4. Динаміка обертального руху твердого тіла

4.1. Швидкість точки тіла при обертальному русі

При вивченні динаміки твердого тіла обмежимось наближенням абсолютно твердого тіла. Це означає, що деформаціями кручення, зсуву та згину, що в принципі можливі під час прискореного руху будь-якого фізичного тіла, будемо повністю нехтувати.

При поступальному русі всі точки або частини абсолютно твердого тіла рухаються однаково. Їм відповідають однакові переміщення, вони мають однакову швидкість та прискорення. При обертальному русі тіла кінематичні параметри руху різних точок тіла не є однаковими: різні точки тіла здійснюють різні переміщення, характеризуються різними швидкостями та прискореннями. Цю невизначеність опису обертального руху можна усунути використовуючи кутові кінематичні змінні: кут повороту, кутову швидкість та кутове прискорення. Дійсно, при повороті абсолютно твердого тіла всі його точки за один і той же час повертаються на однаковий геометричний кут, тому в цілому кутові характеристики обертального руху, на відміну від лінійних, виявляються однаковими для всіх точок тіла.

При обертальному русі твердого тіла зручно також користуватися кутовою швидкістю. При цьому миттєва кутова швидкість усіх точок абсолютно твердого тіла однакова і направлена вздовж осі обертання. Кутове прискорення теж однакове і характеризує все тіло, але напрямок такого прискорення може не співпадати з віссю обертання. Це має місце, коли тіло здійснює обертальний рух навколо двох чи декількох осей одночасно, або коли сама вісь обертання змінює під час руху свій напрямок. Прикладом подібного руху є прецесія гіроскопу, опис якої викладається в кінці даного розділу. Але, в основному, в цьому розділі будемо обмежуватися вивченням обертального руху абсолютно твердого тіла навколо *фіксованої осі*, яка не змінює напрямок і положення відносно тіла. Це можливо, наприклад, коли вісь проходить через дві певні задані точки тіла. Така вісь є нерухомою відносно тіла, а тіло може обертатися навколо неї.

Рух абсолютно твердого тіла можна представити як результат сполучення двох незалежних рухів: *поступального* та *обертального*. Відповідне представлення не є однозначно визначеним, бо, строго кажучи, існує безмежна кількість варіантів переміщень та поворотів, які, в решті решт, дають однакове кінцеве розташування тіла. Треба зауважити, що для досить малих елементарних – проміжків часу (або малих просторових переміщень) така невизначеність частково усувається. Так, при елементарному кутовому переміщенні $d\vec{\varphi}$ визначеним є напрямок осі обертання, бо вздовж неї направлена кутова швидкість, або $\vec{\omega}\uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$. Проте положення осі, залишається не встановленим, оскільки може бути так, що не задана жодна точка простору, яка повинна лежати на цій осі.

Розглянемо приклад поступального-обертального руху (рис. 28) з фіксованою віссю. Для нього елементарне переміщення $d\vec{r}$ будь-якої точки (на рис. 28 такою є точка M) можна записати сумою двох елементарних переміщень – поступального $d\vec{r}_п$ та обертального $d\vec{r}_{об}$, так що

$$d\vec{r} = d\vec{r}_п + d\vec{r}_{об},$$

Поступальному рухові відповідає однакове переміщення всіх точок тіла, які, таким чином, зміщуються на один і той же вектор і у них однаковий вектор $d\vec{r}_п$. А вектори переміщення $d\vec{r}_{об}$ відповідних точок тіла, що повернулося є різними.

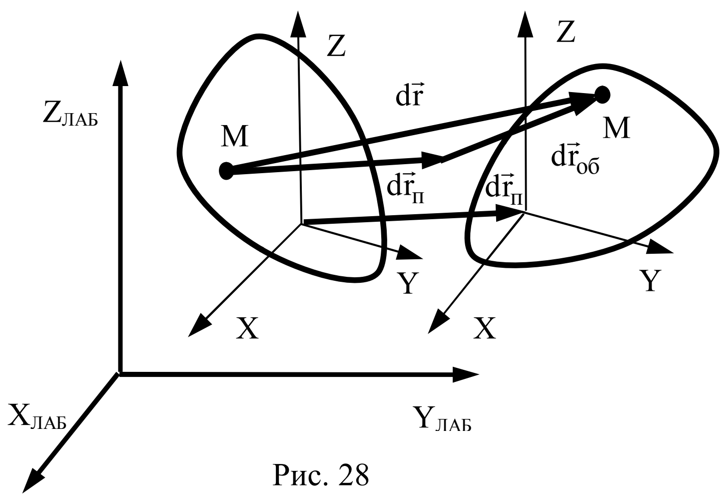

Рис. 28

Поділимо на елементарний час dt ліву та праву частину виразу для загального переміщення $d\vec{r}$. Тоді отримаємо, що швидкість $\vec{v}$ точки M також складається з двох швидкостей: швидкості $\vec{v}_п$ поступального руху тіла як цілого та швидкості $\vec{v}_{об}$, якої набуває саме точка M тіла внаслідок його обертального руху:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_П}{dt} + \frac{d\vec{r}_{ОБ}}{dt} = \vec{v}_п + \vec{v}_{об}.$$

