Глава 5. ОПТИКА

Розділ фізики, в якому вивчають природу випромінювання світлових електромагнітних хвиль, закони їх поширення та взаємодію світла з речовиною, називають *оптикою*. *Світло* – це електромагнітне випромінювання, що вміщує поперечні плоскі хвилі довжиною приблизно від 400 *нм* до 760 *нм*, які сприймаються людським оком (*видиме* світло). Чутливість людини до хвиль цього діапазону обумовлена її існуванням на Землі як планеті, для якої найбільш ярким джерелом світла є Сонце, причому зазначений діапазон є найбільш оптимальним. Різні довжини електромагнітних хвиль око людини сприймає по-різному – від найбільш довгих, що відповідають червоним кольорам, до найбільш коротких, що відповідають фіолетовому діапазону. А взагалі число основних кольорів, яке зазвичай розрізняє людське око, дорівнює семи: червоний, помаранчевий, жовтий, зелений, блакитний, синій, фіолетовий, чутливість до сприйняття яких також неоднакова. Як правило, око людини найкраще сприймає світло з довжинами хвиль близько 555 *нм*, які відповідають зеленому кольору і його відтінкам.

В оптиці вивчають також *інфрачервоне* випромінювання, довжини хвиль якого знаходяться у діапазоні від 760 *нм* до 1 *мм*. Інфрачервоне випромінювання складається з електромагнітних хвиль, частоти яких менші за частоти видимого світла і які мають в основному такі ж самі властивості, що і видиме світло.

Електромагнітні хвилі з довжиною, з довжиною, що лежить в діапазоні від 10 *нм* до 400 *нм*, відносять до *ультрафіолетового* випромінювання. Воно має частоти більші за частоти видимого світла і також є предметом вивчення оптики, бо за всіма ознаками подібне до хвиль видимого діапазону.

У вакуумі, де $\varepsilon=1$, $\mu=1$, швидкість світла визначається за формулою

$$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\approx 3\cdot 10^8 \ \text{м/с},$$

в якій ε_0 та μ_0 – електрична та магнітна сталі.

Швидкість поширення світлових хвиль у лінійному ізотропному однорідному середовищі відрізняється від c і залежить від його матеріальних констант:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}} \quad \text{або} \quad v=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

де ε і μ – діелектрична та магнітна сприйнятливості відповідної речовини. Як правило, більшість оптично прозорих матеріальних тіл немагнітні, тому для них з великою точністю можна прийняти $\mu=1$, що дає

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Тіла, які випромінюють електромагнітні хвилі світлового діапазону, називаються *джерелами світла*. Джерела світла розрізняються за способом створення випромінювання (теплове, люмінесцентне, лазерне, тощо), а також за його фізичними характеристиками (біле, монохроматичне, поляризоване, частково поляризоване, тощо).

Точковим джерелом світла називають джерело, розміри якого значно менші за відстані, на яких спостерігають світло за умови, що його випромінювання ізотропне, тобто однакове в усі боки.

5.1. Геометрична оптика

Електромагнітне поле світлових хвиль є короткохвильовим, бо його довжини хвиль близькі до $5 \cdot 10^{-7}$ *м*, а частоти надзвичайно великі – більші за 10^{14} *Гц*. Отже, при вирішенні деяких задач опису поширення світлових хвиль можна застосовувати наближення, коли припускається, що $\lambda \to 0$ (хоча, звісно, довжина хвилі ніколи не може бути рівною нулеві, бо це унеможливлює саме існування хвиль). За такого припущення поширення світла можна описати, спираючись на геометричні поняття. Розділ оптики, в якому для опису поширення світла та його характеристик користуються уявленнями з просторової геометрії, називається *геометричною оптикою*.

Так, при розгляді поширення світла вводять поняття пучка, а також – променя світла. *Пучок* світла можна отримати при освітленні непрозорого тіла з круглим отвором. В такому випадку створюється циліндричний або конічний пучок, в межах якого відбувається поширення світла. Твірні, або осі пучка, а також інші його лінії, вздовж яких поширюється світло, називають *світловими променями*. Промінь, таким чином, є геометричним поняттям. Саме вздовж променя світлова хвиля переносить свою енергію.

Геометрична оптика ґрунтується на твердо встановленому експериментальному факті *прямолінійного* поширення світла в однорідних середовищах. Дійсно, при опроміненні непрозорих тіл світлом від точкового джерела на екрані виникають чіткі границі тіні цього тіла.

Другим важливим експериментальним фактом є *незалежність* світлових променів. При перетині світлових променів вони не збурюють один одного, не змінюють напрямку свого поширення, а також не впливають на поширення інших світлових променів.

Третій експериментальний факт стосується принципу *зворотності поширення світла*. Якщо назустріч променю направити інший, то він пройде по тому ж самому шляху, що й перший, але в зворотному до нього напрямку.

5.1.1. Принцип Ферма

Лінія, яка відповідає ходу світлового променя в будь-якому середовищі, визначається за допомогою *принципу Ферма*. Цей принцип є постулатом і твердо приписує світловому променю рухатися з однієї точки до іншої за найменший з можливих час.

Продемонструємо цей принцип. Нехай світловий промінь поширюється вздовж суцільної кривої (див. рис. 52) від точки *1* до точки *2* у неоднорідному середовищі, в якому ε або μ – діелектрична та магнітна сприйнятливості середовища – не є однаковим у різних точках. При цьому крива руху світла вже не буде прямою, а може викривлятися.

