Механіка та механічний рух

Механікою називають розділ фізики, в якому вивчають рух матеріальних тіл і взаємодії, що його спричиняють. *Механічним рухом* називають зміну положення тіл у просторі відносно інших тіл протягом часу. Наведемо приклади механічного руху: рух небесних тіл, коливання земної кори, повітряні і морські течії, рух транспортних засобів, машин, механізмів, деформації елементів конструкцій і споруд, та ін. Взаємодії, які розглядаються в механіці, являють собою вплив тіл одне на одне, результатом чого є зміна швидкостей або деформації цих тіл. Приклади взаємодій: притягання тіл у відповідності з законом всесвітнього тяжіння, взаємний тиск тіл, що дотикаються, взаємодія частинок рідини або газу, з поверхнею тіл, які в них занурені, опір руху, тощо.

Термін *простір* у визначенні механічного руху відображає безмежність реального світу, для якого характерна протяжність. Мірою протяжності є довжина. З іншого боку простір структурований. Структурність характеризує розташування одних тіл відносно інших тіл. Наведемо приклади структур: будова сонячної системи, утвореної зіркою Сонцем та планетами, що обертаються навколо нього; рельєф Землі, який утворений морями, горами, рівнинами. Зміна положення тіл при русі завжди має взаємний і відносний характер. У класичній механіці вважають, що простір є *однорідний* та *ізотропний*. Однорідність означає, що властивості простору не залежать від положення тіла, тобто властивості простору однакові в усіх його точках. Ізотропність означає однаковість властивостей простору в усіх його напрямках, тобто незалежність властивостей від вибраного напрямку. Довжину відстані між будь-якими точками простору можна визначити, порівнюючи її з еталоном. Термін *час* характеризує тривалість і послідовність зміни реальних природних процесів і явищ.

Механічний рух є однією з форм руху матерії. Не існує абсолютного механічного руху тіл, він завжди відносний. При русі тіла відбувається його переміщення відносно інших тіл. Простір і час матеріальні, вони є формою існування матерії.

В основі класичної механіки лежать закони Ньютона, а предметом вивчення є рухи будь-яких матеріальних тіл (крім молекул, атомів, елементарних частинок) зі швидкостями, які набагато менші за швидкість світла. Рух тіл зі швидкостями близькими до неї розглядають в так званій теорії відносності, а рухи елементарних частинок, в тому числі рухи електронів в середині атома або молекули вивчають в іншому розділі фізики – квантовій механіці.

1. Кінематика

1.1. Система відліку

Положення будь-якого фізичного тіла у просторі задають за допомогою *координат*, які визначають шляхом введення системи координат (рис. 1). Початок системи координат, точку О, суміщають з положенням *тіла відліку*, відносно якого розглядають (або зручно розглядати) рух інших тіл. Систему координат у тривимірному просторі нашого існування визначають трьома взаємно перпендикулярними і нерухомими відносно тіла відліку площинами. Її називають *декартовою* системою. Координатні осі ОХ, ОУ, OZ лежать на перетині цих площин (рис. 1). Модулі координат точки визначають як найменші відстані від неї до координатних площин.

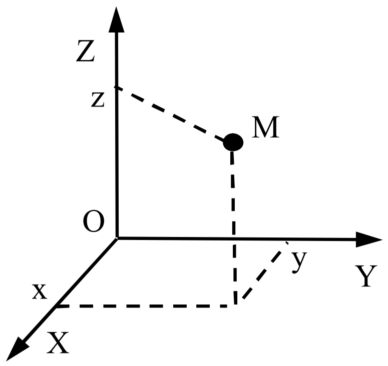

Рис. 1

Відстань |ОМ| від точки О до точки М (див. рис. 1) за теоремою Піфагора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів координат точки

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

а відстань від точки M_1 з координатами x_1, y_1, z_1 до точки M_2 з координатами x_2, y_2, z_2 вже залежить від різниці координат точок і становить

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Рухоме тіло змінює своє положення з часом. Як вже зазначалося, час характеризує тривалість руху. Вимірювання часу можна здійснити, порівнюючи тривалість руху з тривалістю періодичного процесу. Одиницею часу у фізиці прийнято секунду (с). Одна секунда складає $\frac{1}{86400}$ частку середньої сонячної доби. Середня сонячна доба дорівнює середньому проміжку часу, протягом якого Земля робить один повний оберт при обертанні навколо своєї осі. Обертання Землі, строго кажучи, неоднорідне, тому для визначення секунди використовують більш точні фізичні процеси, зокрема період частот випромінювання деяких атомів. Тепер прийнято, що секунда дорівнює 9192631770 періодам випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями основного стану атому цезію -133.

При описі механічного руху прилад для виміру часу повинен бути пов'язаний з тілом відліку. Усі інші прилади для виміру часу в цій системі мають бути синхронізовані з цим приладом. Синхронізовані прилади показують однаковий час. У класичній механіці, або механіці Ньютона, вважається, що синхронізацію можна здійснити миттєво. Через таку властивість час в класичній механіці називають *абсолютним* часом. При цьому припускається, що час не залежить від швидкості. Тому прилад для виміру часу може рухатися разом з тілом.