При обертальному русі елементарне переміщення $d\vec{r}_{об}$ можна представити через векторний добуток елементарного вектора кута $d\vec{\varphi}$ повороту на радіус-вектора $\vec{r}_{об}$, тобто $d\vec{r}_{об} = [d\vec{\varphi}\ \vec{r}_{об}]$. Це співвідношення відповідає такому вибору радіус-вектор $\vec{r}_{об}$, коли він визначений у декартові системі відліку, початок якої знаходиться на осі обертання.

Отже, радіус-вектор $\vec{r}_п$ поступального руху приписаний до однієї системи координат, яку назвемо *лабораторною системою* $X_{ЛАБ}Y_{ЛАБ}Z_{ЛАБ}$ (рис. 28), а радіус-вектор $\vec{r}_{об}$ обертального руху визначений вже в іншій – *рухомій* – системі координат. Такою системою може бути обрана, наприклад, система, початок координат якої розташовано в точці центра мас тіла. При цьому ця – друга – система координат XYZ рухається поступально разом з центром мас тіла відносно лабораторної системи. Вісь обертання також проходить через точку центру мас тіла, і коли вона фіксована, то її орієнтація не змінюється відносно координатних осей рухомої системи. Рух системи XYZ характеризується радіус-вектором $\vec{r}_п$ і швидкістю $\vec{v}_п$. На рис. 28 наведено вектори переміщення точки M в лабораторній $X_{ЛАБ}Y_{ЛАБ}Z_{ЛАБ}$, та в рухомій XYZ системах відліку. За такого опису, що важливо, обертання тіла визначається саме в рухомій системі координат XYZ.

Швидкість $\vec{v}_{об}$ обертального руху точки тіла в рухомій системі відліку, центр якої знаходиться на осі обертання, можна записати у вигляді

$$\vec{v}_{об} = \frac{d\vec{r}_{об}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi}\vec{r}_{об}]}{dt} = [\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\vec{r}_{об}] = [\vec{\omega}\vec{r}_{об}],$$

де враховано, що кутова швидкість $\vec{\omega}$ є часовою похідною вектора кута повороту, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$, а радіус-вектор $\vec{r}_{об}$ в системі XYZ залишається незалежним від часу. Оскільки радіус-вектор $\vec{r}_{об}$ характеризує просторове положення кожної точки тіла в рухомій системі відліку, відносно якої воно здійснює обертальний рух, то швидкості $\vec{v}_{об}$ різних точок тіла також мають різні значення. Як правило, у виразі для обертальної швидкості точок тіла індекс "об", що відноситься до рухомої системи координат, опускають і замість $\vec{r}_{об}$ пишуть $\vec{r}$.

Таким чином, швидкість $\vec{v}$ довільної точки тіла можна записати у вигляді суми двох швидкостей: швидкості $\vec{v}_п$, що визначає швидкість поступального руху рухомої системи, а також швидкості обертального руху, яка на відміну від $\vec{v}_п$, залежить від координати рухомої точки:

$$\vec{v} = \vec{v}_п + [\vec{\omega}\vec{r}].$$

Підкреслимо, що швидкість будь-якої точки тіла виражається за допомогою всього двох, однакових для твердого тіла, швидкостей – $\vec{v}_п$ та $\vec{\omega}$.

З отриманого виразу для швидкості $\vec{v}$ видно, що загалом рух точок тіла визначається шістьма незалежними параметрами. Три з них описують проекції швидкості $\vec{v}_п$ точки відліку рухомої системи, які визначені в лабораторній системі координат $X_{ЛАБ}Y_{ЛАБ}Z_{ЛАБ}$. Три інших параметри, або проекції вектора $\vec{\omega}$ кутової швидкості, що описують обертальний рух тіла в системі XYZ. Незалежні між собою параметри, за допомогою яких можна повністю описати рух тіла називають *степенями вільності*. Згідно з цим визначенням матеріальна точка має три степені вільності, а абсолютно тверде тіло – шість.