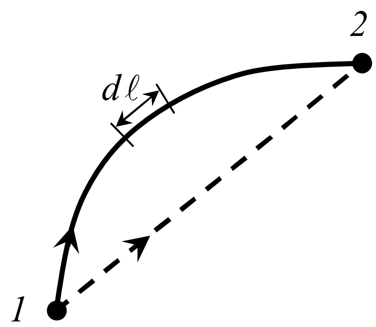

Рис. 52

Візьмемо на цій кривій малу ділянку довжиною $d\ell$. Час, за який світло пройде цю ділянку, дорівнює $dt = \dfrac{d\ell}{v}$, де v – швидкість поширення світла по цій ділянці траєкторії. Зрозуміло, що повний час τ поширення світла між точками *1* і *2* визначається криволінійним інтегралом

$$\tau = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{d\ell}{v}.$$

За принципом Ферма час поширення світла з точки 1 до точки 2, має бути найменшим. Врахуємо, що швидкість поширення світла

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \qquad \text{або} \qquad v = \frac{c}{n},$$

де c – швидкість світла у вакуумі, а n – *показник заломлення* середовища: $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ (у немагнітних речовинах $n = \sqrt{\varepsilon}$). Оскільки $n = \dfrac{c}{v} > 1$, то показник заломлення завжди показує, наскільки зменшується швидкість поширення світла у середовищі відносно вакууму.

Таким чином, час поширення світла від точки 1 до точки 2 можна представити у спосіб

$$\tau = \frac{1}{c}\int_0^{\ell_{12}} n(\ell)d\ell\,,$$

який враховує, що величина показника заломлення є різною в різних точках середовища, а ℓ_{12} позначено довжину кривої від точки 1 до точки 2.

Інтеграл в отриманому виразі має розмірність довжини, яку в геометричній оптиці називають *оптичною довжиною шляху* і позначають

$$L = \int_0^{\ell_{12}} n(\ell)d\ell\,.$$

З урахуванням такого означення час поширення світла можна записати у вигляді

$$\tau = \frac{L}{c}\,.$$

Звідси бачимо, що час поширення світла дійсно буде мінімальним, коли оптична довжина шляху приймає найменше значення.

Зауважимо, що принцип Ферма можна сформулювати інакше: світловий промінь серед усіх можливих обирає для свого поширення таку траєкторію, оптична довжина шляху якої виявляється мінімальною.

В однорідному середовищі, що означає незмінність показника заломлення в усіх точках, або $n(\ell) = n$, оптична довжина шляху буде прямо пропорційною довжині ділянки кривої

$$L = n\int_0^{\ell_{12}} d\ell = n\ell_{12}\,.$$

Очевидно, що оптична довжина шляху для однорідного середовища буде найменшою, коли найменшою буде довжина кривої. Зрозуміло також, що відстань між двома точками найменша, коли ці точки лежать на прямій (на рис. 52 вона позначена пунктиром). Отже, принцип Ферма задовольняє закону прямолінійного поширення світла в однорідному середовищі, або, можна стверджувати, що таке поширення у відповідних речовинах випливає з принципу Ферма. Легко перевірити, що цей принцип також задовольняє принципу зворотності.

5.1.2. Закони відбивання та заломлення світла

На межі двох середовищ спостерігаються явища відбивання світла та заломлення світла. Ці явища супроводжуються зміною напрямку поширення світла без зміни частоти хвилі. Розглянемо випадок, коли межею між двома однорідними ізотропними середовищами є ідеальна площина (див. рис. 53).

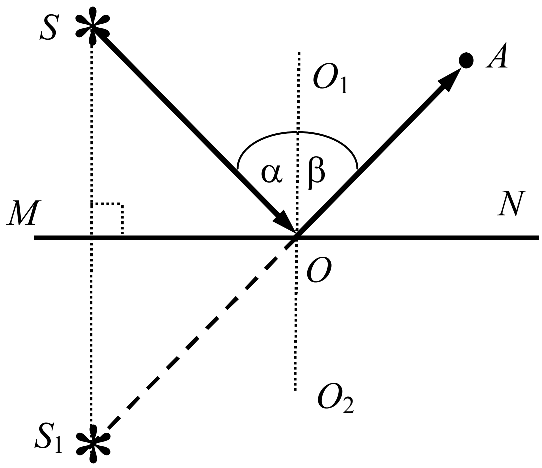

Рис. 53

На цій межі, яку на рисунку позначено MN, відбувається відбиття світлових променів, джерело яких на рис. 53 позначено S. На ньому також показано хід променя, який йде від джерела S до межі MN, відбивається в точці O, а потім прямує до точки A. Згідно з принципом Ферма відстань, яку проходить світло від джерела S до точки A, має бути найменшою.

Проведемо до межі MN перпендикуляр O_1O_2, який проходить через точку O. В точці O промінь відбивається від границі. Кут між падаючим променем та перпендикуляром O_1O_2 позначають α. Цей кут називають *кутом падіння*. Кут між відбитим променем та перпендикуляром до межі називають *кутом відбивання* і позначають β.

З метою обчислення положення токи O, для якого сума відстаней $SO+OA$ мінімальна, розглянемо точку S_1, яка симетрична відносно межі MN до точки S.

З умов симетрії положення точок S та S_1 повинна виконуватися рівність кутів

$$\alpha = \angle S_1OO_2.$$

З цієї симетрії також випливає, що сума відстаней $SO+OA=S_1O+OA$. Сума відрізків $SO+OA$ буде найменшою, коли найменшою є сума S_1O+OA. Очевидно, що сума відстаней S_1O+OA буде найменшою, якщо точка O лежить на прямій, утвореній точками S_1 та A.

