3. Динаміка матеріальної точки

3.1. Перший закон Ньютона

З багатьох дослідів відомо, що тіло починає рухатись або змінює напрямок чи швидкість свого руху тільки під впливом інших тіл, з якими воно, як кажуть, взаємодіє. Разом з тим, ці досліди свідчать, що коли дія інших тіл повністю скомпенсована, тобто на рухоме тіло нічого не діє, то в певній системі відліку швидкість тіла залишається постійною, $\vec{v} = \text{const}$, включаючи нерухомість, або рівність швидкості нулю, $\vec{v} = 0$. В останньому випадку тіло перебуває в стані *спокою*, який також відповідає постійній швидкості і є відносним станом. У будь-якій іншій системі відліку (яких може бути скільки завгодно), що відносно першої системи рухається з постійною швидкістю, обране тіло вже має постійну і скінчену швидкість. Отже, коли дія інших тіл на рухоме тіло скомпенсована, то систем відліку, в яких тіло рухається з постійною швидкістю, безліч. *Перший закон Ньютона* узагальнює ці спостереження і стверджує: існують такі системи відліку, відносно яких тіло, що рухається поступально, зберігає свою швидкість постійною, якщо на нього не діють інші тіла, або дія інших тіл скомпенсована.

З першого закону Ньютона випливає, що коли на тіло не діють інші тіла або їх спільна дія взаємно скомпенсована, то швидкість тіла залишається постійною в часі, а стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху зберігається, не вимагаючи зовнішніх зусиль. Властивість фізичних тіл перебувати в стані збереження руху з постійною швидкістю називають *інерцією*, а відповідно перший закон Ньютона – *законом інерції.*

Розглянемо тіло, яке віддалене від інших тіл і не відчуває їх дії. Таке тіло називають *вільним.* Насправді вільних тіл не існує – це фізична абстракція. Але коли взаємодія даного тіла з іншими стає нескінченно малою, то таке тіло можна вважати вільним. У відповідності до першого закону Ньютона в класичній механіці справедливе твердження: існують системи відліку, в яких вільні тіла рухаються рівномірно і прямолінійно.

3.2. Інерціальні системи відліку

Системи відліку, в яких тіла рухаються з постійною швидкістю при скомпенсованій дії на них інших тіл, називають *інерціальними.* Загальновідомим прикладом інерціальної системи є *геліоцентрична* система відліку з Сонцем як тілом відліку. Її початок розташований в центрі нашої Сонячної системи і майже співпадає з центром Сонця, а три взаємно перпендикулярні координатні осі прямують до трьох віддалених зірок.

Існують й інші системи відліку. Це системи, які рухаються відносно інерціальних з прискоренням. Тіло, яке в інерціальній системі знаходиться в стані спокою чи рухається з постійною швидкістю, у таких системах також буде рухатись з прискоренням навіть за відсутності дії з боку інших тіл. У таких системах перший закон Ньютона не виконується, тому їх називають *неінерціальними.*

Наприклад, Земля має добове обертання, яке характеризується доцентровим прискоренням, у зв'язку з чим, системи відліку, що визначені відносно її поверхні, є неінерціальними. Але величина прискорення через таке обертання складає менше 0,034 м/с^2. Тому у більшості практичних задач опису руху різних тіл в земних умовах подібні системи можна наближено вважати інерціальними. Але при цьому треба розуміти, що у системах відліку, пов'язаних з Землею, вільні тіла (якими зокрема є зірки, і які віддалені від Землі на величезні відстані) здійснюють не прямолінійний, а обертальний рух. У таких системах відліку будь-яка зірка рухається по колу, хоча вона може розглядатися як вільне тіло, траєкторією якого в інерціальній системі відліку повинна бути пряма лінія.

3.3. Маса тіла

Незалежно від характеру взаємодії тіла з іншими тілами, воно не може миттєво змінити свою швидкість. Для зміни або величини, або напрямку швидкості тіла потрібен певний час. Цю властивість тіл називають *інертністю.* З двох взаємодіючих тіл більш інертним вважається тіло, яке змінює свою швидкість повільніше. Інертність характеризують фізичною величиною, яку називають *масою*. Чим більша інертність тіла, тим більша його маса.

Масу $m_т$ тіла можна визначити, порівнюючи величину його прискорення $a_т$ з прискоренням $a_{ет}$ тіла еталонної маси $m_{ет}$ при їх взаємодії, а саме:

$$m_т = \frac{a_{ет}}{a_т} m_{ет},$$

В СІ масу вимірюють в кілограмах [m] = кг. Еталонне тіло масою 1 кг – *еталон маси* – зберігається у Міжнародному бюро мір та ваги, яке знаходиться у Франції. Цей еталон виготовлений з сплаву іридію та платини. Наближено кілограму дорівнює маса кубічного дециметра чистої води при температурі 4°С. Тисячну частку кілограма називають грамом: 1 г = 10^{-3} кг. Масу еталону прийнято позитивною, тому позитивними є маси і всіх інших тіл.

