

## 1.20. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення механічних коливань та коливальної системи.
2. Що таке спектр?
3. Дайте означення зміщення.
4. Запишіть диференціальне рівняння та його розв'язок для вільних незгасаючих коливань.
5. Що таке амплітуда, фаза, частота та період коливань вільних незгасаючих коливань?
6. Як з закону збереження енергії отримати диференціальне рівняння для вільних незгасаючих коливань?
7. Чим фізичний маятник відрізняється від математичного маятника?
8. Запишіть диференціальне рівняння та його розв'язок для вільних згасаючих коливань.
9. Як сила тертя впливає на частоту та на амплітуду коливань?
10. Дайте означення для коефіцієнта згасання, логарифмічного декременту, добротності.
11. За якої умови виникають згасаючі коливання, а за якої – аперіодичний процес?
12. Запишіть диференціальне рівняння та його розв'язок для вимушених коливань.
13. Що таке резонанс і коли він виникає?
14. Як визначити добротність з резонансної кривої?
15. Що таке параметричний резонанс?
16. Поясніть, чому при коливаннях зі в'язами будуть різні частоти коливань.
17. Поясніть, коли виникають биття.
18. Чи можна спостерігати биття при вимушених коливаннях?

## 1.21. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Формула для коефіцієнта жорсткості коливальної системи

$$k = \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dX^2} \Big|_{X=X_0},$$

де  $U$  – потенціальна енергія коливальної системи

2. Диференціальне рівняння для вільних незгасаючих гармонічних коливань

$$\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де  $x$  – зміщення відносно положення рівноваги.

3. Розв'язок диференціального рівняння вільних незгасаючих гармонічних коливань

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де  $A$  – амплітуда коливань.

4. Період власних коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

5. Власна частота для пружинного, математичного та фізичного маятників, відповідно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I}}.$$

6. Диференціальне рівняння для вільних згасаючих гармонічних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

7. Розв'язок диференціального рівняння вільних згасаючих коливань

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\tilde{\omega}_0 t + \varphi_0),$$

де  $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота коливань,  $\beta$  – коефіцієнт згасання.

8. Формули для часу релаксації, логарифмічного декременту та добротності

$$\tau = \frac{1}{\beta}, \quad \theta = \frac{\tilde{T}}{\tau}, \quad Q = \frac{\pi}{\theta},$$

де  $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_0}$ .

9. Диференціальне рівняння для вимушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_m \cos \omega t.$$

10. Розв'язок диференційного рівняння вимушених коливань

$$x(t) = A \cos(\omega t - \alpha),$$

де  $A = \frac{f_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$  – амплітуда коливань,  $\omega$  – частота зовнішньої

сили,  $\alpha = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$  – різниця фаз коливань між зовнішньою силою та зміщенням.

11. Формули для резонансної частоти та амплітуди коливань при резонансі

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad A_p = \frac{F_{\max}}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

## 1.22. Задачі

1.1. Запишіть з чисельними коефіцієнтами рівняння коливань, що відбуваються за законом косинуса. Амплітуда коливань становить 0,1 см і за дві хвилини відбувається 300 повних коливань. Початкова фаза є такою, що початкове зміщення складає половину від амплітуди, а тіло у початковий момент часу рухається від положення рівноваги. Побудуйте графік для зміщення

1.2. Запишіть з чисельними коефіцієнтами рівняння гармонічних коливань, коли їх амплітуда становить 1 см, період 2 с, а в початковий момент часу зміщення тіла максимальне. Запишіть вирази для швидкості руху тіла та для його прискорення. Знайдіть амплітудні значення для швидкості та для прискорення. Побудуйте графіки для зміщення, швидкості та прискорення тіла під час цих коливань.

1.3. Швидкість тіла, яке здійснює гармонічні коливання, описується виразом,  $v(t) = v_{\max} \sin\left(\frac{8\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{5}\right)$ , де  $v_{\max}$  – амплітудне значення швидкості,  $t_0$  – постійна.

Знайдіть період коливань. Запишіть вираз для зміщення та прискорення. Знайдіть амплітуду коливань та амплітудне значення для прискорення. На який найменший час зсунуті амплітудні значення для зміщення та прискорення?

1.4. Тіло, маса якого  $m$ , здійснює вільні незгасаючі гармонічні коливання, що описуються рівнянням  $x(t) = A \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{3})$ . Знайдіть вираз для пружної сили, яка діє на тіло під час цих коливань, та вираз для імпульсу тіла під час коливань.

1.5. Частинка здійснює гармонічні коливання. Частота коливань  $\omega = 4 \text{ с}^{-1}$ . В початковий момент часу зміщення частинки становить 25 см, а її швидкість 1,00 см/с. Знайдіть зміщення частинки на другій секунді коливань.