Кути β та $\angle S_1OO_2$ є суміжними, а тому

$$\beta = \angle S_1OO_2.$$

Праві частини обох рівностей для кутів однакові, тому мають бути однаковими і ліві частини цих рівностей. Звідси приходимо до співвідношення, яке називають *законом відбивання світла* і яке гласить:

падаючий промінь, відбитий промінь та перпендикуляр до межі, що проведений через точку відбивання, лежать в одній площині, а кут падіння дорівнює куту відбивання, тобто

$$\alpha=\beta.$$

З точки зору спостерігача, який буде знаходитися у точці A, відбитий промінь начебто поширюється з точки S_1, яку називають *уявним* джерелом світла.

Тепер розглянемо явище заломлення світла, коли воно перетинає межу двох однорідних ізотропних середовищ. Суть явища полягає в тому, що при заломленні світло змінює напрямок поширення. Для опису цього явища знову використаємо принцип Ферма. Розрахуємо час поширення світла від джерела S, яке знаходиться у середовищі з показником заломлення n_1, до довільної точки O, яка знаходиться в середовищі з показником заломлення n_2. Межу між цими середовищами на рис. 54 позначено MN. Точку, в якій відбувається заломлення променя, позначимо O. Аналогічно попередньому розгляду відбивання світла проведемо до межі MN в точці O перпендикуляр O_1O_2 (див. рис. 54).

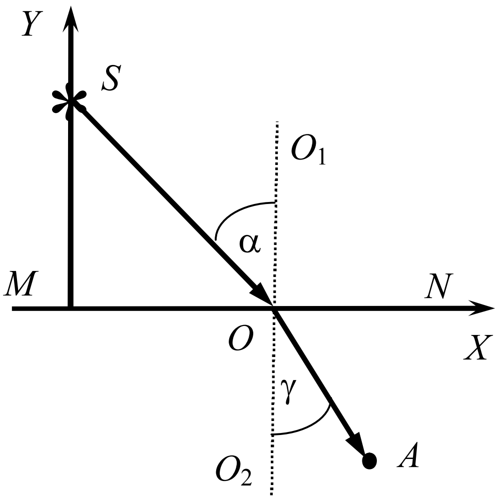

Рис. 54

У явищі заломлення кут α між падаючим променем і перпендикуляром теж називають *кутом падіння*, а кут γ між перпендикуляром до межі і заломленим променем називають *кутом заломлення*.

Точки S, O та A лежать в одній площині, тому для визначення положення цих точок використаємо ортогональну систему координат, в якій джерело знаходиться на осі Y, а вісь X лежить на межі і проходить через точку O. В цій системі точка S має координати $(0, y_1)$, точка O – координати $(x, 0)$, а точка A – координати (x_2, y_2).

Час t поширення світла від джерела S до точки A при заломленні в точці O дорівнює сумі $t = t_1 + t_2$, де t_1 – час проходження падаючим променем відстані SO, а t_2 – час проходження заломленим променем відстані OA. Цю суму можна легко записати у вигляді

$$t=\frac{SO}{v_1}+\frac{OA}{v_2}=\frac{\sqrt{y_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{y_2^2+(x_2-x)^2}}{v_2},$$

де v_1 – швидкість світла у середовищі до заломлення, а v_2 – швидкість світла після заломлення. Положення точки O має бути таким, щоб t було найменшим. Знайдемо похідну $\frac{dt}{dx}$, яка має дорівнювати нулеві. Зробивши необхідні прості обчислення, приходимо до рівняння:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{y_1^2 + x^2}} - \frac{x_2 - x}{v_2\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x)^2}} = 0.$$

Враховуючи, що $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{y_1^2 + x^2}}$, а $\sin\gamma = \frac{x_2 - x}{\sqrt{y_2^2 + (x_2 - x)^2}}$, наведену вище рівність перепишемо у вигляді

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\gamma}{v_2}.$$

Звідки отримуємо співвідношення

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2},$$

за яким відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення не залежить ні від кута падіння, ні від кута заломлення, а визначається лише швидкостями поширення світла у відповідних середовищах.

Якщо тепер врахувати, що $v_1 = \frac{c}{n_1}$, а $v_2 = \frac{c}{n_2}$, то отримаємо інше співвідношення, яке повністю задає проходження світлового променя через межу двох середовищ, а саме:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{або} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n_{21},$$

де

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{або} \quad n_{21} = \frac{v_1}{v_2}$$

– так званий *відносний показник заломлення*.

Таким чином, використання принципу Ферма дозволило довести, що для двох однорідних ізотропних середовищ виконуються *закон заломлення світла*, за яким падаючий промінь, заломлений промінь та перпендикуляр до межі, проведений до точки падіння, лежать в одній площині, а відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення дорівнює відносному показнику заломлення.

З двох середовищ, що межують, середовище з меншим значенням абсолютного показника заломлення називають *оптично менш густим*, а середовище з більшим значенням абсолютного показника заломлення –

оптично більш густим. У оптично більш густого середовища швидкість поширення світла менша за швидкість світла в оптично менш густому середовищі.

З цього випливає, що при поширенні світла з оптично менш густого середовища до оптично більш густого середовища кут падіння є більшим за кут заломлення. І, навпаки, коли світло переходить з більш оптично густого середовища до оптично менш густого середовища кут падіння є меншим за кут заломлення.

Звідси легко зрозуміти, що при поширенні світла з оптично більш густого середовища до оптично менш густого середовища (що відповідає $n_1 > n_2$) може спостерігатися явище, що зветься *повним внутрішнім відбиванням*. Дійсно, змінюючи величину кута α, можна досягти умови $\gamma = \pi / 2$, яка свідчить, що заломлений промінь поширюватиметься вздовж межі між середовищами. При цьому явище заломлення не відбуватиметься, а матиме місце лише явище відбивання світла.

