Глава 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

Електромагнітними хвилями називають процес поширення в просторі електромагнітних коливань. Під час хвильового процесу відбуваються коливання електричного та магнітного полів електромагнітного поля хвилі. Отже, електромагнітні хвилі – це явище поширення в просторі електромагнітного поля.

Дослідження електромагнітних хвиль є надзвичайно важливою задачею, яка має велике практичне значення. Фактично всі сучасні засоби комунікації базуються на законах випромінювання, поширення та взаємодії з середовищем електромагнітних хвиль.

Джерелом електромагнітних хвиль є заряди чи струми, величини яких змінюються з часом. Низькочастотні (до інфрачервоних хвиль) електромагнітні хвилі описуються за допомогою класичної електродинаміки, коли оперують поняттями густини заряду та густини струму. Процеси, що супроводжуються випромінювання електромагнітних хвиль високих частот (світло, рентгенівське чи γ-випромінювання) мають квантово-механічну природу і пов'язані зі зміною стану електронів (носіїв елементарних зарядів) чи ядер в атомах.

На поширення електромагнітних хвиль суттєво впливає середовище. Тому просторовий розподіл електричного $\vec{E}(\vec{r},t)$ та магнітного $\vec{H}(\vec{r},t)$ полів електромагнітної хвилі визначається не тільки особливостями часової залежності заряду або струму її джерела, а й властивостями середовища, в якому поширюється хвиля. Часові залежності коливань полів в точності відповідають часовим залежностям струмів у джерел хвилі, тільки у тому випадку, коли середовище лінійне.

Довільну хвилю можна представити сумою гармонічних хвиль, але це виправдано лише у випадку лінійних середовищ. Тому для них основною задачею є встановлення закономірностей поширення гармонічних електромагнітних хвиль, просторово-часова поведінка полів у якій описується гармонічними функціями.

4.1. Хвильове рівняння електромагнітної хвилі

Запишемо систему рівнянь Максвела – основну систему рівнянь електродинаміки:

закон Фарадея

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

узагальнений закон повного струму

$$rot\vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції магнітного поля

$$div\vec{B} = 0;$$

теорему Остроградського-Гауса для вектора індукції електричного поля

$$div\vec{D} = \rho_{cm} \ ,$$

де використані такі позначення: $\vec{E}$ та $\vec{H}$ – вектори напруженостей електричного та магнітного полів, $\vec{D}$ та $\vec{B}$ – вектори індукції електричного та магнітного полів, $\vec{j}_{np}$ – густина струму провідності, ρ_{cm} – густина сторонніх зарядів.

В лінійному середовищі за відсутності струмів, $\vec{j}_{np}$=0, та за відсутності сторонніх зарядів, ρ_{cm}=0, і коли вектори індукції полів пропорційні їх векторам напруженостей $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $B = \mu\mu_0\vec{H}$, система рівнянь Максвела, як легко переконатися, набуває вигляду:

$$rot\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$div\vec{H} = 0,$$

$$div\vec{E} = 0,$$

де μ, ε – магнітна та електрична проникності середовища, μ_0, ε_0 – магнітна та електрична сталі.

Запис ротора та дивергенції можна здійснити з використанням вектора «набла», який позначають $\vec{\nabla}$ і компонентами якого є частинні похідні $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{n}$ – одиничні вектори (орти).

Знаходження ротора від векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ тотожне знаходженню векторного добутку вектора $\vec{\nabla}$ на вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, або $[\vec{\nabla}\vec{E}]$ та $[\vec{\nabla}\vec{H}]$.

Знаходження дивергенції векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ тотожне скалярному добутку вектора $\vec{\nabla}$ на вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, або $\vec{\nabla}\vec{E}$ та $\vec{\nabla}\vec{H}$.

Таким чином, для лінійного однорідного ізотропного середовища рівняння Максвела можна записати у вигляді

$$[\vec{\nabla}\vec{E}] = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$[\vec{\nabla}\vec{H}] = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\vec{H} = 0,$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = 0.$$

Знайдемо ротор від першого рівняння Максвела та візьмемо часову частинну похідну від другого рівняння Максвела. В прийнятій вище символіці маємо:

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu\mu_0 rot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

$$rot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При знаходженні часової частинної похідної від другого рівняння було враховано, що ротор відповідає процедурі диференціювання по просторовим змінним (по координатам), а тому знаходження часової частинної похідної і знаходження ротора є незалежними діями, тобто їх можна переставити місцями, або, як кажуть фахівці, ці математичні операції *комутують*.