Наведене визначення маси задовольняє закону збереження імпульсу, який для фізичних тіл дорівнює добутку їх маси на швидкість їх руху $\vec{v}$. Як свідчить досвід, повний імпульс ізольованої системи тіл, тобто системи, в якій тіла, що її складають, взаємодіють тільки між собою і не взаємодіють з іншими тілами, є незмінний. Відповідно до закону збереження імпульсу для ізольованої системи, яка включає досліджуване та еталонне тіла, повний імпульс $m_т\vec{v}_т + m_{ет}\vec{v}_{ет} = \mathrm{const}$, тобто залишається постійний. Звідси сума змін імпульсів тіл при їх взаємодії $m_т\,\Delta\vec{v}_т + m_{ет}\,\Delta\vec{v}_{ет} = 0$. З цього співвідношення знаходимо, що маса тіла пропорційна відношенню змін швидкостей $m_т = m_{ет}\dfrac{|\Delta\vec{v}_{ет}|}{|\Delta\vec{v}_т|}$. Видно, що більшій масі тіла при його взаємодії з еталоном, відповідає менша зміна швидкості. Для елементарного проміжку часу dt з отриманого співвідношення випливає рівність $m_т\,d\vec{v}_т + m_{ет}\,d\vec{v}_{ет} = 0$. Розділивши її на dt приходимо до рівняння $m_т\,\vec{a}_т + m_{ет}\,\vec{a}_{ет} = 0$, з якого легко отримати формулу, що визначає масу тіла і наведена на початку цього пункту.

У класичній механіці маса тіла не залежить ні від його швидкості, ні від взаємодій з іншими тілами. Маса замкненої системи тіл залишається незмінною при будь-яких рухах в системі, причому маса тіл системи дорівнює сумі мас тіл.

Розглянемо довільне тіло. Виділимо в ньому малу довільну частку масою Δm і об'ємом ΔV (див. рис. 22). Відношення Δm до ΔV, коли $\Delta V \to 0$ є локальною характеристикою речовини, з якої виготовлено тіло і яку називають *густиною*. Густина дорівнює межі

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V},$$

тобто визначається похідною

$$\rho = \frac{dm}{dV}.$$

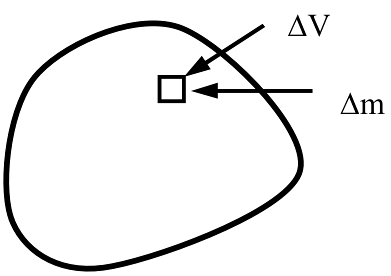

Рис. 22

Густина не залежить від об'єму або форми тіла, проте залежить від його стану. Це означає, що густина визначається властивостями речовини, її складом, температурою тощо.

Маса тіла довільної форми розраховується за формулою

$$m = \int_V \rho\, dV,$$

де інтегрування здійснюється по всьому об'єму тіла.

Для однорідного тіла, густина якого є постійною величиною, маса пропорційна його об'єму:

$$m = \rho V.$$

В СІ густину вимірюють в кілограмах на кубічний метр $[\rho] = \frac{кг}{м^3}$.

В практиці для вимірювання маси використовують спосіб, який називають *зважуванням*. В основі цього методу лежить здатність тіл, які мають масу, до гравітаційної взаємодії. Експериментально виміряні визначені величини інертної і гравітаційної мас з величезною точністю дорівнюють одна одній. За сучасними дослідженнями відносна величина розходження між гравітаційною та інерційною масами не перевищує $\frac{|m_{гр} - m_{ін}|}{m_{гр}} < 10^{-12}$, де $m_{гр}$ – гравітаційна маса, $m_{ін}$ – інерційна маса.

Таким чином, *маса* – це скалярна фізична величина, що характеризує інертні і гравітаційні властивості тіл.

3.4. Сила

Дія інших тіл на дане тіло спричиняє, як зазначалося, зміну його швидкості, тобто призводить до прискореного руху. Відповідну дію характеризують фізичною величиною, яка називається *силою.* Прикладаючи до тіла силу, можна змінити не тільки його швидкість, але й вивести з стану спокою. Таке визначення сили відповідає здатності тіл набувати прискорення внаслідок їх взаємодії.

Відомо, що дія одного тіла на інше може викликати зміну форми, або деформацію тіл. Такий прояв безпосередньої взаємодії тіл також характеризують силою. Величина деформуючої сили обумовлена залежністю взаємодії від відстані між тілами або їх частинами. У цьому випадку явний вираз для величини сили можна встановити, вивчаючи фізичні явища, що лежать в основі фундаментальних взаємодій, до яких відносять взаємодії між складовими речовин – іонів, атомів, молекул.