Тіло відліку, система координат та прилад для виміру часу утворюють *систему відліку.* В ній просторові та часові змінні є незалежними.

В результаті, *основна задача механіки* полягає у визначенні положення тіла у просторі в довільний момент часу. Задача буде розв'язаною, коли відомо, як координати тіла залежать від часу: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Відповідні залежності ще називають *кінематичними рівняннями руху*.

1.2. Радіус-вектор

Нехай рухома точка у вибраній системі координат знаходиться у точці М (рис. 2). Побудуємо вектор $\overrightarrow{OM}$, початок якого знаходиться у точці початку системи координат – точці О, а кінець співпадає з положенням рухомої точки, яка знаходиться в точці М. Позначимо цей вектор $\vec{r}$, тобто $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

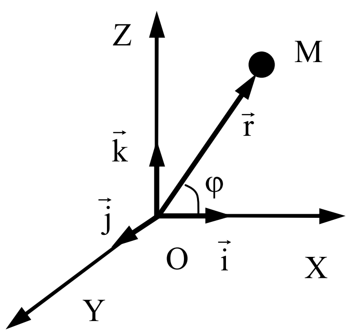

Рис. 2

Вектор, що з'єднує початок системи координат та рухому точку називають *радіус-вектором*.

Установимо зв’язок між координатами точки М і радіус-вектором $\vec{r}$. Для цього введемо три одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, які називають *ортами*. Термін *одиничні вектори* означає, що їх модуль дорівнює одиниці, тобто $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Вектор $\vec{i}$ направимо вздовж осі OX, вектор $\vec{j}$ – вздовж OY, а вектор $\vec{k}$ – вздовж OZ. Вектори перпендикулярні один до одного $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$. Одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ безрозмірні і використовуються для того, щоб задати напрямок в просторі.

Знайдемо скалярний добуток одиничного вектора $\vec{i}$ на вектор $\vec{r}$

$$\vec{i}\,\vec{r} = |\vec{i}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos\varphi$$

де φ – кут між векторами $\vec{i}$ та $\vec{r}$ (див. рис. 2). Оскільки за означенням $|\vec{i}| = 1$, а добуток модуля радіус-вектора на cosφ дорівнює проекції $r_X = |\vec{r}| \cdot \cos\varphi$ на вісь, то бачимо, що скалярний добуток одиничного вектора на радіус-вектор дорівнює його проекції на вісь OX, тобто

$$\vec{i}\,\vec{r} = r_X .$$

З іншого боку, величини проекцій радіус-вектора дорівнюють координатам точки M, тому

$$r_X = x.$$

Подібним чином можна розглянути і добутки одиничних векторів $\vec{j}$ і $\vec{k}$ з $\vec{r}$. В цьому випадку отримаємо, що й інші проекції радіус-вектора співпадають з координатами точки M

$$r_Y = y, \quad r_Z = z$$

Отже, отримуємо, що радіус-вектор однозначно задається трьома координатами рухомої точки. Така еквівалентність означає, що радіус-вектор $\vec{r}$ можна представити через координати рухомої точки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} .$$

Якщо тепер скалярно помножити радіус-вектор на одиничний вектор, то отримаємо

$$\vec{i} \cdot \vec{r} = x \cdot \vec{i}^{\,2} + y \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} .$$

Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничні та ортогональні, і для них виконуються рівності $\vec{i}^{\,2} = 1,\ \vec{i}\vec{j} = 0,\ \vec{i}\vec{k} = 0$, з урахуванням яких знову випливає відома рівність

$$\vec{i}\,\vec{r} = x .$$

Під час руху координати точки змінюються з часом, тому проекції радіус-вектора і він сам також змінюються з часом

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} .$$

Записане рівняння називається *кінематичним рівнянням руху у векторній формі.* Його ще записують у вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}(t) .$$

Зауважимо, що одиницею виміру радіус-вектора і його проекцій є метр. Одиничні вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є безрозмірними.

1.3. Матеріальна точка

При визначення кінематичного рівняння руху розглядався рух точки. А коли рухоме тіло можна вважати точкою? Це можливо, якщо розміри такого тіла набагато менші масштабу руху. Наприклад, при русі Місяця навколо Землі його можна вважати матеріальною точкою. *Матеріальною точкою* називають тіло, розмірами і формою якого в даній задачі можна знехтувати, тобто вважати, що вся маса тіла зосереджена в одній геометричній точці. Таким чином, матеріальна точка є абстрактним фізичним поняттям. Але використання такої ідеалізації значно спрощує багато розрахунків.

У випадку руху тіл, коли їх формою нехтувати неможливо, необхідно окремо розглядати рух кожної точки тіла, оскільки вони характеризуються різними координатами. Візьмемо кулю, з центром в точці О (рис. 3), через який проходить вісь обертання. Напрямок обертання на рис. 3 позначено стрілкою. *Точкою тіла* у цьому випадку є деяка його маленька область, лінійні розміри якої на рисунку позначено ℓ; при цьому треба вимагати нерівності ℓ<<d, де d – діаметр кулі.

