2. Кінематика обертального руху

Розглянемо тверде тіло, яке здійснює обертальний рух. Будемо вважати, що тіло *абсолютно тверде*, тобто воно не зазнає деформацій, зберігаючи під час руху свою форму. Якщо вісь, відносно якої обертається тіло, є нерухомою, то такий рух тіла називають *обертанням тіла навколо нерухомої осі*. В цьому випадку всі точки тіла описують кола, центри яких лежать на осі обертання, а площини цих кіл перпендикулярні до неї.

У загальному випадку рух тіла є складним і його прийнято розкладати на два різні – поступальний та обертальний рухи. На рис. 13 наведено приклад такого розкладу.

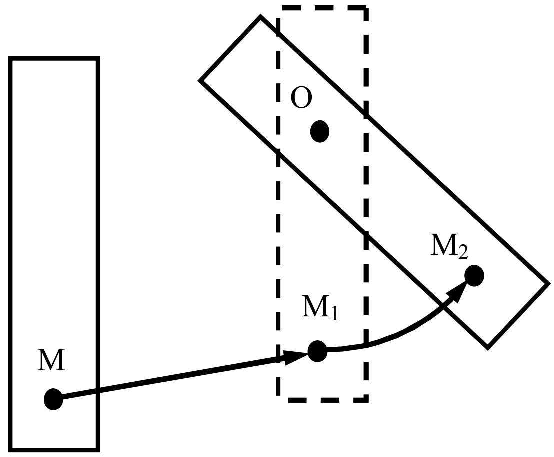

Рис. 13

Суцільними лініями позначено два положення тіла – початкове (у лівій частині рисунка), та кінцеве (у його правій частині). При цьому можна вважати, що тіло спочатку здійснило поступальний рух і опинилося в деякому проміжному положенні, яке на рисунку позначене пунктиром. Далі з цього положення тіло виконує уже тільки обертальний рух навколо осі, що проходить через точку О, яка при обертанні залишається нерухомою. Під час обертання тіло з проміжного положення переходить до кінцевого.

Виділимо на тілі довільну точку М. Після здійснення руху вона змінить своє положення, тобто $M \to M_2$. Проміжне положення цієї точки позначимо M_1. Тоді видно, що при поступальному русі тіла виділена точка здійснює переміщення $\overrightarrow{MM_1}$, а при обертальному русі – переходить, як зазначалося, до точки M_2.

Під час поступального руху всі точки твердого тіла рухаються однаково і мають тотожні переміщення, що дорівнюють $\overrightarrow{MM_1}$, а отже ця складова руху всіх (без виключення) точок тіла повинна описуватися однаковими кінематичними рівняннями руху. Зрозуміло, що в умовах такого руху тверде тіло може без обмежень вважатися матеріальною точкою.

На стадії обертання це не так, бо рух різних точок тіла характеризується різними за значеннями кінематичними характеристикам. Різні частини тіла здійснюють, як не важко переконатися, різні переміщення, мають різні за напрямком і величиною швидкості та прискорення.

На відміну від поступального руху, обертальний рух є відносно складним. Насамперед, якщо тіло (див. рис. 13) приймає участь в обертальному русі, то таке тіло вже не можна вважати матеріальною точкою. Тому для опису обертального руху необхідно використовувати інший підхід, який дозволяє обмежитися невеликою і, що важливо, фіксованою кількістю змінних. Нижче буде продемонстровано, що кінематичний опис обертального руху твердого тіла можна здійснити, використовуючи не декартові, а кутові кінематичні змінні: кутове переміщення, кутову швидкість та кутове прискорення.

2.1. Рух по колу

Для прикладу почнемо з найпростішого випадку – плоского руху матеріальної точки по траєкторії, яка є колом. Для кінематичного опису подібного руху зручно застосувати декартову систему координат, осі OX та OY якої лежать в цій же площині, а початок розташований в центрі кола (точка O рис. 14). У такій системі відліку довільне положення рухомої точки задається, як завжди, двома координатами x та y. Радіус-вектор $\vec{r}$ рухомої точки з'єднує точку O з точками траєкторії. Його проекції дорівнюють координатам точок кола $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, а модуль радіус-вектора визначає радіус $|\vec{r}| = r$ кола. Оскільки круговому руху відповідає незмінний за величиною модуля r радіус-вектор $\vec{r}(t)$, положення будь-якої точки на колі в момент часу t однозначно визначається кутом φ(t) між віссю OX та вектором $\vec{r}$. Використання єдиної кутової змінної φ(t) набагато зручніше використання двох декартових координат, бо тепер координати x(t) та y(t) рухомої точки, або проекції радіус-вектора $\vec{r}(t)$ можна представити у вигляді