Сила є векторною фізичною величиною. Як правило, силу позначають вектором $\vec{F}$.

У СІ силу вимірюють в ньютонах: [F] = Н.

Точку тіла, до якої прикладена сила, називають *точкою прикладання сили*, а напрямок, вздовж якого діє сила, називають *напрямком дії сили*.

Наведемо приклади сил.

Гравітаційна сила характеризує притягання двох тіл: 1; 2, внаслідок гравітаційної взаємодії:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|},$$

де G – гравітаційна стала, m_1 і m_2 – маси тіл, $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор положення тіла, маса якого m_2, відносно тіла, маса якого m_1, $\vec{F}_{12}$ – сила, з якою за означенням перше тіло діє на друге і яка прикладена до другого тіла. Для гравітаційної сили, як видно, справедливе співвідношення $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, де $\vec{F}_{21}$ – сила, з якою друге тіло діє на перше, і яка прикладена до першого тіла.

Сила тяжіння визначається добутком маси тіла на прискорення вільного падіння

$$\vec{F} = m\vec{g}.$$

Прискорення вільного падіння $g = G\frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$, де M_3 – маса Землі, R_3 – її радіус, а h – висота, на якій знаходиться тіло відносно поверхні Землі.

Сила пружності прямо пропорційна видовженню пружини (стрижня). Її проекція на напрямок видовження визначається за формулою

$$F_X = -kx,$$

де k – коефіцієнт, що характеризує жорсткість пружини, x – величина видовження, яка дорівнює зміні $x = \ell_2 - \ell_1$ довжини пружини. Наведена формула є наближеною і гарно працює, коли $x << \ell_1, \ell_2$.

Величини *максимальної сили тертя спокою*, *сили тертя сухого ковзання*, *сили тертя кочення* пропорційні силі

$$|\vec{F}| = \mu|\vec{N}|$$

реакції $\vec{N}$ опори, де μ – коефіцієнт, який за величиною відрізняється для всіх цих трьох випадків, сила реакції опори $\vec{N}$ за модулем дорівнює силі тиску тіла на поверхню, або вазі тіла.

Сила в'язкого тертя виникає при русі твердих тіл в рідині чи газі. При малих швидкостях її величина визначається за формулою

$$\vec{F} = -k_1\vec{v},$$

де k_1 – коефіцієнт, а $\vec{v}$ – швидкість тіла. При великих швидкостях сила в'язкого тертя визначається іншою формулою

$$\vec{F} = -k_2 v^2 \frac{\vec{v}}{v},$$

де коефіцієнт $k_2 \neq k_1$.

3.5. Другий закон Ньютона

Розглянемо декілька тіл, маси яких m_1, m_2, m_3 ,... Експерименти свідчать, що коли на кожне з них подіяти однаковою силою, вони набудуть прискорень $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3 \ldots$, спрямованих вздовж напрямку дії сили. Добуток маси тіла на набуте ним під дією сили прискорення є однаковим для всіх тіл $m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2 = m_3 \vec{a}_3 \ldots$ При зміні сили (однакової для всіх тіл) зміняться як прискорення тіл $\vec{a}_1^{'}$, $\vec{a}_2^{'}$, $\vec{a}_3^{'}$, так і величини добутків мас тіл на їх прискорення. Проте і новому значенні сили рівність добутків мас тіл на нові прискорення збережеться: $m_1 \vec{a}_1^{'} = m_2 \vec{a}_2^{'} = m_3 \vec{a}_3^{'} \ldots$ Отже, існує фізична величина, яка визначається саме добутком маси тіла на його прискорення. Зрозуміло, що такий добуток обумовлений величиною прикладеної сили. Це є *другий закон Ньютона*, який формулюють наступним чином: в інерціальних системах відліку сила, що діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на прискорення, якого воно набуває внаслідок дії цієї сили

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Другий закон Ньютона зв'язує набуте під дією сили прискорення тіла з цією силою, яка сама визначається характером взаємодії між тілами і залежить від їх взаємного розташування.

Врахуємо, що прискорення є другою похідною від радіус-вектора $\vec{r}$: $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{d^2t}$, тому другий закон Ньютона можна переписати в іншій формі:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Останній вираз для другого закону Ньютона називають *динамічним рівнянням руху*. Воно виконується в інерціальних системах відліку. Видно, що знаходження функції $\vec{r}(t)$ передбачає розв'язок неоднорідного диференційного рівняння другого порядку. Порядок рівняння визначається порядком старшої похідної. Часто пошук розв'язку рівняння руху ускладнюється тим, що сила сама залежить від $\vec{r}(t)$, або від $\vec{v}(t)$.