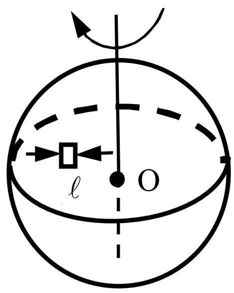

Рис. 3

Рух матеріальної точки повністю визначений, якщо задані три неперервні однозначні функції залежностей її координат від часу

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t),$$

або у векторній формі

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Рухи вздовж координатних осей вважають *незалежними* у випадку, коли кінематичні рівняння руху для кожної з координат не залежать від значення інших координат. Наприклад, для тіла, що кинуте горизонтально чи під кутом до горизонту, координата x, яка спрямована горизонтально вздовж напрямку руху, та координата y, яка спрямована вздовж вертикалі до поверхні землі, є незалежними.

1.4. Траєкторія

Під *траєкторією* розуміють уявну лінію, яку описує у просторі матеріальна точка в процесі її руху. Якщо траєкторія є прямою лінією, то такий рух називають *прямолінійним.* Якщо ж траєкторія – не пряма лінія, то такий рух називають *криволінійним*. Рух матеріальної точки називають *плоским*, якщо траєкторія руху лежить у площині. Відрізняють два найпростіші випадки механічного руху – поступальний та

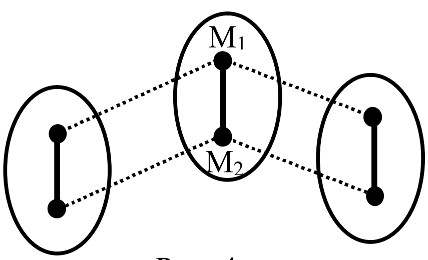

Рис. 4

обертальний.

Поступальний – це такий особливий рух, коли всі точки тіла рухаються тотожно. Наприклад, у випадку поступального руху тіла, зображеного на рис. 4 точка M_1 і точка M_2 рухаються однаково. Зокрема, пряма M_1M_2 під час такого руху залишається паралельною сама собі. Відповідно, тіло яке рухається поступально, також можна вважати матеріальною точкою.

При обертальному русі матеріальної точки її траєкторія утворює коло. При обертальному русі тіла його точки також описують кола, що розташовані у паралельних площинах, а центри кіл утворюють вісь, яка і є віссю обертання.

У класичній механіці траєкторія є неперервною лінією. Для заданого моменту часу тіло (матеріальна точка) може знаходитись тільки в одній певній точці простору. При русі по прямій з точки M_1 до точки M_3 (рис. 5) тіло має обов'язково пройти через всі точки (наприклад, точку M_2 на рис. 5) відрізку. Існування траєкторії вказує на однозначність процесу руху, коли для будь-якого моменту часу існує тільки одне єдине положення рухомої точки в просторі. Проте рухома точка може проходити одну й ту саму точку простору декілька разів, але це відбувається в різні моменти часу. Так, на рис. 5 траєкторія тіла двічі проходить через точку М.

Рис. 5

Траєкторія в класичній механіці однозначно визначається умовами руху тіла. За однакових умов руху траєкторії тіл будуть однаковими.

1.5. Переміщення

Щоб відобразити напрямок, або направленість руху тіла, вводять поняття переміщення. *Переміщенням* називають направлений відрізок прямої, який з'єднує початкове положення тіла з його наступним положенням. Направлений відрізок називається *вектором*. Модуль вектора дорівнює довжині відрізка. Таким чином, переміщення - векторна фізична величина.

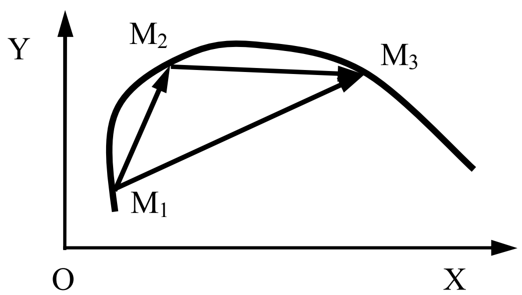

Рис. 6

Розглянемо тіло, що рухається по криволінійній траєкторії (рис. 6). При русі з точки M_1 до точки M_2 (рис.6) вектором переміщення є направлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$, що з'єднує ці точки. Для наступного проміжку часу, коли тіло рухалося з точки M_2 до точки M_3, вектор переміщення $\overrightarrow{M_2M_3}$ є напрямлений відрізок, що сполучає точки M_2 та M_3. Вектор переміщення $\overrightarrow{M_1M_3}$ при русі з точки M_1 до точки M_3 дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3}$.

Переміщення виражається через різницю координат кінцевого та початкового положення тіла. Для переміщення $\overrightarrow{M_1M_2}$, де M_1 – початкова точка з координатами x_1, y_1, z_1, а M_2 – кінцева точка з координатами x_2, y_2, z_2, проекції вектора переміщення $\overrightarrow{M_1M_2}$ на осі OX, OY, OZ дорівнюють

$$(M_1M_2)_X = x_2 - x_1, \qquad (M_1M_2)_Y = y_2 - y_1, \qquad (M_1M_2)_Z = z_2 - z_1.$$

Звідки можна записати

$$x_2 = x_1 + (M_1M_2)_X, \qquad y_2 = y_1 + (M_1M_2)_Y, \qquad z_2 = z_1 + (M_1M_2)_Z.$$

Координати положення тіла в довільний момент часу можна визначити, якщо відомі координати початкового положення й величини проекцій вектора переміщення.