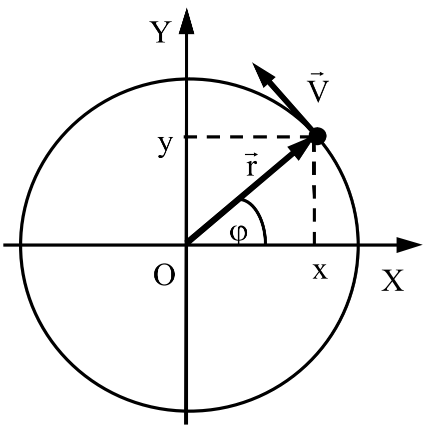

Рис. 14

$$x(t) = r\cos\varphi(t), \quad x(t) = r\sin\varphi(t),$$

Обидві проекції радіус-вектора залежать від кута φ, зміна якого описує переміщення тіла по круговій траєкторії, тобто задовольняючи умові $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = r$ для всіх значень t.

Знайдемо вирази для декартових проекцій швидкості. Для цього розрахуємо похідні по t від проекцій (координат) радіус-вектора:

$$v_X(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -r\sin\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

$$v_Y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = r\cos\varphi(t)\frac{d\varphi(t)}{dt},$$

де при знаходженні похідних по t застосовано правило диференціювання складної функції і враховано, що r=const.

Проекції швидкості залежать від величини кута φ(t) та його похідної $\frac{d\varphi(t)}{dt}$. Коли $\frac{d\varphi(t)}{dt} > 0$ (див. рис. 14), що означає рух проти стрілки годинника, X-ва проекція швидкості буде від'ємною, а Y-ва проекція швидкості – додатною.

За означенням модуль вектора швидкості розраховується за формулою:

$$v(t) = \sqrt{v_X^2(t) + v_Y^2(t)} =$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2} = r\left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|.$$

Іншою мовою, приходимо до висновку, що модуль швидкості визначається модулем похідної кута повороту радіус-вектора, що помножений на радіус кола.

Часова похідна від кута φ(t) характеризує швидкість обертання і називається *кутовою швидкістю*. Її позначають $\vec{\omega}$ (див. далі), а її модуль дорівнює $\omega = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$.

Отже, швидкість точки при русі по круговій траєкторії прямо пропорційна як кутовій швидкості, так і радіусу кола:

$$v(t) = r|\omega|.$$

Знайдемо тепер часові залежності для проекцій вектора прискорення $\vec{a}(t)$, що відповідає рухові по колу. Для цього розрахуємо похідні від проекцій швидкості $\vec{v}(t)$:

$$a_X(t) = \frac{dv_X(t)}{dt} = -r\sin\varphi(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - r\cos\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2,$$

$$a_Y(t) = \frac{dv_Y(t)}{dt} = r\cos\varphi(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - r\sin\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2.$$

При розрахунку цих похідних було використано правило диференціювання добутку та правило диференціювання складної функції.

Видно, що проекції вектора $\vec{a}(t)$ залежать не тільки від величини кута φ(t) та квадрата $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ його похідної першого порядку, але й від $\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$ похідної другого порядку функції φ(t).

За означенням квадрат вектора дорівнює сумі квадратів його проекцій, тому

$$a^2(t) = a_X^2(t) + a_Y^2(t) =$$

$$= \left(-r\sin\varphi(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - r\cos\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2\right)^2 +$$

$$+\left(r\cos\varphi(t)\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} - r\sin\varphi(t)\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2\right)^2.$$

Виконуючи прості обчислення та скорочуючи подібні, отримуємо вираз для модуля прискорення

$$a(t) = r\sqrt{\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^4 + \left(\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\right)^2}.$$

З'ясуємо фізичний смисл доданків під коренем.

Спочатку розглянемо перший з них при умові $\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$=0, що означає $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \text{const}$.