Підкреслимо, що за допомогою записаного динамічного рівняння для $\vec{r}(t)$ можна описати рух матеріальної точки або рух твердого тіла, коли воно пересувається поступально так, що всі його точки тіла мають однакове прискорення. Описати довільний рух твердого тіла за допомогою одного динамічного рівняння руху неможливо. Дійсно, при довільному русі тіло обертається, тому його різні точки не мають однакового прискорення. Отже, опис руху твердого тіла в загальному випадку вимагає додаткового аналізу.

Прискорення тіла, як ми знаємо $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, тому другий закон можна переписати ще й у такому вигляді:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Оскільки маса матеріальної точки є постійною, величину m можна внести під знак похідної, або записати

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Добуток маси m тіла на його швидкість $\vec{v}$ є імпульсом: $\vec{p} = m\vec{v}$. Отже, часова похідна від імпульсу дорівнює силі, що спричинила зміну імпульсу тіла

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Хоча останнє рівняння отримано за умови незмінної маси, виявляється, що воно має більш загальне застосування, бо виконується і при русі тіл змінної маси.

Відповідно до другого закону Ньютона елементарна зміна імпульсу може бути представлена виразом

$$d\vec{p} = \vec{F}dt.$$

Звідси отримаємо, що зміна імпульсу тіла за проміжок часу $[t_1,t_2]$, визначається інтегралом

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt.$$

Цей інтеграл називають *імпульсом сили*.

В СІ, як говорилося, силу вимірюють в ньютонах [F] = Н, причому 1 Н = 1 кг·м/с^2. Дія сили величиною 1 Н на тіло масою 1 кг надає йому прискорення 1 м/с^2.

Звернемо увагу, що другий закон Ньютона має певні межі застосування. Його не можна використовувати при швидкостях руху, що наближаються до швидкості світла, коли не можна нехтувати залежності маси тіл від швидкості. Його також не можна використовувати при описі руху атомів і молекул, коли поняття траєкторії втрачає свій класичний смисл і неможливо одночасно визначати швидкість мікрочастинок та їх координати. Це пов’язано з тим, що будь-яке вимірювання, чи інший вплив на швидкість або координату суттєво змінює стан частинок, і тому отримати інформацію про траєкторію дослідним шляхом неможливо. Цікаво, що ці обмеження не стосуються першого закону Ньютона.

3.6. Додавання сил

Якщо на тіло діє декілька сил, то прискорення, спричинене їх дією, буде таким, начебто його викликала сила, яка дорівнює геометричній сумі всіх прикладених до тіла сил. Цю силу називають *рівнодійною* або *результуючою*. Нехай на тіло діють сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Їх результуюча геометрична сума $\vec{F}_P = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Тоді другий закон Ньютона набуває вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3,$$

або

$$m\vec{a} = \vec{F}_p.$$

Звідси знаходимо прискорення тіла, коли на нього діє декілька сил

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{m}.$$

Якщо на тіло діє тільки перша сила, вона буде надавати тілу прискорення $\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}$. При дії тільки другої сили прискорення тіла було б рівним $\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}$. Аналогічно для третьої сили. Прискорення, якого набуває тіло під дією декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$. Це означає, що дія різних сил на одне тіло є незалежною.

Слід зауважити, що при цьому сили можуть бути залежними одна від одної. Наприклад, величина сили тертя пропорційна величині реакції опори. Але незважаючи на такий зв'язок, дія обох сил на тіло незалежна і в рівняння руху вони входять у вигляді суми.

Коли рівнодійна сил дорівнює нулеві (дія сил взаємно скомпенсована), вона не призводить прискорення тіла. Це означає, що тіло буде знаходитися в стані спокою або його рух буде описуватися кінематичними рівняннями прямолінійного рівномірного руху. Якщо сили не компенсовані і рівнодійна сил не залежить від часу та координат, то прискорення тіла буде постійним. У цьому випадку рух тіла описується кінематичними рівняннями рівноприскореного прямолінійного руху.

Використовуючи поняття рівнодійної сили, перший закон Ньютона можна сформулювати в інший спосіб: існують такі системи відліку, відносно яких тіло, що рухається поступально, зберігає свою швидкість, якщо рівнодійна всіх сил, прикладених до тіла, відсутня: $\vec{F}_p = 0$.

3.7. Третій закон Ньютона

Третій закон Ньютона називають законом *рівності дії і протидії*. Його формулюють у вигляді: тіла діють одне на одне з силами, рівними по модулю і протилежними за напрямком, що визначається рівністю

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2,$$

де $\vec{F}_1$ – сила, що прикладена до першого тіла і обумовлена дією другого тіла на перше, а $\vec{F}_2$ – навпаки, сила, прикладена до другого тіла і обумовлена дією першого тіла на друге.

З третього закону Ньютона випливає, що при взаємодії тіл сили завжди виникають парами, вони мають одну природу, направлені вздовж однієї лінії, але прикладені до різних тіл.