Знову розглянемо тіло, що здійснює криволінійний рух (рис. 7). Положення точки на момент часу t задає радіус-вектор $\vec{r}(t)$. Для будь-якого наступного моменту часу $t+\Delta t$ вектор переміщення можна записати у вигляді $\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta\vec{r}$. Бачимо, що переміщення, яке здійснило тіло за час Δt, дорівнює приросту радіус-вектора за цей проміжок часу:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t).$$

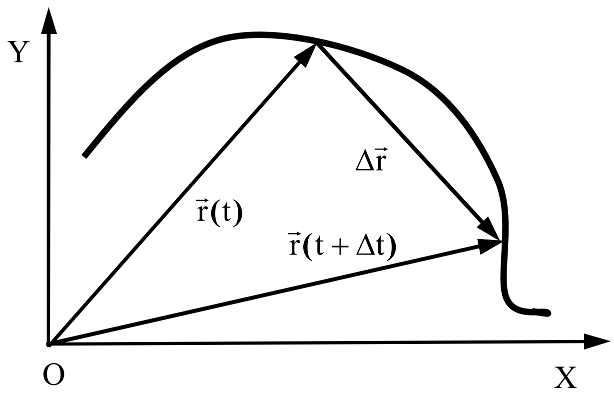

Рис. 7

Звідси отримуємо, що приріст проекцій радіус-вектора, або вектора переміщення, дорівнює приросту координат рухомої точки $\Delta r_X = \Delta x$, $\Delta r_Y = \Delta y$, $\Delta r_Z = \Delta z$. Коли інтервал часу нескінчено малий, то Δt позначають dt, а Δx – dx, Δy – dy, Δz – dz. Такі dt, dx, dy, dz називають *елементарними* змінами часу та координат. Елементарну зміну вектора переміщення позначають $d\vec{r}$. Модуль елементарного переміщення $|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$.

1.6. Швидкість

Швидкістю називають фізичну величину, яка характеризує зміну вектора переміщення за одиницю часу. Експериментально вектор швидкості визначається відношенням

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення, здійснене за час Δt. Тим самим таке означення відповідає середньому вектору швидкості за час Δt. При цьому величина Δt визначається умовами руху. Найбільш точне значення швидкості можна отримати, коли $\Delta t \to 0$, але слід мати на увазі, що при $\Delta t \to 0$ виникає проблема вимірювання дуже малої величини переміщення $\Delta\vec{r}$.

В формулі для швидкості $\Delta\vec{r}$ визначається через різницю положень тіла в різні (початковий і кінцевий) моменти часу. Але коли $\Delta t \to 0$, то наступне положення тіла майже співпадає з початковим, і в цьому випадку відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ стає характеристикою руху, визначеній в певний (заданий) момент часу. Отже, при $\Delta t \to 0$ швидкість є миттєвою характеристикою руху. На рис. 8 показані положення вектора переміщення, які визначені для однієї початкової точки, але для трьох різних інтервалів часу $\Delta t_3 > \Delta t_2 > \Delta t_1$. Бачимо, що при зменшенні інтервалу часу січна вектора переміщення стає дотичною до траєкторії.

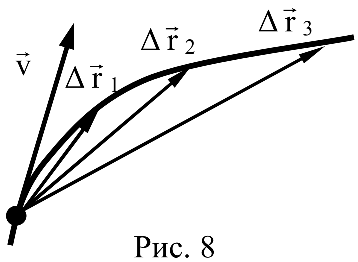

Рис. 8

Оскільки за визначенням $\vec{v} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$, то миттєва швидкість, будучи направленою вздовж дотичної до траєкторії руху точки, набуває геометричного смислу.

В математиці межа відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ є похідною від радіус-вектора $\vec{r}$, тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Вираз для швидкості можна записати у вигляді

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

З'ясуємо фізичний смисл диференціювання векторної функції. Розглянемо приріст радіус-вектора при зміні часу на Δt, тобто знайдемо різницю радіус-векторів в момент часу $t + \Delta t$ і в момент часу t:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t).$$

Запишемо радіус-вектори через їх проекції

$$\vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k},$$

$$\vec{r}(t) = (x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}).$$

Тепер приріст радіус-вектору може бути записаний через зміну його координат

$$\Delta\vec{r} = [x(t+\Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\vec{j} + [z(t+\Delta t) - z(t)]\vec{k},$$

або

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k},$$

де позначено $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$, $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$.