Тоді легко бачити, що $a(t) \equiv a = r\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2$. Помножимо і поділимо цей вираз на r, та внесемо r під знак квадрату:

$$a = r\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 = \frac{r^2}{r}\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r}\left(r\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2 = \frac{v^2(t)}{r},$$

де враховано отриманий вище зв'язок між модулем та похідною кута повороту: $v(t) = r\left|\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|$.

Таким чином, першою складовою прискорення є не що інше, як нормальне прискорення a_n (див. пункт 1.11), яке в кожний момент часу може бути представлене виразом

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)^2.$$

Похідна в дужках є кутовою швидкістю ω. Отже нормальне прискорення пропорційне квадрату кутової швидкості:

$$a_n = r\omega^2.$$

Розглянемо тепер другий доданок, $\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$ і представимо його у вигляді

$$r\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\varphi(t)}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}.$$

Бачимо, що він пов'язаний з тангенціальним прискоренням точки, а його величина задається часовою похідною від модуля швидкості.

Таким чином, показано, що тангенціальне прискорення пропорційне другій похідній кута повороту

$$a_{\tau} = r\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}.$$

Друга похідна – це перша похідна від кутової швидкості ω, тобто прискорення, яке називають *кутовим прискоренням*

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Тим самим приходимо до висновку, що модуль тангенціального прискорення пропорційний кутовому прискоренню

$$a_{\tau} = r\varepsilon.$$

Таким чином, з аналізу руху матеріальної точки по круговій траєкторії випливає, що положення, швидкість та прискорення точки можна знайти використовуючи лише кутову характеристику її обертального руху – кут повороту, зміна якого визначає кутову швидкість та кутове прискорення. Цих змінних вистачає для однозначного опису руху матеріальної точки по колу.

2.2. Кутове переміщення

Розглянемо точку, що рухається по колу радіуса r (рис. 15). Її положення будемо знову характеризувати радіус-вектором $\vec{r}(t)$, визначеним відносно точки відліку, що знаходиться в центрі кола. Координатні вісі OX та OY лежать в площині кола, а вісь OZ направлена перпендикулярно до площини кола. Нехай в момент часу t_1 положення точки задається вектором $\vec{r}(t_1)$, а в момент часу t_2 – вектором $\vec{r}(t_2)$, так що $|\vec{r}(t_1)| = |\vec{r}(t_2)| = r$. За проміжок часу $\Delta t = t_2 - t_1$ точка здійснює переміщення $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$. Це переміщення відповідає куту повороту Δφ. Шлях ΔS, який проходить точка за час Δt, дорівнює довжині дуги, що опирається на кут Δφ, тобто $\Delta S = r\cdot\Delta\varphi$. Як видно з рисунка, для скінченого Δt шлях не дорівнює модулю вектора переміщення $\Delta S \neq |\Delta\vec{r}|$, хоча обидві ці величини залежать від кута Δφ, причому $\Delta S > |\Delta\vec{r}|$.

Знання величини кута повороту не є достатнім для однозначного визначення руху точки, бо вона може рухатися як за годинниковою стрілкою, так і проти неї. Для визначення напрямку обертального руху застосовують фізичну величину, яку називають *вектором кутового переміщення* і позначають $\Delta\vec{\varphi}$. За означенням модуль вектора кутового переміщення дорівнює куту повороту, $\Delta|\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$. Для фіксованої осі обертання, якою є вісь OZ, вектор кутового переміщення направлений вздовж (або проти) цієї осі і перпендикулярний до площини кола. Таким чином, в даному випадку вектор кутового переміщення задає не тільки напрямок обертання точки навколо осі (або проти) годинникової стрілки, а й визначає орієнтацію цієї осі в просторі.