1.6. Частинка здійснює гармонічні коливання. В момент часу  $t_1$  зміщення частинки дорівнює  $x_1$ , а швидкість –  $v_1$ . А в момент часу  $t_2$  зміщення частинки дорівнює  $-x_2$ , а швидкість –  $v_2$ . Знайдіть період коливань та їх амплітуду.

1.7. Знайдіть середню швидкість маятника, зміщення якого описується виразом  $x(t) = A \cos \omega_0 t$ , де  $A$  – амплітуда, а  $\omega_0$  – частота коливань, за час, рівний четвертій частині періоду від початку коливань.

1.8. Частинка, маса якої  $m$ , здійснює гармонічні коливання відносно положення рівноваги  $x = 0$  в потенціальному полі  $U(x) = \alpha x^2 - b \cos \gamma x$ , де  $\alpha > 0$ ,  $b < 0$ . Знайдіть період коливань та вираз для квазіперіодичної сили, яка діє на тіло.

- 1.9. Частинка знаходиться у силовому полі, яке описується енергією  $U(x) = \alpha \cos^2 \gamma x$ , де  $\alpha < 0$ . Знайдіть період гармонічних коливань частинки, якщо її маса дорівнює  $m$ .
- 1.10. Частинка знаходиться у силовому полі, яке описується енергією  $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$ , де  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Знайдіть період гармонічних коливань частинки, якщо її маса дорівнює  $m$ .
- 1.11. Горизонтальний пружинний маятник з кулькою маси  $m$  та жорсткістю пружини  $k$ , здійснює гармонічні коливання, які збуджені поштовхом з положення рівноваги. Запишіть рівняння руху кульки, коли маятник знаходиться у потязі, що рухається рівномірно та прямолінійно зі швидкістю  $v$  по рівнині.
- 1.12. Тіло підвісили до пружини. При цьому вона витягнулася на  $\Delta \ell$ . Знайдіть період власних незгасаючих коливань.
- 1.13. Знайдіть період коливань однорідного циліндричного тіла, радіус якого  $r$ , висота якого  $h$  і який на три четверті від своєї висоти занурений в рідину з густиною  $\rho_{\text{рід}}$ .
- 1.14. Кінці горизонтальної недеформованої пружини з жорсткістю  $k$  зафіксовані. До середини пружини приєднали легеньке тіло, маса якого  $m$ . Знайдіть період коливань тіла.
- 1.15. Два тіла, маси яких однакові, з'єднані горизонтальною пружиною жорсткістю  $k$ . Знайдіть період коливань тіл, коли маса кожного з тіл дорівнює  $m$ .
- 1.16. Знайдіть період поперечних коливань тіла, маса якого  $m$ , і яке закріплене на середині розтягнутого джгута довжиною  $\ell$ . Сила натягу джгута  $F$  і значно більша сили тяжіння, що діє на тіло. При розрахунку періоду коливань масою джгута знехтувати.
- 1.17. Порівняйте періоди коливань математичного маятника, що рухається в ліфті вгору з прискоренням  $a$ , з математичним маятником, що рухається в ліфті з прискоренням  $-a$ . Зауважимо, що довжини обох маятників однакові, а прискорення  $a$  менше прискорення вільного падіння  $g$  в два рази.
- 1.18. На якій відстані від центру мас стрижня має проходити вісь обертання, щоб період коливань стрижня співпадав з періодом коливань математичного маятника. Довжина стрижня дорівнює довжині математичного маятника.
- 1.19. Стрижень здійснює коливання навколо осі, що проходить через його кінець. Довжина стрижня  $\ell$ , маса  $M$ . У скільки разів зміниться період коливань стрижня, якщо до його другого кінця прикріпити точкове тіло, маса якого  $m$ ?

1.20. До кінця стрижня, маса якого  $M$  а довжина  $\ell$ , прикріплено однорідний диск, маса якого  $m$ , а радіус  $r = \ell$ . Центр диску співпадає з рухомим кінцем стрижня. Знайдіть період коливань цього маятника, якщо коливання відбуваються у площині диску, а вісь обертання проходить через другий кінець стрижня.

1.21. Стрижень, довжина якого  $\ell$ , а маса  $M$ , відхилили відносно положення рівноваги на кут  $\varphi_0$  і відпустили без початкової швидкості. Запишіть рівняння коливань для стрижня, коли вісь обертання проходить через кінець стрижня.

1.22. Фізичний маятник здійснює гармонічні коливання, які описуються виразом  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{4\pi t}{t_0} + \frac{\pi}{3}\right)$ , де  $t_0$  – стала. Знайдіть період коливань.

Розрахуйте залежність кутової швидкості маятника від часу. Знайдіть також часову залежність для моменту імпульсу маятника, якщо момент інерції маятника відносно його центру становить  $I_C$ , маса маятника  $M$ , а відстань від центру мас до осі обертання становить  $b$ .

