

3.11. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення хвилі.
2. Що називають точкою середовища?
3. Що таке довжина хвилі та хвильове число?
4. Як довжина хвилі зв'язана з частотою хвилі?
5. Запишіть рівняння хвилі та хвильове рівняння.
6. Запишіть рівняння плоскої та сферичної хвиль.
7. Запишіть хвильове рівняння у декартовій та у сферичній системах координат.
8. Як виглядає дисперсійне співвідношення для гармонічної хвилі?
9. Як швидкість біжучої хвилі залежить від сили натягу джгута?
10. Порівняйте вирази для закону Гука при однорідній та неоднорідній деформаціях стрижня.
11. Запишіть формулу для швидкості поширення пружної хвилі в стрижні.
12. Поясніть, чому при зростанні температури швидкість звуку зростає?
13. При власних коливаннях пружинного маятника пружна енергія переходить в кінетичну і навпаки. Чи відбувається такий процес перетворення енергії при поширенні пружних хвиль?
14. Як отримати стоячу хвилю?
15. Запишіть рівняння стоячої хвилі.
16. Наведіть приклад, коли під час коливань спостерігається тільки одна пучність.
17. Чи рухається фазова поверхня у стоячій хвилі?
18. Що треба зробити з струною, щоб частота основного тону зросла ?

3.12. Формули, необхідні для розв'язку задач

1. Рівняння плоскої та сферичної хвиль

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad \xi(r, t) = \frac{C}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0),$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, $k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число, λ – довжина хвилі,

$\omega = \nu k$ – частота хвилі.

2. Хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

3. Швидкість хвилі у натягнутій струні, швидкість повздовжньої пружної хвилі в стрижні

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

де F – сила натягу струни, S – площа її перерізу, ρ – густина, E – модуль Юнга.

4. Швидкість хвилі у газі

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}, \quad pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

де P – тиск, ρ – густина, T – температура, m – маса газу, R – універсальна газова стала, γ – коефіцієнт адіабати, μ – молярна маса.

5. Густина енергії пружної хвилі

$$e = 2e_{\text{кін}} = 2e_{\text{пр}} = \rho \omega^2 \xi_{\text{max}}^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0).$$

6. Рівняння стоячої хвилі

$$\xi(x, t) = 2\xi_{\text{max}} \cos kx \cos \omega t.$$

7. Періоди власних коливань струни

$$T_n = \frac{2\ell}{n} \sqrt{\frac{S\rho}{F}},$$

де ℓ – довжина струни.

3.13. Задачі

3.1. Знайдіть довжину хвилі, період коливань якої становить 10^{-4} с. Швидкість поширення коливань становить 300 м/с. Знайдіть різницю фаз коливань двох точок, які лежать на відстані 5 см вздовж напрямку поширення хвилі.

3.2. Плоска хвиля має довжину хвилі 70 см та частоту 500 Гц. Амплітудне значення зміщення становить 0,25 мм. Знайдіть швидкість поширення хвилі та амплітудні значення швидкості точок середовища і їх прискорення.

3.3. Рівняння коливань джерела плоскої хвилі мають (числові значення задані в СІ) вигляд $x(t) = 0,01 \cos(0,5\pi t + \pi/4)$. Швидкість поширення хвилі 300 м/с. Запишіть рівняння хвилі. Запишіть рівняння коливань точки, що віддалена від джерела на відстань 600 м. Побудуйте графік часової залежності для зміщення цих коливань. Побудуйте також графік розподілу зміщень у хвилі в момент часу $t=4$ с.

3.4. Плоска гармонічна хвиля, період коливань якої T , поширюється зі швидкістю v в площині XU . Хвильовий вектор становить кут α з віссю X . Напишіть рівняння хвилі, та знайдіть різницю фаз коливань в точках з координатами x_1, y_1 та x_2, y_2 .

3.5. Знайдіть довжину хвилі, хвильовий вектор та швидкість хвилі, рівняння якої має вигляд $\xi(x, y, t) = \xi_{\text{max}} \cos(\omega t - \alpha x - \beta y)$.