Граничний кут, починаючи з якого відбувається повне внутрішнє відбування, просто знаходиться з закону заломлення, якщо у відповідне відношення синусів підставити значення $\sin\gamma = \sin(\pi / 2) = 1$. В результаті маємо, що цей кут визначається з рівності

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Отже, приходимо до остаточного висновку, що для всіх кутів падіння $\alpha > \alpha_0$, заломлення не відбувається і світло може лише відбиватися.

5.1.3. Закони відбивання та заломлення як наслідок теорії Максвела

Як ми бачили, при проходженні хвилею межі двох діелектриків відбувається зміна напрямку поширення хвилі. Але слід пам'ятати, що світлова хвиля є поширенням електромагнітного поля. Тому, коли на межі двох діелектриків відсутні сторонні заряди і не течуть поверхневі струми, при переході через неї мають виконуватися граничні умови для векторів напруженостей електричного та магнітного полів. Ці умови записуються наступним чином

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \; D_{1n} = D_{2n},$$

де індекси 1 та 2 позначають середовища, індекси τ позначають тангенціальні складові (проекції) векторів полів на площину межі, а індекси n позначають нормальні до межі складові векторів, $\vec{E}$ – вектор напруженості електричного поля в околі межі, $\vec{D}$ – вектор індукції цього поля, $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля в околі межі, $\vec{B}$ – вектор індукції цього поля.

У випадку електромагнітного поля хвилі з чотирьох рівнянь граничних умов незалежними залишаються лише два. Дійсно, запишемо узагальнений закон повного струму, за яким $\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$, де перший інтеграл – це циркуляція вектора напруженості магнітного поля, який розраховують по замкненому контуру, а другий – потік похідної вектора електричної індукції через поверхню, натягнуту на цей контур.

Виберемо контур таким чином, щоб він був паралельним до межі. Тоді циркуляція включатиме тільки тангенціальну складову напруженості магнітного поля. Натягнута на контур поверхня буде паралельною до межі, а отже інтеграл потоку може розраховуватися лише по нормальній складовій похідної вектора електричного зміщення. Для такого контуру можна записати

$$\oint H_\tau d\ell_\tau = \int \frac{\partial D_n}{\partial t} dS .$$

Бачимо, що з рівності $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ випливає рівність для часових похідних $\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}$. Для плоскої електромагнітної хвилі знаходження похідної по часу еквівалентне множенню рівняння хвилі на $i\omega$, де i – уявна одиниця, а ω – частота хвилі. Виходячи з цього маємо, що виконання рівності $\frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}$ для хвилі призводить до виконання рівності $D_{1n} = D_{2n}$. В результаті, маємо, що пара рівнянь $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, і $D_{1n} = D_{2n}$ не є незалежною.

У такий самий спосіб, але розглядаючи інтегральний запис закону Фарадея, можна отримати, що пара рівнянь $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $B_{1n} = B_{2n}$ також не є незалежною.

Отже, для електромагнітного поля хвилі на межі двох діелектриків незалежними є два рівняння для тангенціальних компонент напруженостей електричного та магнітного полів.

Позначимо частоти $\omega_{пад}$, $\omega_{від}$, $\omega_{зал}$ та хвильові вектори $\vec{k}_{пад}$, $\vec{k}_{від}$, $\vec{k}_{зал}$ для падаючої, відбитої та заломленої хвиль, відповідно. Запишемо їх рівняння:

$$\vec{E}_{пад}(\vec{r},t)=\vec{E}^{(пад)}_{\max}e^{i(\omega_{пад}t-\vec{k}_{пад}\vec{r})},\ \vec{E}_{від}(\vec{r},t)=\vec{E}^{(від)}_{\max}e^{i(\omega_{від}t-\vec{k}_{від}\vec{r})},$$

$$\vec{E}_{зал}(\vec{r},t)=\vec{E}^{(зал)}_{\max}e^{i(\omega_{зал}t-\vec{k}_{зал}\vec{r})}.$$

Вектори $\vec{k}_{пад}$, $\vec{k}_{від}$, $\vec{k}_{зал}$ лежать у площині падіння, тому умову рівності тангенціальних складових полів в обох середовища запишемо наступним чином

$$E^{(пад)}_{\tau}+E^{(від)}_{\tau}=E^{(зал)}_{\tau}.$$

Введемо координатні осі. Вісь X розташуємо в площині межі середовищ і в площині падіння, а вісь Z – перпендикулярно до межі. На межі $z=0$. В цьому випадку рівняння для рівності тангенціальних складових поля приймуть вигляд

$$E^{(пад)}_{\max,\tau}e^{i(\omega_{пад}t-k^{(пад)}_{x}x)}+E^{(від)}_{\max,\tau}e^{i(\omega_{від}t-k^{(від)}_{x}x)}=E^{(зал)}_{\max,\tau}e^{i(\omega_{зал}t-k^{(зал)}_{x}x)}.$$

Зазначене рівняння має виконуватися для всіх моментів часу і для всіх координат x. Це можливо, лише коли для частот хвиль і проекцій хвильового вектора виконуються рівності

$$\omega_{пад}=\omega_{від}=\omega_{зал}\equiv\omega, \qquad k^{(пад)}_{x}=k^{(від)}_{x}=k^{(зал)}_{x}.$$

З першої рівності випливає, що процес відбивання та заломлення не впливає на частоту хвилі.

