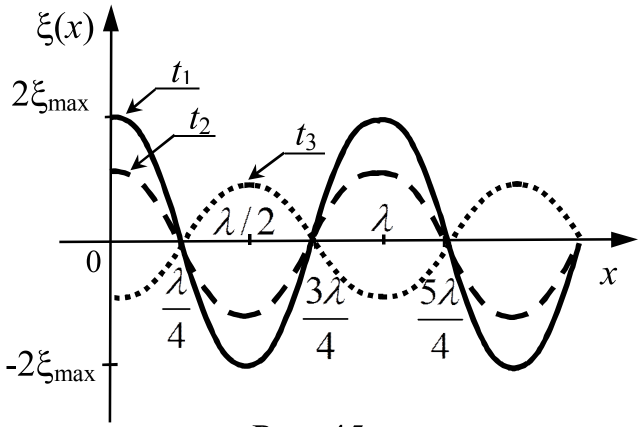

Рис. 45

буде зменшуватися. На рис. 45 наведено розподіл зміщень для моменту часу t_2 , який лежить в інтервалі $t_1 < t_2 < t_1 + T/4$, та моменту часу t_3, який лежить в інтервалі $t_1 + T/4 < t_2 < t_1 + T/2$ де T – період коливань.З цього рисунку також видно, що у вузлах зміщення відсутнє для всіх моментів часу.

Прикладом системи, в якій можуть існувати стоячі хвилі, є натягнута струна. Позначимо ℓ довжину струни. Обидва кінці струни фіксовані (нерухомі) і під час хвильового процесу є вузлами. Відстань між вузлами кратна цілому числу напівдовжин хвиль, тому можна записати рівність

$$\ell = n\frac{\lambda}{2},$$

де $n = 1,2,3...$ – натуральні числа.

Отже, в струні можуть спостерігатися стоячі хвилі з певними фіксованими довжинами хвиль

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}.$$

Визначимо періоди коливань стоячих хвиль в струні. За загальною формулою

$$T_n = \frac{\lambda_n}{v},$$

де v – швидкість поширення хвилі.

Врахуємо, що швидкість поширення хвилі в струні визначається з виразу $v = \sqrt{\frac{F}{S\rho}}$, де F – сила натягу струни, S – площа її перерізу, а ρ – об'ємна густина речовини струни.

В результаті, знаходимо, що періоди коливань різних стоячих хвиль струни описується формулою

$$T_n = \frac{2\ell}{n}\sqrt{\frac{S\rho}{F}}.$$

Коливання струни, які відповідають значенню n=1, називають *основним тоном*, а решту – коливання з n>1 – називають *обертонами*. Частоти $f_n = \frac{1}{T_n}$

називають *власними частотами* коливань струни.
У загальному випадку коливання струни представляють собою суперпозицію гармонічних коливань з різними значенням власних частот і характеризуються їх дискретним спектром.