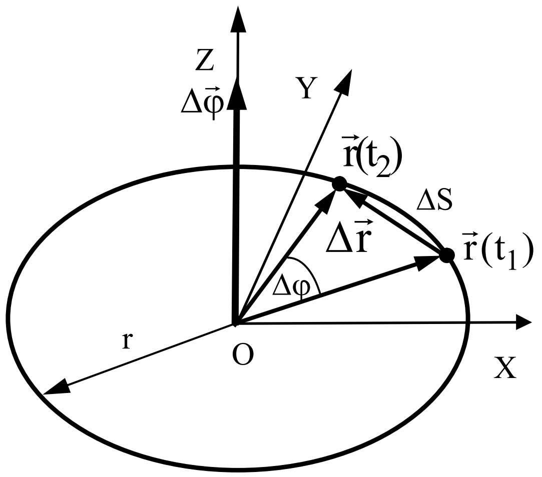

Рис. 15

Напрямок вектора кутового переміщення (вектора кута повороту) задовольняє *правилу правого гвинта*, за яким вектор кута повороту збігається з напрямком поступального руху гвинта, що обертається в напрямку руху точки по колу. Для обертального руху точки проти годинникової стрілки (див. рис. 15) вектор $\Delta\vec{\varphi}$ направлений вздовж координатної осі OZ ($\Delta\vec{\varphi}\uparrow\uparrow$OZ). Коли ж точка рухатиметься за годинниковою стрілкою, то вектор кута повороту буде направлений протилежно до осі, тобто $\Delta\vec{\varphi}\uparrow\downarrow$OZ.

Кут повороту $\Delta\vec{\varphi}$ і переміщення $\Delta\vec{r}$ визначаються положенням точки для двох різних моментів часу t_1 та t_2 і прямого зв'язку між цими векторами нема. Коли $\Delta t\to 0$, або йдеться про дуже малий інтервал часу dt, наступне і початкове положення тіла майже співпадають. В такій ситуації модуль вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ прямує до довжини дуги dS; при цьому вектор $\vec{r}$ направлений по дотичній до кола в місці розташування рухомої точки (див. рис. 16). Інтервалу часу dt і елементарному переміщенню $d\vec{r}$ відповідає свій елементарний кут повороту $d\vec{\varphi}$.

Величини елементарного кута повороту і елементарного переміщення часу зв'язані між собою векторним співвідношенням, за яким елементарне переміщення дорівнює векторному добутку елементарного кута переміщення на радіус-вектор, а саме:

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}].$$

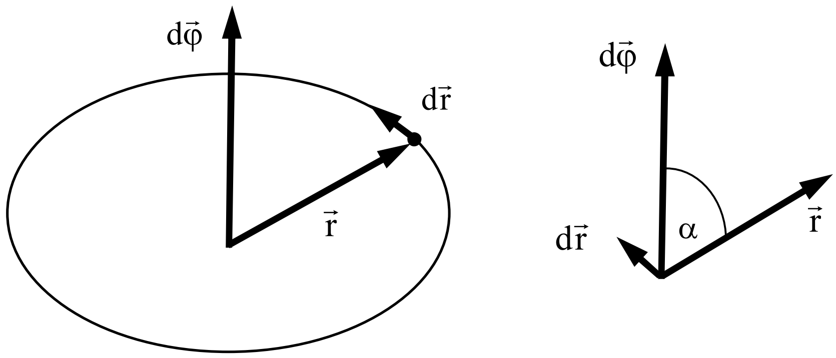

Рис. 16

Нагадаємо, що векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається квадратними дужками і задовольняє умові $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$. З цього випливає, що напрямок вектора $\vec{c}$, утвореного в результаті векторного добутку $\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, задовольняє правилу правого гвинта. Модуль вектора $\vec{c}$ визначається за формулою $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Згідно з цим означенням, модуль вектора переміщення прямо пропорційний модулю радіус-вектора та модулю вектора кута повороту

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}| \cdot \sin\alpha \cdot |d\vec{\varphi}|,$$

де α – кут між векторами $d\vec{\varphi}$ і $\vec{r}$ (див. рис. 16). У випадку вибору точки відліку в центрі кола, по якому вона рухається, кут $\alpha=\pi/2$, а модуль радіус-вектора $|\vec{r}| = r$, і тому $|d\vec{r}| = r \cdot |d\vec{\varphi}| = r d\varphi$. Відповідно, і елементарний шлях $dS = |d\vec{r}| = r \cdot d\varphi$.