З останньої системи рівнянь легко отримати, що

$$rot(rot\vec{E}) = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

При використанні вектора $\vec{\nabla}$, запис цього рівняння набуває іншого, але тотожного за змістом вигляду:

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{E}]] = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

де зліва у виразі стоїть подвійний векторний добуток.

Нагадаємо правило знаходження подвійного векторного добутку трьох векторів $\vec{A}$, $\vec{B}$ і $\vec{C}$, за яким

$$[\vec{A}[\vec{B}\vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\vec{B}),$$

де скалярний добуток векторів, записано у круглих дужках. Згідно з цим правилом маємо

$$[\vec{\nabla}[\vec{\nabla}\vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{E}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{E} = -(\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{E},$$

де було враховано, що відповідно до четвертого рівняння Максвела, $div\vec{E} = 0$, або, що теж саме, скалярний добуток $\vec{\nabla}\vec{E}$ =0.

Розглянемо скалярний добуток вектора набла самого на себе, $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$, який формально можна представити наступним чином

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z})(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{n}\frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta,$$

де справа позначено лапсасіан.

Отже, в результаті здійснених математичних перетворень приходимо до хвильового рівняння щодо електричного поля

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

З отриманого хвильового рівняння прямо випливає, що швидкість поширення електромагнітної хвилі в однорідному лінійному та ізотропному середовищі визначається за формулою

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}.$$

У цій формулі середовище представлене своїми матеріальними константами – ε та μ. Водночас, на відміну від коливальних процесів іншої природи, які ми вивчали раніше, хвильове рівняння для електричного поля свідчить про фундаментальну властивість електромагнітних хвиль: вони для свого поширення не вимагають матеріального середовища і самовільний процес їх розповсюдження може відбуватися у вакуумі, де ε=1, μ=1. Це, в свою чергу, означає, що швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі скінчена і дорівнює швидкості у ньому світла

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3\cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

В довільному лінійному ізотропному матеріальному середовищі з $\varepsilon \neq 1$ та $\mu \neq 1$ швидкість поширення електромагнітної хвилі може бути записана у вигляді

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

З цим означенням хвильове рівняння електромагнітної хвилі набуває стандартного вигляду

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Описану вище процедуру виведення з рівнянь Максвела хвильового рівняння можна провести з іншою послідовністю, коли спочатку знаходять похідну по часу від першого рівняння Максвела, а ротором діють на друге рівняння Максвела. В результаті, знову буде отримане хвильове рівняння з тією ж самою швидкістю v поширення хвилі, але записане для вектора напруженості магнітного поля:

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}.$$

Таким чином, маємо висновок: поширення обох складових $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля хвилі описується однаковим хвильовим рівнянням. Кожна з проекцій векторів цих полів електромагнітної хвилі також задовольняє хвильовому рівнянню. Наприклад,

$$\Delta E_x = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2},\ \Delta E_y = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2},\ \Delta E_z = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}.$$

Точно такі ж три рівняння для проекцій можна записати і для вектора напруженості магнітного поля хвилі.

4.2. Плоска електромагнітна хвиля

При вивченні плоскої механічної хвилі було встановлено, що вона задовольняє хвильовому рівнянню, форма якого співпадає з хвильовим рівнянням електромагнітної хвилі. Було також отримано, що у загальному випадку розв’язком хвильового рівняння є гармонічна функція, фаза якої залежить від часу та координати у спосіб: $\omega t - \vec{k}\vec{r}$, де ω – частота хвилі, а $\vec{k}$ – її хвильовий вектор. Зрозуміло, що і для електромагнітної плоскої хвилі вектори напруженосте електричного та магнітного полів плоскої електромагнітної хвилі мають задовольняти такій самій функціональній залежності від часу та координати, як і зміщення у плоскій механічній хвилі, оскільки вони є розв’язком однакового (з точки зору математики) диференційного рівняння.

Таким чином, рівняння плоскої електромагнітної хвилі мають вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{E}_{\max}$ – постійний вектор (вектор амплітудної напруженості електричного поля), ω – частота хвилі, яка відповідає частоті коливань електричного поля під час хвильового процесу, а $\vec{k}$ – хвильовий вектор, модуль якого є хвильовим числом і величина якого визначається з формули $k = \left|\vec{k}\right| = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

За означенням довжина хвилі λ відповідає найменшій відстані між точками простору, в яких вектор $\vec{E}$ напруженості електричного поля коливається однаково (синфазно).