4.2. Рух центру мас тіла

Розглянемо довільне тіло (див. рис. 29). Розіб'ємо його на фізично малі ділянки. Масу j-ої ділянки тіла позначимо Δm_j, а її об'єм – ΔV_j. Подібно до того, як було визначено центр мас системи кількох тіл, визначимо центр мас твердого тіла. Радіус-вектор $\vec{r}_C$ *центру мас* знаходять за означенням по формулі

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_j \Delta m_j \vec{r}_j}{m},$$

де m – маса всього тіла, а $\vec{r}_j$ – радіус-вектор його j-ї ділянки. Коли припустити, що $\Delta V_j \to 0$, то зазначена сума нескінчено малих, що визначає положення центру, перетворюється на інтеграл, який формально можна записати наступним чином:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int\limits_V \vec{r}\,dm,$$

де інтегрування здійснюється по об'єму тіла.

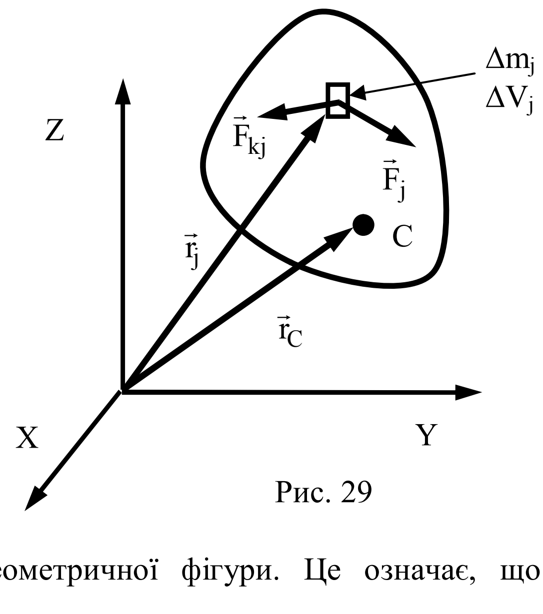

Рис. 29

Елементарну масу dm тіла можна записати через густину ρ елементарного об'єму, $dm = \rho dV$. Тому остання формула для задання центру мас набуває вигляду:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int\limits_V \vec{r}\rho dV$$

Якщо тверде тіло однорідне (ρ=const) і досить симетричне (наприклад, має форму кулі, куба, призми, тощо), то положення його центру мас співпадає з центром відповідної геометричної фігури. Це означає, що коли тіло має певні елементи симетрії, то розташування центру мас також має задовольнити симетрії тіла. Наприклад, центр мас в такому випадку повинен лежати на осі симетрії, чи співпадати з центром симетрії тіла.

Розглянемо тепер рівняння руху j-ї ділянки тіла. Будемо вважати, що до цієї ділянки прикладено зовнішні сили $\vec{F}_j$ і внутрішні сили $\vec{F}_{kj}$, за якими k-та ділянка тіла діє на j-ту ділянку тіла. Якщо внутрішні сили мають пружну природу, то вони виявляються поверхневими силами, або такими, що прикладені до поверхні виділеної ділянки. Зрозуміло, що подібні внутрішні сили можуть виникати лише між сусідніми ділянками.

За другим законом Ньютона для кожної з таких ділянок тіла можна записати рівняння руху:

$$\Delta m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_j$$

Просумуємо рівняння для всіх ділянок, що дає:

$$\sum_j \Delta m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj} + \sum_j \vec{F}_j$$

Внесемо знак суми під знак похідної та використаємо формулу означення центру мас. Це дозволяє вираз справа записати через другу похідну радіус-вектора центру мас

$$\sum_j \Delta m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_j \Delta m_j \vec{r}_j = \frac{d^2 m\vec{r}_C}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2}.$$

Врахуємо також, що відповідно до третього закону Ньютона $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$, тому подвійна сума, що визначає рівнодіючу всіх внутрішніх сил, зникає: $\sum_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{ki} = 0$.

Отже, приходимо до рівняння

$$m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j,$$

яке описує часову еволюцію центру мас тіла. Видно, що він змінює своє положення у просторі тільки в разі прикладання до тіла зовнішніх сил. При цьому центр мас тіла рухається подібно до матеріальної точки, в якій зосереджена вся маса тіла. Внутрішні сили не впливають на рух центру мас абсолютно твердого тіла, тобто вони не можуть викликати яких-небудь змін траєкторії руху, або орієнтації тіла у просторі.

Таким чином, для опису руху твердого тіла також можна застосовувати динамічне рівняння руху у вигляді другого закону Ньютона, але воно стосується тільки однієї точки тіла – його центру мас.