2.3. Кутова швидкість

Кутова швидкість є векторною кінематичною характеристикою обертального руху. Вона характеризує зміну вектора кутового переміщення за одиницю часу. Експериментально кутова швидкість визначається відношенням

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{\varphi}$ – приріст кута повороту за час Δt. Коли $\Delta t \to 0$, то приріст кута повороту буде рівний елементарному куту повороту $d\vec{\varphi}$, а кутова швидкість визначатиметься часовою похідною:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Як вже зазначалося, кутова швидкість направлена вздовж напрямку вектора кутового переміщення $\vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$. При обертальному русі по колу вектор кутової швидкості направлений перпендикулярно до площини кола вздовж (чи проти) осі обертання. Коли під час руху змінюється орієнтація осі обертання, то разом з нею буде змінюватися і напрямок вектора кутової швидкості, причому кутова швидкість буде направлена вздовж миттєвої осі обертання. Якщо ж здійснюється обертальний рух навколо двох осей, то кутова швидкість сумарного руху дорівнюватиме сумі кутових швидкостей

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 ,$$

де $\vec{\omega}_1$ та $\vec{\omega}_2$ – кутові швидкості обертальних рухів навколо цих осей.

Знайдемо зв'язок між векторами швидкості та кутової швидкості. Швидкість, яку набуває точка внаслідок обертального руху, визначається $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Врахуємо також, що при русі по колу елементарне переміщення дорівнює векторному добутку $d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\vec{r}]$. Звідси знаходимо, що швидкість також визначається векторним добутком:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = [\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}] .$$

За означенням похідна кута повороту є кутовою швидкістю. Тому швидкість точки при обертальному русі може бути представлена векторним добутком, в який входить кутова швидкість:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] .$$

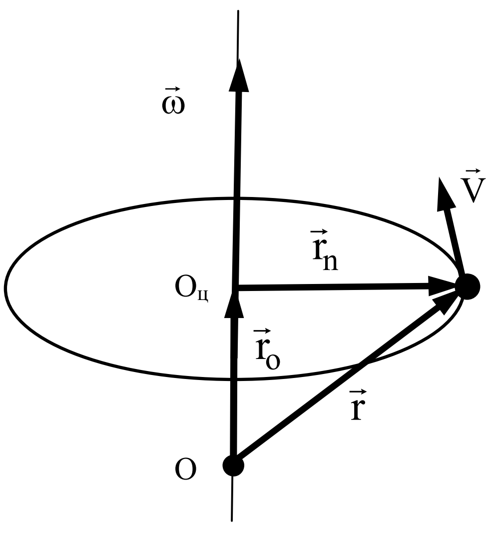

Рис. 17

Нагадаємо, що радіус-вектор $\vec{r}$ характеризує положення матеріальної точки відносно тіла відліку. В останньому виразі точкою відліку може бути довільна точка (наприклад, точка O на рис. 17), що лежить на осі обертання. Така точка вже не співпадає з центром кола траєкторії точкою $O_ц$ на рис. 17.

На рис. 17 кутова швидкість $\vec{\omega}$ направлена вздовж осі обертання $OO_ц$. Представимо радіус-вектор сумою векторів $\vec{r} = \vec{r}_n + \vec{r}_o$, де $\vec{r}_n$ – вектор, який сполучає центр кола $O_ц$ з рухомою точкою, і який є проекцією радіус-вектора $\vec{r}$ на площину кола, $\vec{r}_o$ – проекція радіус-вектора $\vec{r}$ на вісь $OO_ц$. Підставимо $\vec{r} = \vec{r}_n + \vec{r}_o$ у вираз для кутової швидкості. Отримаємо

$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}] = [\vec{\omega}(\vec{r}_n + \vec{r}_o)] = [\vec{\omega}\vec{r}_n] + [\vec{\omega}\vec{r}_o] = [\vec{\omega}\vec{r}_n]$, де враховано, що векторний добуток $[\vec{\omega}\vec{r}_o]$=0, бо вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{r}_o$ співнаправлені (див. рис. 17), тобто кут між ними дорівнює нулеві.

Отже отримуємо, що величина векторного добутку $[\vec{\omega}\vec{r}]$ не залежить від положення початку відліку на осі обертання. Тому положення точки відліку О на осі обертання може бути довільним.

Коли кутова швидкість відома, то розрахунок кута повороту здійснюється шляхом інтегрування проекції кутової швидкості на вісь обертання. Позначимо її Z; тоді кут повороту навколо цієї осі може бути обчислений за формулою

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega_Z(t)dt,$$

де $\omega_Z(t)$ – Z-ва проекція кутової швидкості.