Переконаємося, що записане рівняння плоскої електромагнітної хвилі дійсно задовольняє хвильовому рівнянню. Спочатку знайдемо лапсасіан від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі. Здійснюючи прості математичні дії, отримаємо

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\Delta\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) =$$

$$= \vec{E}_{\max}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) =$$

$$= \vec{E}_{\max}\Big[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)\Big] =$$

$$= -\vec{E}_{\max}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0) =$$

$$= -k^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Отже, знаходження лапсасіану від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі зводиться до множення її рівняння на квадрат хвильового числа (хвильового вектора).

Знайдемо тепер другу частинну похідну від вектора напруженості електричного поля плоскої хвилі по часу:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Підставимо знайдені лапсасіан та другу часову частинну похідну в хвильове рівняння

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},$$

що дає:

$$-k^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\frac{1}{v^2}\omega^2\vec{E}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)\,.$$

Звідси легко приходимо до дисперсійного співвідношення для електромагнітних хвиль, яке записується у вигляді

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}, \quad \text{або} \quad \omega = kv,$$

де ми залишили лише додатні значення, оскільки частота завжди додатна.

Таким чином, для всіх електромагнітних хвиль, незалежно від їх довжини хвилі (що охоплює діапазон від радіохвиль до гамма-випрмінювання), які поширюються у лінійних ізотропних однорідних середовищах, включаючи вакуум, частота коливань електричного і магнітного полів у хвилі прямо пропорційна хвильовому числу.

Рівняння плоскої хвилі можна також записати у вигляді дійсної частини від експоненціальної функції з тією ж самою залежністю від аргументу:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\max} \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)},$$

де i – уявна одиниця.

4.3. Зв'язок між векторами напруженості електричного та магнітного полів в електромагнітній хвилі

Знову розглянемо плоску електромагнітну хвилю, рівняння якої має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0),$$

де $\vec{E}_{\max}$ – вектор амплітудної напруженості електричного поля, а $\vec{k}$ – хвильовий вектор з проекціями $\vec{k} = k_x\vec{i} + k_y\vec{j} + k_z\vec{n}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{n}$ – орти.

У просторових компонентах рівняння хвилі має вигляд

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) =$$

$$= (E^x_{\max}\vec{i} + E^y_{\max}\vec{j} + E^z_{\max}\vec{n})\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0),$$

де $E^x_{\max}$, $E^y_{\max}$, $E^z_{\max}$ – проекції вектора $\vec{E}_{\max}$, а k_x, k_y, k_z – проекції хвильового вектора на осі, визначені ортами.

Нагадаємо, що перше рівняння Максвела містить операції ротора від напруженості електричного поля, яку записують у вигляді

$$rot\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Для знаходження ротору застосуємо формальне правило знаходження векторного добутку за допомогою визначника

$$rot\vec{E} = [\vec{\nabla}\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{n} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}) + \vec{n}(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}) .$$

Підставимо у вираз для ротора проекції рівняння хвилі. Отримаємо, що для проекцій $\vec{E}$ вираз для ротора має вигляд

$$rot\vec{E} = [\vec{i}\,(E^z_{\max}k_y - E^y_{\max}k_z) + \vec{j}\,(E^x_{\max}k_z - E^z_{\max}k_x) +$$

$$+ \vec{n}(E^y_{\max}k_x - E^x_{\max}k_y)]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) .$$

Вираз у квадратних дужках, що стоїть перед синусом, є векторним добутком векторів $\vec{k}$ та $\vec{E}_{\max}$.

Отже, нами розраховано дію ротора на вектор $\vec{E}$ електричного поля плоскої хвилі, або

$$rot\vec{E} = [\vec{k}\vec{E}_{\max}]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) .$$

Підставимо тепер знайдений нами вираз для ротора в перше рівняння Максвела. З цього випливає диференційне рівняння, в якому невідомим є напруженість $\vec{H}$ магнітного поля хвилі:

$$[\vec{k}\vec{E}_{\max}]\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} .$$

Для знаходження поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ проінтегруємо отримане диференційне рівняння по часу. Тоді знайдемо, що явний вираз для магнітної складової електромагнітного поля хвиля має вигляд

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k}\vec{E}_{\max}]\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) .$$

Таким чином, приходимо до важливого висновку: коливання напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r},t)$ та напруженості магнітного поля $\vec{H}(\vec{r},t)$ електромагнітної хвилі синфазно, тобто їх фази однакові.