Поділимо приріст радіус-вектора $\Delta\vec{r}$ на приріст часу Δt, за який і сталася зміна $\Delta\vec{r}$. Отримаємо, що швидкість точки виражається через зміну її проекцій

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

В загальному випадку вектор швидкості може бути записаний у вигляді

$$\vec{v} = v_X\vec{i} + v_Y\vec{j} + v_Z\vec{k}.$$

Порівнюючи два останні вирази, знаходимо формулу експериментального визначення проекцій вектора швидкості:

$$v_X = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_Y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_Z = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Коли $\Delta t \to 0$, то розглянуті відношення є похідними проекцій радіус-вектора:

$$v_X = \frac{dx}{dt}, \quad v_Y = \frac{dy}{dt}, \quad v_Z = \frac{dz}{dt}.$$

Іншою мовою, проекції вектора швидкості є похідними координат рухомої точки.

Модуль вектора швидкості також визначається стандартно:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}.$$

Напрямок вектора швидкості відповідає напрямку руху, а модуль швидкості дорівнює довжині вектора швидкості. Знайдемо скалярний добуток одиничного вектора $\vec{i}$ на вектор $\vec{v}$

$$\vec{i}\vec{v} = |\vec{i}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha = v \cdot \cos\alpha.$$

де α – кут між векторами $\vec{i}$ та $\vec{v}$. Враховано, що модуль вектора $\vec{i}$ дорівнює одиниці $|\vec{i}| = 1$.

Як і для координат, добуток модуля вектора швидкості на косинус кута між ним та віссю OX визначає його проекцію на цю вісь $v \cdot \cos\alpha = v_X$, тому

$$\vec{i}\vec{v} = v_X.$$

Порівнюючи праві частини виразів для скалярного добутку, приходимо до висновку, що косинус кута між вектором швидкості і координатною віссю OX визначається формулою:

$$\cos\alpha = \frac{v_X}{v}$$

Подібним чином можна розглянути і добутки одиничних векторів $\vec{j}$, $\vec{k}$ з вектором $\vec{v}$ і знайти кути між вектором швидкості та іншими координатними осями.

Коли при криволінійному русі модуль швидкості є постійним, v=const, то такий рух називають *рівномірним*. У випадку рівномірного руху вздовж прямої (коли за означенням $\vec{v}$ =const) рух називають *рівномірним прямолінійним*.

Одиницею виміру швидкості в СІ є $[v] = \frac{м}{с}$ (метр на секунду). Проекції вектора швидкості також вимірюються в цих одиницях.

1.7. Визначення переміщення через швидкість.

Вважатимемо, що нам відома залежність швидкості від часу, тобто встановлені залежності проекцій вектора швидкості від часу: $\vec{v}(t) \rightarrow v_X(t), v_Y(t), v_Z(t)$. Розглянемо спочатку часову залежність X-вої проекції швидкості. Для прикладу на рис. 9 показана залежність $v_X(t)$. Нас цікавить розрахунок X-вої проекції переміщення, що здійснене за проміжок часу $[t_1, t_2]$. При виконанні такого розрахунку використаємо визначення для X-вої проекції швидкості $v_X = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. З нього випливає, що приріст координати Δx, який рівний приросту X-вої проекції переміщення, дорівнює $\Delta x = v_X \Delta t$, за умови, що Δt мале. Якщо при цьому $\Delta t \rightarrow 0$, то зміна координат за час Δt дорівнює площі вузької смужки шириною Δt (див. рис. 9).

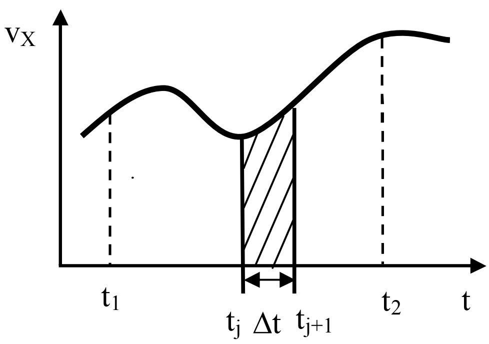

Рис. 9

Тепер розіб'ємо інтервал $[t_1, t_2]$ на сукупність інтервалів шириною Δt, при умові, що $\Delta t \rightarrow 0$. Кількість смужок рівна N. Пронумеруємо їх. Номеру j відповідає момент часу t_j, а номеру j+1 відповідає момент часу t_{j+1}, величина якого рівна $t_{j+1} = t_j + \Delta t$. Координата точки в момент часу t_{j+1} дорівнює

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x_j = x_j + v_x(t_j)\Delta t\,.$$

Зміна координати рухомої точки на інтервалі $[t_1, t_2]$ буде дорівнюватиме сумі площ усіх таких смужок з зазначеного інтервалу. Таким чином, величина Δr_X за час $[t_1, t_2]$ дорівнює площі під кривою, обмеженою цим інтервалом часу

$$\Delta r_X = x_2 - x_1 = \sum_{j=1}^{N} v_X(t_j)\Delta t.$$

Коли $\Delta t \to 0$, зазначена сума є інтегралом, тому

$$\Delta r_X = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_X(t)dt.$$

Подібним чином, розглядаючи часові залежності для проекцій $v_Y(t)$ та $v_Z(t)$, можна визначити У-ову та Z-ову проекції вектора переміщення на тому ж інтервалі часу $[t_1, t_2]$:

$$\Delta r_Y = y_2 - y_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_Y(t)dt,$$

$$\Delta r_Z = z_2 - z_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_Z(t)dt.$$

Отже, проекції для вектора переміщення знаходять шляхом інтегрування проекцій швидкості.