Якщо обертання здійснюється рівномірно з постійною кутовою швидкістю $\omega_Z(t) = \omega_Z$=const, то кут повороту прямо пропорційний часу:

$$\Delta\varphi(t) = \omega_Z t.$$

При рівномірному русі тіла по колу за час, рівний періоду T одного повного оберту, зміна кута $\Delta\varphi$ становить 2π, тому кутову швидкість для цього випадку можна записати у вигляді

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

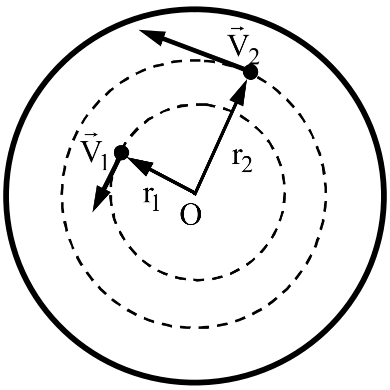

Рис. 18

Розглянемо рівномірне ($\vec{\omega}$=const) обертання диску (рис. 18) навколо осі, яка перпендикулярна до площини диску і проходить через точку О його центру. При такому обертанні всі точки диску будуть мати однакову кутову швидкість. Візьмемо на диску точки, що знаходяться на різних відстанях від осі обертання і здійснюють обертальні рухи по колам з радіусами r_1 і r_2. Точки, які рухаються по колу з радіусом r_1, мають лінійну швидкість $v_1 = \omega r_1$, а точки, які рухаються по колу радіусом r_2, мають швидкість $v_2 = \omega r_2$. З відношення швидкостей випливає, що $\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_2}{r_1}$, або $v_2 = v_1 \frac{r_2}{r_1}$. Іншими словами, точки диска, які більш віддалені від осі обертання, мають більшу лінійну швидкість.

У системі СІ кутову швидкість вимірюють в радіанах на секунду $[\omega] = 1$ рад/с.

2.4. Період обертання

Періодом обертання називають фізичну характеристику рівномірного руху тіла по колу, яка дорівнює проміжку часу, за який тіло виконує один повний оберт. Позначають період буквою T. За період T тіло, що рухається по колу радіуса r з лінійною швидкістю v, проходить шлях $2\pi \cdot r$, тому

$$vT = 2\pi \cdot r,$$

або

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v}.$$

У системі СІ період вимірюють в секундах $[T] = 1$ с.

2.5. Частота обертання

Частотою обертання називають фізичну характеристику рівномірного руху по колу, яка дорівнює кількості повних обертів, що здійснює тіло за одиницю часу. Позначають частоту обертання буквою ν. Її величина визначається співвідношенням

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

У системі СІ частоту вимірюють в $[\nu] = \frac{1}{c} = c^{-1}$.

Враховуючи обернену пропорційність частоти періоду, маємо, що модуль швидкості пропорційний частоті

$$v = 2\pi\nu r,$$

звідки маємо, що $\omega = 2\pi\nu$. Величина ω називається круговою частотою і при рівномірному русі по колу співпадає з кутовою швидкістю.

2.5. Кутове прискорення

При нерівномірному обертальному русі кутова швидкість вже не є постійною величиною і залежить від часу. Фізичною характеристикою нерівномірного обертального руху є *кутове прискорення*, яке експериментально визначається відношенням зміни кутової швидкості $\Delta\vec{\omega}$ до проміжку часу Δt, протягом якого відбулася ця зміна:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t},$$

Коли $\Delta t \to 0$, то приріст $d\vec{\omega}$ кутової швидкості стає елементарним. Отже, математично кутове прискорення є похідною кутової швидкості:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Коли матеріальна точка обертається навколо осі, яка не змінює свого напрямку, то вектор кутового прискорення також буде лежати уздовж цієї осі. У випадку, коли вісь обертання змінює свій напрямок, то напрямок миттєвого кутового прискорення не співпадає з миттєвою орієнтацією осі.