3.6. В середовищі поширюється плоска хвиля, рівняння якої $\xi(x, t) = \xi_{\max} \cos(\omega t - kx)$. Запишіть рівняння цієї хвилі в системі відліку, яка рухається зі швидкістю u вздовж осі X .

3.7. Повздовжня пружна хвиля поширюється в вздовж осі X стрижня з густиною $\rho = 4,0 \text{ г/см}^3$ та модулем Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$. Знайдіть швидкість точок середовища цієї хвилі, коли їх відносна деформація становить $\varepsilon = 0,01$.

3.8. Рівняння плоскої хвилі (числові значення задані у СІ) має вигляд $\xi(x, t) = 6 \cdot 10^{-5} \cos(600\pi t - 5x)$. Знайдіть відношення амплітуди зміщення до довжини хвилі. Знайдіть також відношення амплітудного значення швидкості точок середовища до швидкості поширення хвилі. Знайдіть амплітудне значення відносного видовження точок середовища.

3.9. В одному напрямку поширюються дві хвилі, швидкості яких v_1 та v_2 , а довжини хвиль λ_1 та λ_2 . Знайдіть швидкість руху точок простору, для яких фази коливань обох хвиль будуть однаковими.

3.10. Два джерела випромінюють дві гармонічні хвилі. Джерела коливаються з однаковою частотою, однаковою початковою фазою та однаковою амплітудою. Опишіть рух частинки середовища, що знаходиться на відстані d_1 від першого джерела та відстані d_2 від другого джерела, якщо напрямом коливань в цій точці однаковий для обох хвиль.

3.11. Якою є довжина струни, якщо при зменшенні її довжини на 10 см частота коливань зросла в півтора рази? Натяг пружини не змінився.

3.12. Струна звучить з частотою 400 Гц. В якому місці треба затримати рух струни, щоб вона звучала з частотою 800 Гц або 1200 Гц?

3.13. Стальна струна довжиною 110 см та діаметром 1 мм натягнута між полюсами електромагніту. Коли по струні пропустили змінний струм частотою 50 Гц, то на ній сформувалося 5 півхвиль. Знайдіть силу натягу струни, якщо густина сталі $7,8 \text{ г/см}^3$.

3.14. Механічні коливання з частотою 400 Гц поширюються вздовж циліндра з повітрям при температурі 0° С . Амплітуда зміщень становить 0,25 мм. Запишіть рівняння хвилі. Знайдіть довжину хвилі, швидкість її поширення, амплітудне значення швидкості точок середовища та середню густину енергії хвилі.

3.15. На якій частоті в трубі з киснем буде спостерігатися резонанс? Кінці труби запаяні з обох боків. Довжина труби 1,6 м, а температура 100° С .

3.16. Плоска хвиля поширюється у воді. Амплітудне значення швидкості точок середовища хвилі 1,38 м/с, а амплітуда зміщення $5 \cdot 10^{-4}$ м. Визначте частоту хвилі. Запишіть рівняння хвилі та знайдіть середнє значення густини енергії хвилі.

3.17. Плоска біжуча хвиля має довжину хвилі 0,16 м. Визначте положення двох найближчих від поверхні відбивання вузла та пучності для зміщення, якщо на відбиваючій поверхні буде його вузол; буде його пучність.

3.18. Зміщення точок середовища описується рівнянням

$$\xi(x,t) = 0,003 \cos \frac{\pi x}{3} \cos 110,7\pi t.$$

Визначте координати точок, які мають максимальну та мінімальну швидкість. Запишіть рівняння біжучих хвиль, які не порушують заданий стоячий хвильовий процес.

3.19. За який час звукові коливання пройдуть відстань ℓ між точками 1 та 2, якщо температура повітря між ними змінюється лінійно від T_1 до T_2 ?

Швидкість звуку в повітрі $v = \alpha\sqrt{T}$, де α – стала.