Проаналізуємо окремо співвідношення для проекцій хвильових векторів. Для розрахунку цих проекцій використаємо кут падіння α, кут відбивання β та кут заломлення γ. Врахуємо також, що у першому середовищі хвильові числа однакові (бо однакові частоти падаючої і відбитої хвиль), тобто $k_{пад}=k_{від}=\dfrac{\omega}{v_1}$, а у другому середовищі хвильове число $k_{зал}=\dfrac{\omega}{v_2}$, де v_1 та v_2 – швидкості поширення хвиль. В результаті, з рівнянь для шуканих проекцій хвильового вектора отримуємо дві рівності:

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\alpha=\frac{\omega}{v_1}\sin\beta, \qquad \frac{\omega}{v_1}\sin\alpha=\frac{\omega}{v_2}\sin\gamma.$$

З них прямо випливає закон відбивання, або рівність $\alpha=\beta$, та закон заломлення, або відношення $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\dfrac{v_1}{v_2}$.

5.2. Дисперсія світла

Дисперсією світла називають залежність показника заломлення від довжини хвилі. Вперше явище дисперсії відкрив і дослідив Ньютон. Після направлення на призму тонкого пучка сонячного (білого) світла він, спостерігав створюване на екрані зображення з райдужною мережею кольорів (див. рис. 55). Сонячне світло, як відомо, складається з хвиль різних довжин. При проходженні хвилями призми вони по-різному, залежно від їх довжини, заломлюються і відхиляються від початкового напрямку падаючого на призму світла. З дослідів також випливає, що відхилення променів залежить від кута φ при вершині призми, який називають *кутом заломлення призми*, та від величина показника заломлення речовини призми.

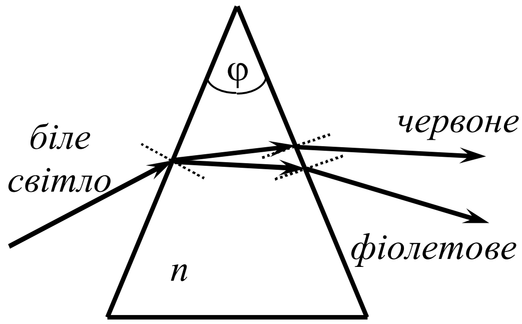

Рис. 55

На рис. 56 буквою γ позначено повний кут відхилення променя, після проходження ним призми. Легко бачити з побудови, що цей кут дорівнює $\gamma = \alpha - \delta + \beta - \chi$. З закону заломлення маємо, що $\sin\alpha = n\sin\delta$, а $\sin\beta = n\sin\chi$. Якщо обрати умови проходження такими, щоб кути φ та α були малими, то інші кути δ, γ та β також будуть малими. Тому використовуючи наближення, що синус малого кута визначається самим кутом, можна записати: $\alpha = n\delta$, $\beta = n\chi$. Звідси зразу знаходимо, що $\gamma = (\delta + \chi)(n-1)$. Далі врахуємо, як видно з рис. 56, що $\delta + \chi = \varphi$.

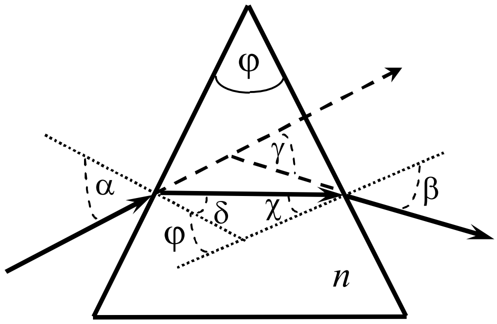

Рис. 56

За таких умов кут відхилення променя визначається добутком

$$\gamma = (n-1)\varphi .$$

Експеримент свідчить, що цей кут залежить також від довжини хвилі, а це можливо лише у випадку, коли показник заломлення речовини призми залежить від цієї довжини.

Зчислені дослідження дозволили встановити, що залежність показника заломлення від довжини хвилі можна з великою точністю представити у вигляді:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_{вак}^2} + \frac{C}{\lambda_{вак}^4},$$

де A, B, C – деякі параметри, які залежать від речовини і значення яких знаходять шляхом вимірювань, $\lambda_{вак}$ – довжина хвилі у вакуумі.

Більше того, емпірична формула для $n(\lambda)$ досить добре описує дисперсію показника заломлення для прозорих тіл, причому у більшості випадків можна обмежитися першими двома доданками, покладаючи $C \approx 0$. Наведена функціональна залежність $n(\lambda)$ не тільки розкриває і пояснює зміст уявлень про дисперсію світла у матеріальних середовищах, а й дозволяє кількісні дослідження явищ відбивання та заломлення. Суттєво, що для більшості випадків значення констант B і C таке, що похідна $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0$ (див. рис. 57). Таку дисперсію називають *нормальною*. З урахуванням тієї обставини, що фазова швидкість хвилі обернено пропорційна до показника заломлення і тим самим $v(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}$, легко отримати, що при нормальній дисперсії $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} > 0$.

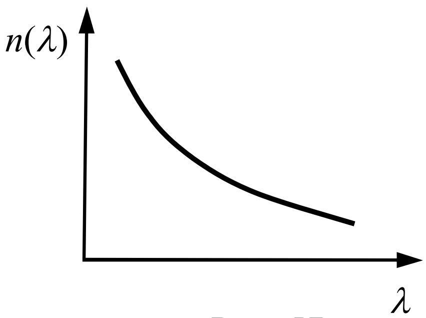

Рис. 57

Удосконалення методик оптичних експериментів дозволило встановити, що у деяких речовинах для певного інтервалу частот спостерігається явище *аномальної дисперсії*, коли $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} > 0$ (див. рис. 58). Як легко переконатися, аномальній дисперсії відповідає умова $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} < 0$.