Але коли відомі проекції вектора переміщення, то легко визначається і сам вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} =$$

$$= \vec{i}\int_{t_1}^{t_2} v_X(t)dt + \vec{j}\int_{t_1}^{t_2} v_Y(t)dt + \vec{k}\int_{t_1}^{t_2} v_Z(t)dt.$$

Внесемо орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ під знак інтеграла; маємо:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_X(t)\vec{i}dt + \int_{t_1}^{t_2} v_Y(t)\vec{j}dt + \int_{t_1}^{t_2} v_Z(t)\vec{k}dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (v_X(t)\vec{i} + v_Y(t)\vec{j} + v_Z(t)\vec{k})dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt.$$

Таким чином, повне переміщення, здійснене тілом протягом інтервалу часу $[t_1, t_2]$, можна записати у вигляді інтегралу

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)dt.$$

Якщо момент часу t_1 покласти початковим, $t_1=0$, і віднести до нього положення точки з радіус-вектором $\vec{r}_0$, а момент часу $t_2=t$, якому відповідає радіус-вектор $\vec{r}(t)$, вважати довільним, то вираз для переміщення тіла за час t набуває вигляду:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt .$$

При прямолінійному рівномірному русі, коли за означенням $\vec{v}$ =const, інтегрування здійснюється тривіально, приходимо до висновку, що радіус-вектор є лінійною функцією часу, а саме:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t .$$

Таким чином, в кінематиці розв'язок основної задачі механіки – знаходження положення тіла в довільний момент часу – здійснюється шляхом інтегрування вектора швидкості.

1.8. Шлях. Середня швидкість

Шлях – це скалярна фізична характеристика механічного руху, яка визначається відстанню, що проходить тіло вздовж траєкторії під час руху за певний проміжок часу. На рис. 10 для прикладу наведено довільну траєкторію криволінійного плоского руху точки протягом інтервалу часу [t_1, t_2]. Розіб’ємо цю траєкторію на малі лінійні ділянки кількістю N. Кожна з них відповідає однаковому проміжку часу Δt. На рис. 10 переміщення для таких ділянок позначені відповідно векторами $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$,... Величини цих переміщень знаходяться умови припущення про рівномірність руху на малих часових інтервалах, а отже $\Delta\vec{r}_j = \vec{v}(t_j)\Delta t$, де $\vec{v}(t_j)$ - швидкість на j-ій ділянці.

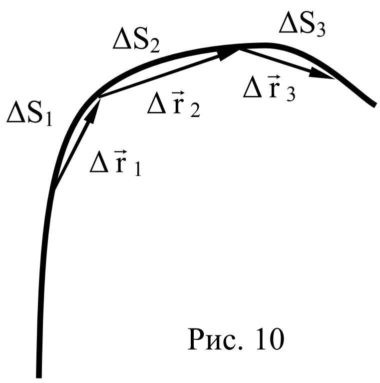

Рис. 10

Коли $\Delta t \to 0$, то довжина ΔS_j j-ї ділянки траєкторії наближено дорівнює відрізку січної, яка наближено випрямляє цю ділянку, тобто $\Delta S_j = \left|\Delta\vec{r}_j\right|$. Звідси при досить малому $\Delta t \to 0$ довжина ділянки траєкторії може бути представлена добутком

$$\Delta S_j = \left|\vec{v}(t_j)\right| \cdot \Delta t$$

В результаті шлях, що пройшла точка вздовж траєкторії протягом інтервалу часу [t_1, t_2], буде визначатися сумою шляхів на всіх ділянках, $S = \sum\limits_{j=1}^{N} \Delta S_j$. Величина цієї суми може бути переписана за допомогою швидкості, $S = \sum\limits_{j=1}^{N} \left|\vec{v}(t_j)\right| \Delta t$.

Коли $\Delta t \to 0$, то сума стає інтегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{v}(t)\right| dt .$$

Введемо позначення $\left|\vec{v}(t)\right| = v(t)$. В такому разі вираз для шляху S, який пройшла рухома точка протягом інтервалу часу $[t_1, t_2]$, набуває вигляде

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt .$$

Згідно теоремs про середнє, величина інтеграла може бути представлена добутком середнього значення $v_{сер}$ швидкості на величину інтервалу:

$$S = v_{сер}(t_2 - t_1) \ ,$$

і відповідно

$$v_{сер} = \frac{S}{t_2 - t_1} .$$

Середню швидкість інколи позначають $\langle v \rangle = v_{сер}$.

Величину $\langle v \rangle$ можна знайти інтегруванням:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt .$$

При рівномірному русі, коли $\left|\vec{v}(t)\right| = v = const$, шлях, пройдений рухомою точкою, прямо пропорційний часу $S = vt$.

1.9. Прискорення тіла

При нерівномірному русі вектор швидкості не є постійною величиною, бо змінюється і напрямок руху, і величина модуля вектора швидкості. Фізична величина, яка характеризує зміну швидкості під час руху називається *прискоренням*.