Якщо кутове прискорення відоме, то кутову швидкість можна знайти шляхом інтегрування кутового прискорення. Позначимо ε_Z проекцію кутового прискорення на вісь обертання Z. Величина Z-вої проекції кутової швидкості $\omega_Z(t)$ в момент часу t визначається співвідношенням

$$\omega_Z(t) = \omega_{Z0} + \int_0^t \varepsilon_Z(t)dt,$$

де ω_{Z0} – величина Z-вої проекції початкової кутової швидкості.

З цієї формули легко знаходимо, що коли точка рухається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon_Z(t) = \varepsilon_Z$=const, то кутова швидкість лінійно залежить від часу:

$$\omega_Z(t) = \omega_{Z0} + \varepsilon_Z t.$$

При цьому величина кута $\Delta\varphi(t)$ повороту при обертанні з постійним прискоренням пропорційна квадрату часу:

$$\Delta\varphi(t) = \omega_{Z0}t + \frac{\varepsilon_Z t^2}{2}.$$

Формули для часових залежностей кутової швидкості і кута повороту при обертальному русі з постійним кутовим прискоренням подібні формулам для залежностей швидкості і координат від часу при рівноприскореному прямолінійному русі.

2.6. Доцентрове прискорення

Як вже зазначалось, при рівномірному русі по колу змінюється лише напрямок швидкості, а її величина залишається незмінною. Але і для того, щоб змінити лише напрямок швидкості, тіло повинно рухатися з прискоренням. За таких умов тангенціальне прискорення дорівнює нулю і точка має тільки доцентрове (нормальне) прискорення. Знайдемо напрямок і величину цього прискорення. Для чого розглянемо рух тіла по колу з центром в точці О (рис. 19).

Позначимо точкою M_1 початкове положення тіла, швидкість в якій $\vec{v}_1$. Через час Δt тіло буде знаходитись в точці M_2 і мати швидкість $\vec{v}_2$. Оскільки рух по колу рівномірний, то $\left|\vec{v}_1\right| = \left|\vec{v}_2\right| = v$, проте зміна швидкості за час Δt дорівнює $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$.

Якщо значення Δt прямує до нуля $\Delta t \to 0$, то $d\vec{v}$ буде перпендикулярним до $\vec{v}_1$. До цього висновку приходимо, розглядаючи трикутник, утворений векторами $\vec{v}_2$ і $\vec{v}_1$,

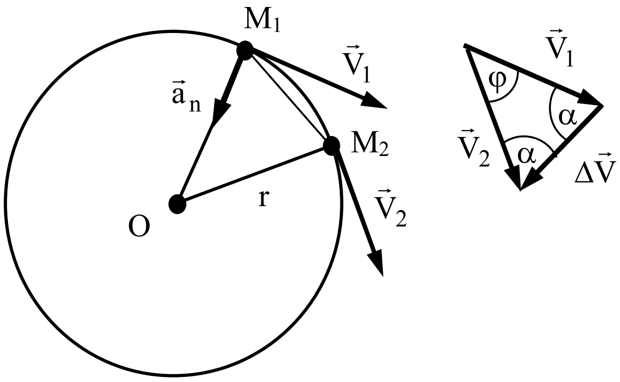

Рис. 19

який є рівнобедреним. Коли $\Delta t \to 0$, то при зменшенні $\Delta\vec{v}$ кут $\varphi \to 0$. Оскільки сума кутів в трикутнику становить π, то кути $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Прискорення $\vec{a}$, яке за означенням співпадає з напрямком $d\vec{v}$, також буде перпендикулярним до $\vec{v}_1$. Таким чином, при рівномірному русі по колу прискорення перпендикулярне до вектора швидкості і направлене вздовж радіуса кола до його центра.

Величину прискорення знайдемо з умови, що трикутник OM_1M_2 і трикутник, утворений векторами $\Delta\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$, подібні ($\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ перпендикулярні до OM_1 і OM_2). Тоді $\frac{|d\vec{v}|}{|M_1M_2|} = \frac{|\vec{v}_1|}{r}$. При $\Delta t \to 0$ довжина відрізку M_1M_2 буде дорівнювати довжині дуги M_1M_2, величину якої можна записати, як добуток $|\vec{v}| \cdot dt$. Враховуючи незмінність модуля швидкості, підставимо добуток $|\vec{v}| \cdot dt$ замість $|M_1M_2|$, звідки отримаємо $\frac{|d\vec{v}|}{dt} = \frac{v^2}{r}$. Ліва частина цього співвідношення є модулем прискорення a_n, тому формула для *доцентрового прискорення* набуває вигляду:

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Введемо одиничний вектор $\vec{n}$ (див. рис. 20), який направлений до центру кола, або протилежно до радіус-вектора $\vec{r}$. Вектор $\vec{n}$ можна визначити як відношення $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$. З використання такого одиничного вектора вираз для доцентрового прискорення можна записати у вигляді

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{n},$$

або

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Врахуємо тепер, що швидкість руху точки пропорційна її кутовій швидкості v=ωr. Підставляючи це співвідношення в попередній вираз приходимо до висновку, що доцентрове прискорення пропорційне квадрату кутової швидкості

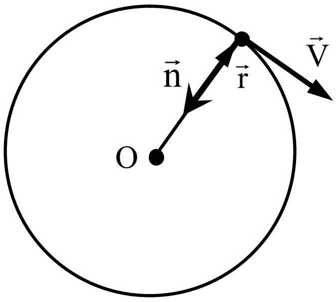

Рис. 20

$$\vec{a}_n = \omega^2 r \cdot \vec{n},$$

або

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}.$$

Згадуючи означення для частоти обертання ν, доцентрове прискорення може бути записане і у такому вигляді

$$a_n = 4\pi^2 \nu^2 r.$$

2.7. Тангенціальне прискорення

У пункті 2.1 при описі руху по колу було отримано, що тангенціальне прискорення, величина якого обумовлена зміною модуля швидкості, пропорційне кутовому прискоренню і радіусу кругової траєкторії:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r.$$

Розглянемо тепер матеріальну точку, яка рухається по будь-якій криволінійній траєкторії (див. рис. 21). Миттєва швидкість точки направлена вздовж дотичної до траєкторії. Введемо одиничний вектор, який направлений вздовж вектора швидкості $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$, де $v = |\vec{v}|$ – модуль швидкості. Завдяки введенню такого одиничного вектора, швидкість матеріальної точки можна записати у вигляді

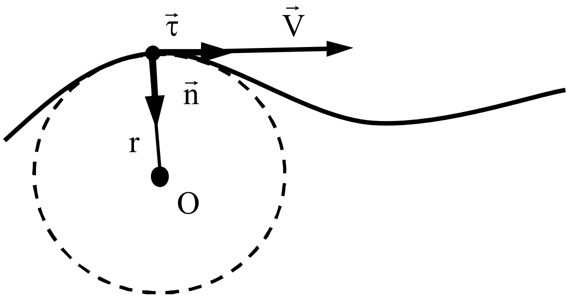

Рис. 21

$$\vec{v} = \vec{\tau} v.$$

Для знаходження прискорення продиференціюємо цей вираз

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\tau} v)}{dt}$$

і використаємо правило знаходження похідної добутку

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Перший доданок в останньому виразі є тангенціальним внеском $\vec{a}_{\tau} = \vec{\tau}\frac{dv}{dt}$ в прискорення, а другий – його нормальною складовою $\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Порівнюючи цей вираз для нормального прискорення з формулою доцентрового прискорення бачимо, що існує рівність $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v}{r}\vec{n}$.

З рис. 21 видно також, що в кожний момент часу рух по довільній криволінійній траєкторії можна вважати рухом по окремим малим ділянкам кіл. На рисунку одне з таких кіл позначено пунктиром. Зрозуміло, що під час руху центри таких кіл неперервно змінюють своє положення. Змінюються також і радіуси кіл. Незважаючи на це, можна вважати, що в кожній точці траєкторії рухоме тіло, що є матеріальною точкою, здійснює обертальний рух, характеризуючись миттєвими кутовою швидкістю та кутовим прискоренням. Величини кутового прискорення $\varepsilon = \frac{1}{r}\frac{dv}{dt}$ і кутової швидкості $\omega = \frac{v}{r}$, зрозуміло, залежать від часу. Їх напрямки визначаються відносно осей обертання, які проходять через центри таких кіл і перпендикулярні до площин кіл. Вісь обертання, яка проходить через центр таких кіл, також не є фіксованою віссю. При довільному русі матеріальної точки вона змінює не тільки своє положення, а й напрямок.