Якщо рівняння для вектора напруженості магнітного поля цієї хвилі записати у вигляді

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0) ,$$

то приходимо до співвідношення $\vec{H}_{\max} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k}, \vec{E}_{\max}]$ між амплітудними значеннями напруженостей магнітного та електричного полів хвилі.

Внесемо у попередньому рівнянні косинус під знак векторного добутку, звідки отримаємо схожий вираз, який пов'язує вже миттєві значення векторів напруженості електричного та магнітного поля хвилі,

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}[\vec{k}, \vec{E}].$$

Отже в цілому маємо, що вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним не тільки до напрямку поширення хвилі, а й перпендикулярний до вектора напруженості електричного поля.

Здійснену схему розрахунків можна повторити для вектора напруженості магнітного поля, взявши його у якості вихідної функції. Для цього треба розрахувати ротор від $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_{\max}\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$, підставити його в друге рівняння Максвела

$$rot\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Далі необхідно за тією ж процедурою отримати диференційне рівняння для вектора напруженості електричного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$. З такого розрахунку знову буде видно, що коливання полів у хвилі є синфазними. Принципово важливо, що з проведення цих розрахунків слідує ще одне важливе співвідношення між векторами напруженостей полів у хвилі, а саме:

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}[\vec{k}, \vec{H}].$$

З нього випливає аналогічний попередньому висновок: вектор напруженості магнітного поля хвилі є перпендикулярним до напрямку поширення хвилі та до вектора напруженості електричного поля.

Отже, у підсумку маємо, що вектори напруженостей $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітного поля хвилі взаємно перпендикулярні між собою $\vec{E} \perp \vec{H}$, та перпендикулярні до напрямку поширення хвилі $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$.

В результаті, доведено, що електромагнітна хвиля є *поперечною хвилею* ($\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$). В такій хвилі вектори напруженостей $\vec{E}$ та $\vec{H}$ перпендикулярні між собою та коливаються з однаковою фазою (рис. 46).

На рис. 46 показано миттєвий просторовий розподіл для векторів напруженостей електричного та магнітного полів плоскої електромагнітній хвилі, яка поширюється вздовж осі *Y*. Вектори напруженостей на рис. 46

позначено стрілками: вектори напруженості електричного поля суцільними стрілками, а вектори напруженості магнітного поля пунктиром.

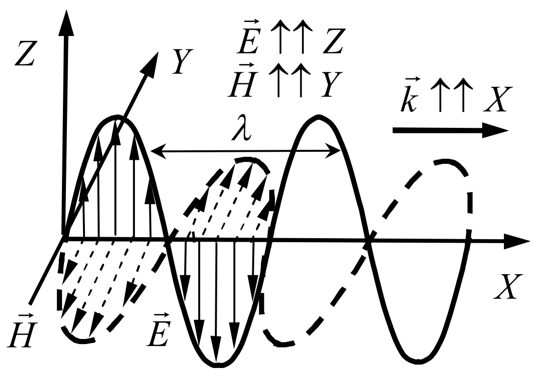

Рис. 46

Рівняння для напруженостей електричного та магнітних полів хвилі, поля якої зображені на рис. 46, мають вигляд

$$E_z = E_{\max} \cos(\omega t - kx),$$

$$H_y = H_{\max} \cos(\omega t - kx).$$

Вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ цієї хвилі коливається у площині *XZ*, а вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$ – у площині *YX*, тобто $\vec{E} \perp \vec{H}$.Обидва вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ перпендикулярні до осі *X*, вздовж якої поширюється хвиля ($\vec{k} \uparrow\uparrow X$).

Оскільки в електромагнітній хвилі $\vec{E} \perp \vec{H}$, $\vec{E} \perp \vec{k}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$, то для модулів цих векторів виконується рівність

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{k}{\omega} E,$$

де $H = \left|\vec{H}\right|$, $E = \left|\vec{E}\right|$.

Коли врахувати дисперсійне співвідношення $\omega = kv$ та формулу для швидкості хвилі $v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$, то легко отримати співвідношення

$$\sqrt{\mu\mu_0} H = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E \ ,$$

яке виконується і для миттєвих, і для амплітудних значень напруженостей електричного та магнітного полів, що як складові утворюють електромагнітне поле хвилі.