Експериментально прискорення визначають з відношення зміни $\Delta\vec{v}$ вектора швидкості до інтервалу часу Δt, протягом якого відбулась ця зміна

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} .$$

Чим меншим є величина інтервалу Δt, тим точніше виявиться значення прискорення. Коли $\Delta t \to 0$, то таке відношення є миттєвою характеристикою руху, яка визначається границею

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t},$$

тобто прискорення є часовою похідною швидкості:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Як і будь-який вектор прискорення може бути записане сумою його проекцій, $\vec{a} = a_X \vec{i} + a_Y \vec{j} + a_Z \vec{k}$, а похідна вектора швидкості $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_X}{dt}\vec{i} + \frac{dv_Y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_Z}{dt}\vec{k}$, тому проекції вектора прискорення є похідними відповідних проекцій швидкості:

$$a_X = \frac{dv_X}{dt},\ a_Y = \frac{dv_Y}{dt},\ a_Z = \frac{dv_Z}{dt}.$$

Оскільки швидкість є похідною радіус-вектора $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то прискорення може бути визначене як друга похідна від радіус-вектора:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Відповідно, проекції вектора прискорення можуть бути записані через другі похідні проекцій радіус-вектора, або другі похідні координат рухомої матеріальної точки:

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2},\ \ a_Y = \frac{d^2y}{dt^2},\ \ a_Z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль вектора прискорення також знаходиться за стандартним правилом:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2 + a_Z^2}.$$

Одиницею виміру прискорення в СІ є [a]= $\frac{м}{c^2}$ (метр на секунду в квадраті).

1.10. Визначення швидкості через прискорення

Припустимо, що залежність прискорення від часу відома, тобто відомі часові залежності для проекцій вектора прискорення, $\vec{a}(t) \to a_X(t)$, $a_Y(t)$, $a_Z(t)$. Розрахуємо швидкість за допомогою прискорення.

Спочатку, використовуючи $a_X(t)$, розрахуємо X-ву проекцію $v_X(t)$ швидкості. На рис. 11 наведено графік залежності $a_X(t)$ на інтервалі часу $[t_1, t_2]$. Розіб'ємо інтервал $[t_1, t_2]$ цього графіка на сукупність однакових ділянок шириною Δt і кількістю N. Номеру j відповідає момент часу t_j, а номеру j+1 –момент часу t_{j+1}, величина якого рівна $t_{j+1} = t_j + \Delta t$.

Врахуємо, що при $\Delta t \to 0$ для проекції прискорення виконується співвідношення $a_X = \frac{\Delta v_X}{\Delta t}$, з якого знаходимо, що приріст X-вої проекції швидкості дорівнює $(\Delta v_X)_j = a_X(t_j)\Delta t$.

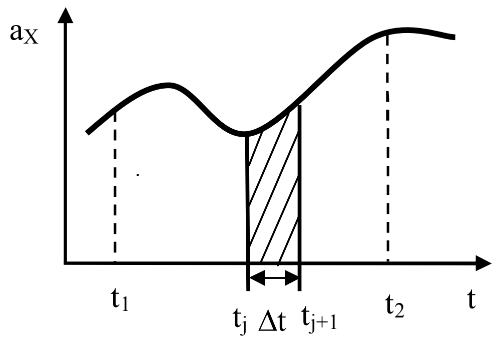

Рис. 11

За час Δt зміна проекції швидкості дорівнює площі вузької смужки шириною Δt. Зміна проекції швидкості на інтервалі $[t_1, t_2]$ дорівнюватиме сумі площ усіх таких смужок.

Таким чином, величина зміни проекції швидкості Δv_X за час $[t_1, t_2]$ дорівнює площі під кривою, обмеженою цим інтервалом часу

$$\Delta v_X = v_X(t_2) - v_X(t_1) = \sum_{j=1}^{N} a_X(t_j)\Delta t .$$

Коли $\Delta t \to 0$, то зазначена сума стає інтегралом, тому

$$\Delta v_X = v_X(t_2) - v_X(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_X(t)dt .$$

Таким же чином, розглядаючи залежності від часу для $a_Y(t)$, $a_Z(t)$, можемо визначити зміну Y-ої та Z-ої проекцій вектора швидкості на інтервалі часу $[t_1, t_2]$:

$$\Delta v_Y = v_Y(t_2) - v_Y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_Y(t)dt,$$

$$\Delta v_Z = v_Z(t_2) - v_Z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_Z(t)dt .$$

Зазначені співвідношення для проекцій можна переписати у загальному векторному вигляді

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{v} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t)dt .$$

Якщо момент часу t_1, в якому точка має швидкість $\vec{v}_0$, вважати початковим t_1=0, і а момент часу t_2, в якому точка рухається зі швидкістю $\vec{v}(t)$ довільним, то з останнього виразу випливає, що

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t d\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt .$$

Зрозуміло, що аналогічний вираз можна записати і для проекцій швидкості.