1.23. Дано, що момент інерції фізичного маятника відносно осі, щодо якої він здійснює вільні незгасаючі гармонічні коливання, дорівнює  $I$ . Кутова швидкість маятника під час коливань описується виразом  $\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max} \sin\left(\frac{8\pi t}{\tau} + \frac{\pi}{3}\right)$ , де  $\tau$  – стала, а  $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{\max}$  – амплітудне значення кутової швидкості. Знайдіть залежність від часу для кутового зміщення маятника, а також вираз для моменту сил, що діють на маятник під час коливань.

1.24. До однорідного диску, маса якого  $m$ , а радіус  $r$ , відносно осі, що проходить через центр диску і перпендикулярна до його площини, прикладено момент сили, величина якого пропорційна куту повороту диску відносно цієї осі:  $M = -k\varphi$ , де  $k$  – стала, а  $\varphi$  – кут повороту. Знайдіть період коливань диску відносно цієї осі, а також запишіть рівняння коливань, якщо початкове відхилення  $\varphi_0$  і початкова швидкість відсутня.

1.25. Знайдіть середню кутову швидкість фізичного маятника за час, рівний четвертій частині періоду від початку коливань, які описуються залежністю  $\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t$ , де  $\varphi_0$  – амплітуда, а  $\omega_0$  – частота коливань.

1.26. Тіло, маса якого  $m = 0,1$  кг, здійснює згасаючі коливання за законом  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(2\pi ft + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau = 0,05$  с,  $f = 10$  Гц. Знайдіть період коливань, власну частоту коливань та жорсткість пружини.

1.27. Тіло здійснює згасаючі коливання за законом  $x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(5\pi \frac{t}{t_0} + \frac{\pi}{3})$ , де  $\tau$  та  $t_0$  сталі. Знайдіть вираз для сили в'язкого тертя під час коливного процесу, якщо маса тіла  $m$ .

1.28. Фізичний маятник здійснює згасаючі коливання, кутове зміщення яких описується виразом  $\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(3\pi \frac{t}{t_0} + \frac{\pi}{5})$ , де  $\tau$  та  $t_0$  сталі. Знайдіть вираз для загального моменту сили в'язкого тертя, що діє на тіло, під час коливального процесу, якщо  $I$  – момент інерції тіла відносно осі, навколо якої здійснюються коливання.

1.29. Логарифмічний декремент згасання математичного маятника дорівнює 0,2. Знайдіть, у скільки разів зменшиться амплітуда коливань за один період коливань.

1.30. Чому дорівнює логарифмічний декремент згасання та добротність математичного маятника довжиною 1 м, якщо за 1 хвилину амплітуда його коливань зменшиться у два рази?

1.31. Точка здійснює згасаючі коливання з частотою  $\omega$ . Знайдіть час релаксації, якщо початкова швидкість точки дорівнює нулеві, а початкове зміщення в  $n$  разів менше амплітуди.

1.32. Тіло підвісили до вертикальної пружини. При цьому вона витягнулася на  $\Delta \ell$ . Знайдіть період згасаючих коливань, якщо добротність коливальної системи становить  $Q$ .

1.33. Тіло коливальної системи має масу  $m=10$  г, а коефіцієнт згасання коливань становить  $1,6 \text{ с}^{-1}$ . Під дією зовнішньої періодичної сили коливальна система здійснює усталені коливання зі зміщенням, що описується виразом  $x(t) = 5 \sin(10\pi t - \frac{3\pi}{4})$ . Знайдіть період власних коливань системи, а також запишіть вираз для часової залежності зовнішньої періодичної сили, яка призводить до вимушених коливань.

1.34. Знайдіть різницю фаз для зміщення та вимушуючої сили при резонансі, якщо власна частота коливань  $\omega_0$ , а час релаксації –  $\tau$ .

1.35. Рух тіла під дією вимушуючої сили  $F = F_{\max} \cos \omega t$  описується виразом  $x(t) = A \sin \omega t$ . Маса тіла  $m$ . Знайдіть коефіцієнт згасання та коефіцієнт тертя.

1.36. Кулька, маса якої  $m$ , може здійснювати незгасаючі коливання з власною частотою  $\omega_0$ . Коли кулька знаходилася в стані рівноваги з моменту часу  $t=0$  на кульку почала діяти періодична сила  $F = F_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть закон вимушених коливань кульки.

1.37. Визначте рівняння руху кульки за умов попередньої задачі, коли частота зовнішньої сили співпадає з власною частотою кульки.

1.38. Зміщення тіла під час вимушених коливань описується виразом  $x(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$ . Ці коливання збудовує сила  $F = F_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї сили за час одного періоду коливань.

1.39. Кутове зміщення тіла під час вимушених коливань описується виразом  $\varphi(t) = \varphi_{\max} \cos(\omega t - \alpha)$ . Ці коливання створює момент сили  $M = M_{\max} \cos \omega t$ . Знайдіть роботу цієї сили за час одного періоду коливань.