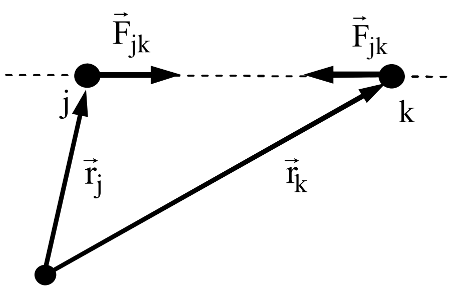

Рис. 23

У випадку системи декількох взаємодіючих тіл з третього закону випливає, що тіла взаємодіють попарно, причому

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj},$$

де $\vec{F}_{jk}$ – сила, з якою j-те тіло діє на k-те тіло, а $\vec{F}_{kj}$ – сила, з якою k-те тіло діє на j-те тіло (рис.23), індекси j, k задають нумерацію тіл.

Нехай положення k-го тіла задає радіус-вектор $\vec{r}_k$, а j -го тіла радіус-вектор $\vec{r}_j$, то маємо, що вектор $\Delta\vec{r}_{jk} = \vec{r}_j - \vec{r}_k$ буде співнапрямленим і відповідно протилежно напрямленим до $\vec{F}_{jk}$ та $\vec{F}_{kj}$.

Мають бути визначеними межі застосовування третього закону. Експериментально встановлено, що всі сигнали, а значить і сили, передаються не миттєво, а з скінченою швидкістю за величиною, що не перевищує швидкість світла у вакуумі. Проте третій закон містить твердження, що $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, коли обидві ці сили вимірюються в один і той же момент часу. Таке припущення суперечить умові, за якою одне тіло сприймає дію іншого тіла не миттєво, а через скінчений проміжок часу. В класичній механіці ця вимога не виконується і вважається, що взаємодії між тілами можуть поширюватися миттєво. В цілому третій закон Ньютона не завжди є гарним наближенням; наприклад, при вивченні зіткнень атомів або заряджених частинок, швидкості яких наближаються до швидкості світла.

3.8. Принцип відносності Галілея

У класичній механіці при переході від однієї інерціальної системи до іншої інерціальної системи можуть змінюватись координати рухомого тіла, напрямок і величина вектора переміщення, напрямок і величина вектора швидкості. При такому переході незмінними залишаються маси тіл, їх прискорення і сили взаємодії між тілами. Оскільки тільки ці фізичні величини підпорядковані законам Ньютона, то справедливе твердження: закони механічного руху є однаковими у всіх інерціальних системах відліку. Це твердження називають *принципом відносності Галілея.* З цього принципу випливає, що в різних інерціальних системах відліку механічні процеси за однакових умов відбуваються однаково, і всі інерціальні системи відліку повністю рівноправні.

Математично принцип відносності Галілея формулюють за допомогою так званих перетворень Галілея для координат, швидкості, та часу. З'ясуємо вигляд перетворень Галілея у випадку переходу між інерціальними системами, коли їхні координатні осі паралельні, а точка відліку O' нової системи рухається з постійною швидкістю $\vec{v}_0$ вздовж осі OX (рис. 24).

Координати x', y', z' будь-якої точки (наприклад, точки A) в рухомій системі X'Y'Z' і координати x, y, z цієї точки в нерухомій системі XYZ будуть зв'язані співвідношеннями

$$x=x'+V_{0X}t, \quad y=y', \quad z=z'.$$

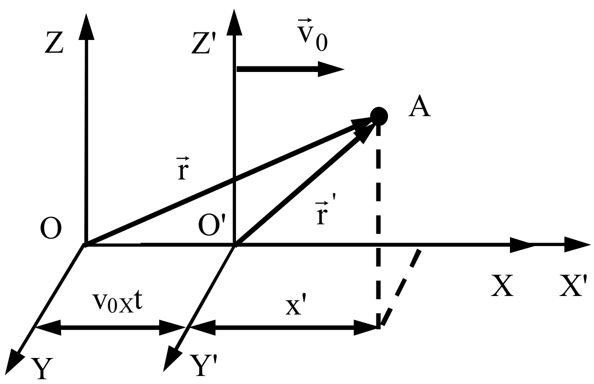

Рис. 24

Відповідно для радіус-векторів (див. рис. 24) таке перетворення записується у вигляді

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 t.$$

Запишемо тепер перетворення для проекцій швидкості при переході між цими системами координат; вони мають вигляд:

$$v_X = v'_X + v_{0X}, \quad v_Y = v'_Y, \quad v_Z = v'_Z.$$

У векторному вигляді перетворення швидкостей спрощується до одного:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0.$$

Час при переході між цими системами відліку не змінюється, тому t' = t.