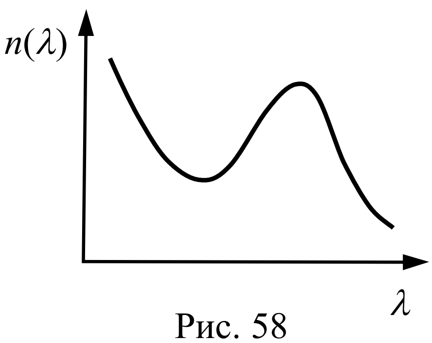

Рис. 58

У більшості відомих випадків аномальна дисперсія експериментально спостерігається в тій області довжин хвиль, де дана речовина інтенсивно поглинає світло.

Згадаємо, що показник заломлення немагнітної оптично прозорої речовини визначається за формулою

$$n = \sqrt{\varepsilon},$$

де ε – діелектрична проникність цієї речовини. Тоді очевидно, що явище дисперсії, або залежність показника заломлення від довжини хвилі, є наслідком залежності діелектричної проникності тієї чи іншої речовин від довжини хвилі світла. Саме завдяки такій залежності можна у лабораторних умовах спостерігати відкрите Ньютоном явище штучного утворення райдуги.

5.2.1. Електронна теорія дисперсії світла

Зрозуміло, що пояснення явища дисперсії світла слід шукати у природі мікроскопічної взаємодії електромагнітного поля з речовиною. Зокрема, під дією електричного поля хвилі виникає залежність від довжини хвилі електричної поляризації речовини, що обумовлено відносним зміщенням зв'язаних зарядів різних знаків. Величина такої поляризації визначається діелектричною проникністю $\varepsilon(\lambda)$, знаючи яку легко обчислити показник заломлення $n(\lambda)$.

З електрики відомо, що діелектрична проникність пропорційна діелектричній сприйнятливості,

$$\varepsilon(\lambda)=1+\text{æ}(\lambda),$$

де $\text{æ}(\lambda)$ – діелектрична сприйнятливість. Діелектрична сприйнятливість виступає коефіцієнтом пропорційності між вектором поляризації $\vec{P}(t)$ та вектором напруженості діючого електричного поля $\vec{E}(t)$:

$$\vec{P}(t)=\varepsilon_0\,\text{æ}\,\vec{E}(t),$$

а тому вираз для електричної проникності можна записати у вигляді

$$\varepsilon=1+\frac{P}{\varepsilon_0 E},$$

де $P=\left|\vec{P}(t)\right|$ та $E=\left|\vec{E}(t)\right|$, який прямо свідчить, що $\vec{P}=\vec{P}(\lambda)$.

Для знаходження діелектричної проникності треба знайти відношення величин об'ємної поляризації до напруженості електричного поля, що визвало цю поляризацію.

Електромагнітні хвилі оптичного діапазону мають настільки високі частоти коливань, що під дією електричного поля таких хвиль встигають зміщуватися і рухатися навколо свого рівноважного положення лише найбільш легкі частинки, якими у будь-якому середовищі є електрони. Подібні коливні зміщення призводять до утворення атомних дипольних моментів, величина яких дорівнює $\vec{p}=-e\vec{r}$, де e – заряд електрона, а $\vec{r}$ –

вектор його зміщення навколо нерухомого ядра атому. Тут враховано, що вектор дипольного моменту пропорційний вектору плеча диполя, який визначає положення додатного заряду відносно від'ємного заряду, тому у формулі для дипольного моменту з'явився мінус. Об'ємна густина поляризації тим більша, чим більша густина таких диполів, тобто

$$\vec{P} = N_{дип}\vec{p} = -N_{дип}e\vec{r},$$

де $N_{дип}$ – кількість диполів в одиниці об'єму. Будемо вважати, що під впливом поля хвилі зміщуються тільки зовнішні електрони атомів, бо вони найслабкіше зв'язані з їх ядрами. За такого наближення число $N_{дип}$ є пропорційним концентрації атомів у діелектрику.

Вектор напруженості електричного поля у будь-якій точці речовини змінюється за гармонічним законом $\vec{E}(t) = \vec{E}_{\max}\cos\omega t$. На електрон атома в електричному полі діє сила $\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$, де знову враховано, що заряд електрона від'ємний.

Отже, під час хвильового процесу на електрон буде діяти періодична сила

$$\vec{F} = -e\vec{E}_{\max}\cos\omega t,$$

за рахунок якої електрон здійснюватиме вимушені коливання.

Рівняння руху електрона має вигляд:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k_{ат}\vec{r} - e\vec{E}_{\max}\cos\omega t,$$

де m – маса електрона, $-k_{ат}\vec{r}$ – квазіупружна сила, яка прагне повернути електрон до його положення рівноваги в атомі і яку вважаємо пропорційною вектору зміщення, $k_{ат}$ – коефіцієнт ефективної жорсткості, визначається другою похідною потенціальної енергії електрона в атомі.