При русі з постійним прискоренням $\vec{a}(t)$ знаходження швидкості шляхом інтегрування здійснюється тривіально, приводячи до лінійної залежності

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Здійснюючи ще одне інтегрування цієї формули, отримаємо формулу для часової залежності радіус-вектора матеріальної точки, яка рухається з постійним прискоренням:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2.$$

Остання формула відповідає рівноприскореному руху і виконується для прямолінійного рівноприскореного руху, а також при інших більш складних рухах. Наприклад, він виявляється справедливим, коли тіло кинуто під кутом до горизонту. В цьому випадку тіло рухається з прискоренням вільного падіння $\vec{g}$, яке є незмінним і направленим вздовж вертикалі до поверхні Землі, і дорівнює $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Оскільки інші проекції прискорення відсутні, а початкова швидкість направлена під кутом до горизонту, то траєкторією тіла є парабола.

1.11. Нормальне і тангенціальне прискорення

У випадку криволінійного руху швидкість спрямована по дотичній до траєкторії, причому її напрямок весь час змінюється. Отже, криволінійних рух – це завжди рух з прискоренням. При такому русі розділяють два типи внесків в прискорення: один пов'язаний із зміною напрямку вектора швидкості; а другий – із зміною модуля вектора швидкості.

Розглянемо довільний нерівномірний криволінійний рух точки (рис. 12). Нехай в початковий момент тіло знаходилося в точці M_1 зі швидкістю $\vec{v}_1$, а через час Δt воно опинилося в точці M_2 траєкторії, де його швидкість набула значення $\vec{v}_2$. Зміна швидкості за цей проміжок часу визначається різницею $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

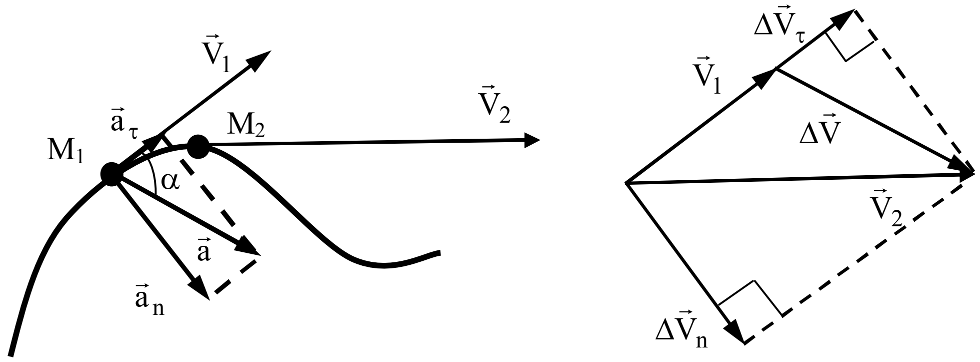

Рис. 12

Як показано в правій частині рис. 12, елементарну зміну швидкості можна розбити на дві складові

$$d\vec{v} = d\vec{v}_\tau + d\vec{v}_n ,$$

де $d\vec{v}_\tau$ – складова зміни швидкості співнаправлена з $\vec{v}_1$, і яка лежить вздовж дотичної до траєкторії в точці M_1, а $d\vec{v}_n$ – складова зміни швидкості, яка перпендикулярна до $\vec{v}_1$ і направлена вздовж нормалі до дотичної в точці M_1 траєкторії (див. рис. 12).

За визначенням прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} .$$

З урахуванням представлення зміни швидкості тангенціальним і нормальним доданками знаходимо співвідношення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt} ,$$

з якого видно, що вектор прискорення також містить дві складові

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n ,$$

де $\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}$ – *тангенціальна* складова прискорення, $\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}$ – *нормальна* складова прискорення.

Тангенціальна складова прискорення $\vec{a}_\tau$, як і вектор швидкості, лежить вздовж дотичної до траєкторії. Ця складова обумовлена зміною модуля вектора швидкості. Позначимо модуль швидкості $v=|\vec{v}|$. Величина проекції тангенціального прискорення на напрямок заданий швидкістю визначається похідною модуля швидкості

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} .$$

Коли модуль швидкості зростає, тангенціальна проекція прискорення додатна, і навпаки, коли модуль швидкості зменшується, ця проекція буде від'ємною величиною.

Нормальна складова прискорення пов’язана із зміною напрямку руху. Вона тим більша, чим більшою є швидкість і чим меншим є радіус кривизни траєкторії.

Терміном *радіус кривизни* визначають радіус заокруглення ділянки траєкторії поблизу розглядуваної точки. Доцентрове прискорення направлене до центру заокруглення. Саме доцентрове прискорення визначає значення величини нормального прискорення, яке, таким чином, має вигляд:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

де v – модуль швидкості, а R – радіус кривизни. Ця формула буде доведена в наступному розділі.

Тангенціальна і нормальна складові прискорення, будучи векторними змінними, перпендикулярні між собою $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$ в кожній точці траєкторії. Тому модуль прискорення може бути визначений у стандартній формі:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}\,.$$

Кут α між вектором швидкості $\vec{v}$ і вектором прискорення $\vec{a}$ визначається з відношення (див. рис. 12)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}\,.$$

Нормальна складова прискорення існує і при рівномірному криволінійному русі, або русі по колу, коли модуль швидкості є постійним, або $\vec{a}_\tau$=0.