При $\vec{v}_0$ = const зміна проекцій швидкостей в обох системах відліку буде однаковою, тому однаковими в них будуть і величини X-вих проекцій прискорення

$$a_X = \frac{dv_X}{dt} = \frac{dv'_X}{dt} = a'_X,$$

$$a_Y = \frac{dv_Y}{dt} = \frac{dv'_Y}{dt} = a'_Y,$$

$$a_Z = \frac{dv_Z}{dt} = \frac{dv'_Z}{dt} = a'_Z.$$

Ці рівності також можна записати у єдиній векторній формі:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$$

Отже, отримуємо важливий висновок, що при переході між інерціальними системами відліку прискорення залишається незмінним. Таким чином, наведені перетворення для координат, швидкості і часу (їх ще називають *перетвореннями Галілея*) задовольняють принципу відносності Галілея.

3.9. Центр мас системи тіл

Розглянемо сукупність точкових тіл, кількість яких позначимо N і яку будемо називати *системою* тіл. Взаємодії між тілами, що входять до системи, називають *внутрішніми взаємодіями*. Тіла системи також взаємодіють з зовнішніми тілами, які не входять до системи. Відповідні сили також називають *зовнішніми*.

Назвемо *центром інерції (центром мас) системи тіл* точку C, положення якої визначається за допомогою виразу

$$\vec{r}_C = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{N} m_j} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j$$

де m_j – маса j-го тіла, що належить системі, а $\vec{r}_j$ – радіус-вектор його положення. Суму мас $m = \sum\limits_{j=1}^{N} m_j$, що стоїть в знаменнику, називають *масою системи*.

Швидкість $\vec{v}_C$ руху центра мас системи знайдемо диференціюючи вектор $\vec{r}_C$ по часу:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j\right) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j,$$

де $\vec{v}_j$ – швидкість j-го тіла з системи.

Тепер окремо розглянемо рівняння руху кожного тіла. За другим законом Ньютона рух j-го тіла описується рівнянням

$$m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_j,$$

де m_j – маса j-го тіла, $\vec{r}_j$ – його радіус-вектор, $\vec{F}_{kj}$ – сила з якою k-те тіло діє на j-те тіло і є внутрішньою силою, $\vec{F}_j$ – відповідає зовнішній силі, яка діє на j-те тіло ззовні. В правій частині рівняння стоїть також сума по всім k внутрішнім силам, що діють j-те тіло. Розрахунок рівнодіючої внутрішніх сил виключає значення k=j, оскільки тіло не може діяти само на себе.

Просумуємо рівняння руху для всіх тіл, які входять до системи. Тоді пряма сума рівнянь дає рівняння у вигляді:

$$\sum_j m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_j \left(\sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_i \right) = \sum_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj} + \sum_j \vec{F}_j .$$

Перепишемо вираз з правої сторони, згадуючи означення центру мас системи:

$$\sum_j m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_j m_j \vec{r}_j = \frac{d^2 m\vec{r}_C}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} .$$

Врахуємо також третій закон Ньютона, згідно якому $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$. Тоді з цього співвідношення прямо випливає, що подвійна сёума внутрішніх сил, як і повинно бути $\sum_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj}$ =0. Отже приходимо до остаточного рівняння

$$m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j ,$$

за яким незалежно від характеру і типу внутрішніх взаємодій, в інерціальній системі відліку радіус-вектор центру мас змінює своє положення тільки внаслідок дії на тіла системи зовнішніх сил.

3.10. Рух тіла в однорідному полі

Якщо на тіло в кожній точці простору діє сила, то в цілому таку сукупність сил називають *силовим полем*. Дослідимо рух матеріальної точки в *однорідному* стаціонарному полі, коли сила поля в усіх точках простору однакова за величиною та напрямком і не залежать від часу: $\vec{F} = \mathrm{const}$. Таким, наприклад, є поле сили тяжіння, яке можна вважати однорідним і стаціонарним поблизу поверхні Землі. Запишемо рівняння руху матеріальної точки в однорідному силовому полі

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Коли $\vec{F} = \text{const}$, інтегрування цього рівняння здійснюється тривіально і швидкість тіла в довільний момент часу має вигляд:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \frac{\vec{F}}{m}dt = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}\int_0^t dt = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t,$$

де $\vec{v}_0$ – початкова швидкість, відношення $\frac{\vec{F}}{m} = \text{const}$ і його можна винести з під знаку інтегралу.

В однорідному стаціонарному полі швидкість матеріальної точки лінійно залежить від часу.

Для знаходження закону руху здійснимо ще одне інтегрування

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m}t\right)dt = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}_0 dt + \int_0^t \frac{\vec{F}}{m}tdt =$$

$$= \vec{r}_0 + \vec{v}_0\int_0^t dt + \frac{\vec{F}}{m}\int_0^t tdt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2,$$

де $\vec{r}_0$ – початкове положення тіла.