Після ділення цього рівняння на масу отримаємо диференційне рівняння вимушених коливань:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2\vec{r} = -\frac{e\vec{E}_{\max}}{m}\cos\omega t,$$

де введено позначення $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_{ат}}{m}}$ для частоти власних коливань електрона.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді функції

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{\max}\cos\omega t.$$

При її підстановці у диференційне рівняння отримаємо звичайне лінійне рівняння, з якого знайдемо величину невідомої амплітуди:

$$\vec{r}_{\max} = -\frac{e\vec{E}_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Таким чином, під дією гармонічного електричного поля хвилі електрон атома здійснює періодичні зміщення, величина яких пропорційна вектору напруженості електричного поля. Повна залежність коливального руху електрону має форму:

$$\vec{r}(t) = -\frac{e\vec{E}_{\max}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t.$$

Розрахуємо тепер вектор об’ємної поляризації, який пропорційний напруженості електричного поля і залежить від частоти хвилі, а саме:

$$\vec{P}(t) = -N_{дип}e\vec{r} = \frac{N_{дип}e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\vec{E}(t).$$

Звідси отримуємо шукане відношення величини поляризації до величини напруженості електричного поля хвилі залежить від частоти хвилі:

$$\frac{P}{E} = \frac{N_{дип}e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Підставимо це співвідношення до наведеного вище виразу для діелектричної проникності. В результаті, приходимо до висновку, що величина діелектричної проникності залежить від частоти світла і описується формулою

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{N_{дип}e^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{N_{дип}e^2\lambda_0^2\lambda^2}{4\pi^2 mc^2\varepsilon_0(\lambda^2 - \lambda_0^2)},$$

яку ми переписали через залежність від довжини хвилі, скориставшись співвідношенням $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ і тим самим довівши, що з фізичної точки зору залежність $\varepsilon(\omega)$ тотожна залежності $\varepsilon(\lambda)$. Зауважимо, що, як правило, прийнято експериментально вимірювати саме залежність $\varepsilon(\omega)$.

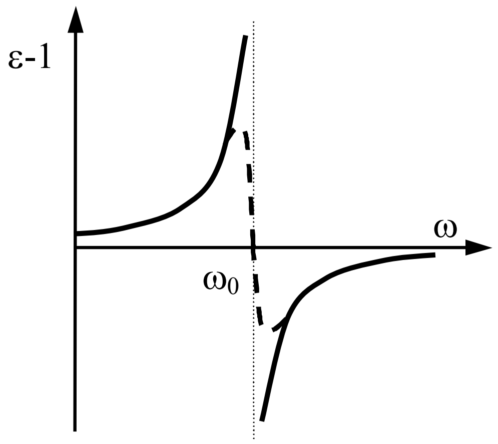

Рис. 59

На рис. 59 наведено графік залежності величини $\varepsilon(\omega) - 1$ від частоти хвилі (суцільні криві). З нього видно, що при $\omega < \omega_0$ та при $\omega > \omega_0$, діелектрична проникність зростає з частотою, а отже зменшується при збільшенні довжини хвилі. Це безпосередньо відповідає поведінці показника заломлення при нормальній дисперсії, коли $\frac{dn(\lambda)}{d\lambda} < 0$.

Коли ж $\omega \to \omega_0$, відбувається необмежене зростання (з боку $\omega < \omega_0$) або необмежене падіння (з боку $\omega > \omega_0$) функції $\varepsilon(\omega)$, що є наслідком резонансного зростання амплітуди коливань електронів. Такий процес вимагає втрат енергії. Оскільки вимушені коливання електронів відбуваються під дією електричного поля хвилі, то резонансне зростання амплітуди коливань електронів може здійснюватись лише за рахунок енергії хвилі. Отже, в околі власної частоти ω_0 відбувається інтенсивне поглинання енергії світлової хвилі.

Вище, при розгляді руху електрона, було знехтувано дією сили тертя (точніше, релаксаційними процесами, що мають місце у будь-якому середовищі), через яку коливання згасають. Релаксація негайно обумовить зникнення нефізичної розбіжності та забезпечить неперервний хід залежності $\varepsilon(\omega)$ при проходженні через резонансну частоту (ця ділянка на рис. 59 зображена пунктиром). На спадаючій ділянці пунктирної кривої діелектрична проникність зменшується при зростанні ω (відповідно, вона зростатиме при збільшенні λ), що відповідає явищу аномальної дисперсії, або, що легко перевірити, умові $\frac{dv(\lambda)}{d\lambda} < 0$.

5.2.2. Групова швидкість

Гармонічна хвиля є ідеалізованим поняттям, бо необмежено займає весь простір, в якому існує, а джерело, що її випромінює, робить це нескінчений час. В реальності процес випромінювання хвиль відбувається певний скінчений проміжок часу і поля хвилі відмінні від нуля лише в обмеженій області простору. Це, в свою чергу, означає, що будь-яке періодичне в просторі та часі електромагнітне поле складається не з однієї, а з декількох хвиль, або так званої групи хвиль.

Групу хвиль, яка в певний момент часу займає обмежену область простору, називають *хвильовим пакетом*.

При поширенні такого пакету у вакуумі, показник заломлення якого не залежить від частоти і становить $n = 1$, кожна з хвиль пакету розповсюджується з однаковою швидкістю c. Тому якою б не була форма хвильового пакету при його поширенні у вакуумі вона залишатиметься незмінною.

Можна також стверджувати, що коли пакет поширюється у середовищі, залежністю показника заломлення якого від частоти можна знехтувати, то в цьому випадку (і з точністю до такого припущення) форма пакету також змінюватися не буде, а швидкість його поширення дорівнюватиме фазовій швидкості хвиль у цьому середовищі:

$$v = v_\phi = \frac{\omega}{k},$$

де ω – частота, а $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

Якщо ж середовище має дисперсією, якою знехтувати неможливо, то для показника його заломлення $n(\lambda)$ необхідно явно враховувати залежність від довжини хвилі. З такої залежності прямо випливає, що хвилі пакету, які мають різні частоти (або, що теж саме, різні довжини хвиль), матимуть і різні фазові швидкості. Тому в процесі поширення в такому середовищі пакет неминуче змінюватиме свою форму.