Знайдемо тепер вираз рівняння для траєкторії. Врахуємо, що тіло рухається в площині, утвореній векторами $\vec{v}_0$ та $\vec{F}$. Введемо систему координат, в якій вісь OY $\uparrow\uparrow$ $\vec{F}$, а вісь OX вибрана в напрямку початкової швидкості і перпендикулярно до $\vec{F}$, точніше OX $\uparrow\uparrow$ $\vec{v}_{0X}$. В такій системі координат рівняння для проекцій швидкості та координат набувають вигляду

$$v_X = v_{0X}, \qquad v_Y = v_{0Y} + \frac{F}{m}t,$$

$$x = x_0 + v_{0X}t, \qquad y = y_0 + v_{0Y}t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}.$$

де x_0, y_0 – початкові координати матеріальної точки, для яких визначені проекції v_{0X} та v_{0Y} початкової швидкості.

Рівняння для траєкторії значно спроститься, якщо час відраховувати в момент, коли v_{0Y} =0. Виберемо початок системи координат так, щоб x_0 =0, y_0 =0. За цих умов

$$x = v_0 t, \qquad y = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2,$$

де v_0 позначена X-ва проекція початкової швидкості v_{0X} .

З першого рівняння знаходимо, що $t=\frac{x}{v_0}$, підставимо це значення в друге рівняння. Звідки приходимо до рівняння кривої

$$y=\frac{1}{2}\frac{F}{mv_0^2}x^2,$$

яка описує траєкторію руху тіла. Видно, що залежність y(x) є параболою.

Таким чином, тіла в однорідному стаціонарному полі рухаються по параболі. Так рухається тіло кинуте горизонтально чи під кутом до горизонту. По параболі рухається заряджене мале тіло між обкладками плоского повітряного конденсатору, в якому на заряд діє однорідна і стаціонарна сила електричного походження.

3.11. Рух тіла під дією сил в'язкого тертя

Розглянемо найпростіший приклад такого руху, а саме: нехай кулька, маса якої m, знаходиться у оточуючому її в'язкому середовищі. Припустимо, що початкова швидкість кульки дорівнює $\vec{v}_0$ (див. рис. 25) і на неї діє тільки сила в'язкого тертя, величина якої прямо пропорційна швидкості і яка направлена проти швидкості: $\vec{F}=-k\vec{v}$, де k – коефіцієнт пропорційності. За другим законом Ньютона рівняння руху кульки має вигляд

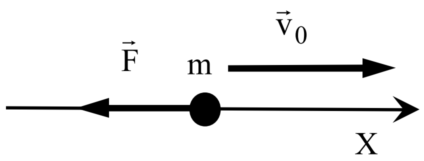

Рис. 25

$$m\vec{a}=-k\vec{v}.$$

За цим рівнянням, як видно, прискорення кульки направлене протилежно до вектора швидкості $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{v}$, внаслідок чого кулька має гальмуватися.

Перепишемо це рівняння у вигляді:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-k\vec{v},$$

який дає змогу отримати рівняння для всіх декартових проекцій швидкості: так для X-вої проекції, яку вважатимемо направленою вздовж $\vec{v}_0$, коли $\vec{v}_0\uparrow\uparrow OX$, маємо

$$m\frac{dv_X}{dt}=-kv_X.$$

Зробивши прості перетворення, перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{dv_X}{v_X} = -\frac{k}{m}dt\,.$$

Така форма запису дозволяє провести інтегрування цього рівняння руху, коли окремо можна проінтегрувати ліву і праву частини:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv_X}{v_X} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt\,.$$

Як відомо, інтеграл від функції $y = \frac{1}{x}$ дорівнює натуральному логарифму $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, де C – довільна константа інтегрування. Використовуючи це правило, знаходимо

$$\ln v_X \Big|_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m} t\Big|_0^t\,.$$

Звідси, після підстановки границь маємо зв'язок:

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t\,.$$

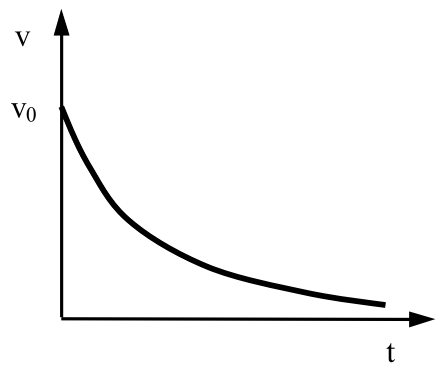

Рис. 26

Оберненою функцією до натурального логарифму є експонента: $e^{\ln x} = x$. Отже, якщо піднести до експоненти ліву та праву частину останнього виразу, то прийдемо до залежності швидкості руху тіла від часу, а саме:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Графіком цієї функції є спадаюча крива, яка прямує до нуля $v \to 0$, коли $t \to \infty$ (рис. 26). В результаті отримали дещо парадоксальну відповідь, з якої випливає, що тіло, рухаючись під дією сили в’язкого тертя, ніколи не зупиниться. Такий висновок є наслідком використаного наближення, за яким сила тертя прямо пропорційно залежить від швидкості. Проте, це наближення не виконується, особливо коли $v \to 0$, і рух частинки буде описуватися більш складними рівняннями, які вивчають в інших розділах фізики.

3.12. Рух тіла по похилій площині

Нехай з похилої площини, що утворює кут α до горизонтальної площини (рис. 27), без початкової швидкості зісковзує тіло масою m. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ. Розрахуємо величину прискорення тіла.

Тіло здійснює поступальний рух під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, сили реакції опори $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_{тр}$ (рис. 27). Щоб визначити прискорення, запишемо рівняння другого закону Ньютона, для чого просумуємо сили, що прикладені до тіла. Тоді маємо

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер}.$$

Зорієнтуємо систему координат так, як показано на рис. 27. Вісь OX направимо уздовж руху тіла, а вісь OY – перпендикулярно до площини сковзання. В проекціях на осі OX та OY рівняння другого закону перетворюється в систему рівнянь, а саме:

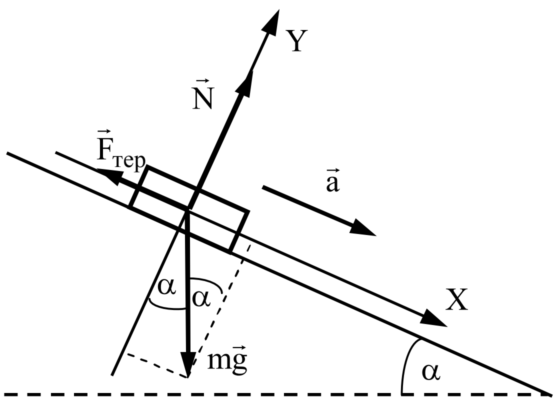

Рис. 27

$$ma_X = mg_X + N_X + (F_{тер})_X\ ;$$

$$ma_Y = mg_Y + N_Y + (F_{тер})_Y.$$

Видно, що прискорення тіла направлене вздовж площини нахилу в напрямку осі OX. Тому X-ва проекція прискорення позитивна $a_X = a$, в той час як Y-ва проекція відсутня, $a_Y = 0$. Сила тертя направлена проти руху тіла, тобто в протилежному до осі OX напрямку. Це свідчить, що її X-ва проекція сили тертя від'ємна: $(F_{тер})_X = –F_{тер}$, а Y-ва дорівнює нулеві, $(F_{тер})_Y = 0$. Сила $\vec{N}$ реакції опори перпендикулярна до поверхні і направлена вздовж осі OY. За цих умов X-ва проекція цієї сили $N_X = 0$, а Y-ва проекція позитивна $N_Y = N > 0$. Сила тяжіння при цьому направлена вертикально, або під кутом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ до похилої площини (див. рис. 27) і її проекція на вісь OX складає $mg_X = mg\sin\alpha$, а на вісь OY – $mg_Y = mg\cos\alpha$. Використовуючи явні вирази для проекцій сил, рівняння руху набуває вигляду:

$$ma = mg\sin\alpha – F_{тер}\ ;$$

$$0 = N – mg\cos\alpha.$$

З другого рівняння знаходимо, що величина сили реакції опори дорівнює $N = mg\cos\alpha$. З урахуванням пропорційності між силою тертя ковзання та реакцією опори $F_{тер} = \mu N$ отримуємо, що величина сили тертя при зісковзуванні тіла з похилої поверхні визначається формулою

$$F_{тер} = \mu mg\cos\alpha.$$

Підставляючи цей вираз в перше з рівнянь пари, знаходимо величину прискорення тіла

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Величина в дужках стає рівною нулеві, коли $\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0$, або коли коефіцієнт μ приймає значення $\mu = \mathrm{tg}\alpha$. В цьому випадку прискорення тіла зникає, бо сили, які діють на тіло, взаємно компенсують одна одну. Іншими словами, такому значенню коефіцієнта μ за умови відсутності у тіла початкової швидкості відповідає стан його спокою. Якщо ж тіло матиме початкову швидкість, що направлена вниз, то воно рівномірно рухатиметься з цією швидкістю.

У випадку, коли тіло матиме початкову швидкість, що направлена вгору вздовж площини, воно деякий час буде підійматися, пересуваючись рівносповільнено. Під час такого руху тіла сила тертя направлена протилежно до напрямку руху і співпадає з проекцією сили тяжіння на площину нахилу (вісь ОХ на рис.27). Величина прискорення при рівносповільненому русі тіла вгору по похилій площині визначається формулою

$$a = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Нарешті, при відсутності тертя, коли $\mu = 0$, прискорення тіла під час його ковзання вгору чи вниз буде, як видно, однаковим: $a = g\sin\alpha$.