Розглянемо як найпростіший приклад пакету, що містить лише дві хвилі з однаковими значеннями амплітудних векторів напруженостей їх електричних полів, які мають близькі значення частот і поширюються вздовж осі *X*. Нехай рівняння першої та другої хвиль описуються виразами

$$\vec{E}_1(x,t) = \vec{E}_{\max}\cos(\omega t - kx), \qquad \vec{E}_2(x,t) = \vec{E}_{\max}\cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

де ω, $\omega + \Delta\omega$ – частоти хвиль, а k, $k + \Delta k$ – хвильові вектори, причому $\Delta\omega << \omega$, $\Delta k << k$.

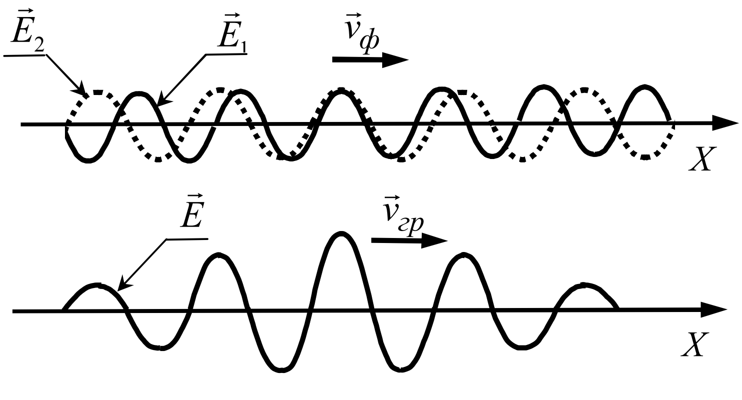

Рис. 60

На рис. 60 показано просторовий (для фіксованого часу) розподіл напруженості електричного поля при складанні полів $\vec{E}(x,t)$ цих хвиль. Видно, що при складанні хвиль утворюється максимум з напруженістю електричного поля $2\vec{E}_{\max}$.

Групова швидкість відповідає швидкості поширення (руху) саме цього максимуму. Дійсно при складанні хвиль отримаємо загальне поле у вигляді

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_1(x,t)+\vec{E}_2(x,t)=\vec{E}_{\max}\{\cos(\omega t-kx)+\cos[(\omega+\Delta\omega)t-(k+\Delta k)x]\}=$$
$$=2\vec{E}_{\max}\cos\frac{\Delta\omega t-\Delta k\,x}{2}\cos[(\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega)t-(k+\frac{1}{2}\Delta k)x].$$

Звідси видно, що максимальне значення напруженості електричного поля хвиль відповідає очевидній умові $\cos\frac{\Delta\omega t-\Delta k\,x}{2}=1$, що відповідає рівності

$$\Delta\omega t-\Delta k\,x=0,$$

де *x* – біжуча координата максимуму результуючої хвилі в момент часу *t*. Хід часу обумовлює зміну цієї координати, або положення цього максимуму. В результаті, він пересувається у просторі зі своєю швидкістю. Швидкість $\vec{v}_{гр}$ руху максимуму, визначається відношенням

$$v_{гр}=\frac{x}{t}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}\ .$$

За умови $\Delta\omega\to 0$ та $\Delta k\to 0$ бачимо, що групова швидкість визначається як похідна

$$v_{гр}=\frac{d\omega}{dk},$$

або в загальному випадку $\vec{v}_{гр}=\nabla_{\vec{k}}\omega(\vec{k})$, де $\omega(\vec{k})$ – функція, що задає залежність частоти хвилі від її хвильового вектора в конкретному середовищі.

Врахуємо тепер, що групова швидкість та хвильове число в електромагнітній хвилі зв'язані між собою дисперсійним співвідношенням $\omega=vk$. Легко, що з використанням цього зв'язку групову швидкість можна записати у вигляді

$$v_{гр}=\frac{d(vk)}{dk}=v+k\frac{dv}{dk}.$$

Хвильове число обернено пропорційне до довжини хвилі $k=\frac{2\pi}{\lambda}$, а тому $dk=-2\pi\frac{d\lambda}{\lambda^2}$. Підставимо останні співвідношення у вираз для групової швидкості:

$$v_{гр}=v+\frac{2\pi}{\lambda}\frac{dv}{-2\pi\frac{d\lambda}{\lambda^2}},$$

в результаті чого приходимо до формули, яку називають *формулою Релея*

$$v_{гр} = v_{гр}^{(\lambda)} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}.$$

У вакуумі швидкість електромагнітних хвиль дорівнює їх фазовій швидкості $v = v_{ф} = c$, тобто не залежить від довжини хвилі, тому $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, а отже групова швидкість світла у вакуумі постійна, $v_{гр} = c$.

Для випадку нормальної дисперсії, коли $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, групова швидкість менша за фазову, $v_{гр} < v$. Для випадку аномальної дисперсії $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, навпаки, групова швидкість більша за фазову, $v_{гр} > v$. У деяких випадках дуже значної аномальної дисперсії може навіть так трапитися, що розрахована величина групової швидкості виявиться більшою за швидкість світла у вакуумі, що лише свідчитиме про недостатність застосованого наближення і необхідність більш акуратного розрахунку похідної $\frac{dv}{d\lambda}$. Проте фізично більш цікавою є протилежна ситуація, коли групова швидкість наближається до нуля, тобто світло, буцімто зупиняється. Такі ситуації дійсно реалізуються у ряді конденсованих середовищ поблизу резонансів, коли можна спостерігати уповільнення розповсюдження електромагнітних сигналів на декілька порядків.