Зрозуміло, що під дією зовнішніх сил, коли точками їх прикладання є не лише центр мас, стає можливим обертальний рух тіла. Але при розгляді обертального руху слід розрізняти два випадки. Перший – це обертання тіла навколо нерухомої фіксованої осі. Він відповідає ситуації, коли рух тіла обмежений додатковим умовами – наприклад, незмінністю положення, щонайменше двох точок тіла, через які і проходить вісь обертання. Згідно з пунктом 2.3 точку відліку для опису такого обертального руху тіла слід обрати саме на цій осі обертання.

Другий випадок, коли ніяких додаткових умов на рух тіла нема. Воно вільно рухається (тобто поступально переміщується і обертається) під дією зовнішніх сил. При цьому вісь обертання тіла може бути довільною. Але якщо точку відліку рухомої системи сумістити з центром мас тіла, то в цій системі координат центру мас стає нерухомим. Тому в системі координат, початок якої співпадає з центром мас тіла, воно буде здійснювати тільки обертальний рух. Отже, в системах відліку, що пов'язані з центром мас, вивчення обертального руху твердого тіла є найпростішим.

4.3. Рівняння обертального руху тіла (загальний вигляд)

Знову розглянемо рівняння руху j-ої ділянки тіла, зображеного на рис. 29. При цьому будемо вважати, що об'єми ділянок $\Delta V_j \to 0$, а всі її точки мають однакову швидкість $\vec{v}_j$. Як і вище, нехай до ділянки прикладені внутрішні сили $\vec{F}_{kj}$, завдяки яким k-та ділянка тіла діє на j-ту ділянку тіла, а також зовнішні сили $\vec{F}_j$. Тоді за другим законом Ньютона знову можемо записати

$$\Delta m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_{k,(k \neq j)} \vec{F}_{kj} + \vec{F}_j .$$

Якщо помножити векторно ліву і праву частини цього рівняння на радіус-вектор $\vec{r}_j$, то легко отримати співвідношення:

$$\Delta m_j [\vec{r}_j \frac{d\vec{v}_j}{dt}] = [\vec{r}_j \sum_{k,(k \neq j)} \vec{F}_{kj}] + [\vec{r}_j \vec{F}_j] .$$

Покажемо, що

$$\Delta m_j [\vec{r}_j \frac{d\vec{v}_j}{dt}] = \Delta m_j \frac{d[\vec{r}_j \vec{v}_j]}{dt} .$$

Щоб переконатися в правильності цієї рівності, треба продиференціювати векторний добуток $[\vec{r}_j \vec{v}_j]$. Користуючись правилом знаходження похідної добутку знаходимо

$$\frac{d[\vec{r}_j \vec{v}_j]}{dt} = [\vec{r} \frac{d\vec{v}_j}{dt}] + [\vec{v}_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}] = [\vec{r} \frac{d\vec{v}_j}{dt}] + [\vec{v}_j \vec{v}_j] = [\vec{r}_j \frac{d\vec{v}_j}{dt}],$$

де враховано, що векторний добуток вектора самого на себе дорівнює нулеві. Тим самим шукана рівність доведена.

Внесемо масу, як сталу скалярну величину, під знак похідної і векторного добутку

$$\Delta m_j \frac{d[\vec{r}_j \vec{v}_j]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_j \Delta m_j \vec{v}_j]}{dt} = \frac{d[\vec{r}_j \vec{p}_j]}{dt} ,$$

де використано, що добуток маси на швидкість є імпульсом: $\vec{p}_j = \Delta m\vec{v}_j$. Тепер під знаком похідної стоїть векторний добуток радіус-вектора на імпульс.

Дамо означення: *моментом імпульсу* матеріальної точки (відповідно, моментом імпульсу точки тіла) називають векторний добуток радіус-вектора матеріальної точки (або точки тіла) на її імпульс. Вектор момент імпульсу позначають великою літерою $\vec{L}$. Згідно з наведеним означенням, моментом імпульсу точки тіла є $\vec{L}_j = [\vec{r}_j\vec{p}_j]$. Оскільки радіус-вектор визначають відносно точки відліку, тому і момент імпульсу буде визначеним відносно цієї точки.

Отже для ділянки тіла приходимо до рівняння

$$\frac{d\vec{L}_j}{dt} = [\vec{r}_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj}] + [\vec{r}_j\vec{F}_j].$$

З рівнянь, які описують часову залежність моменту імпульсу окремих ділянок тіла, можна отримати рівняння, яке описує те ж саме для всього тіла. Для цього просумуємо отримані рівняння:

$$\sum_j \frac{d\vec{L}_j}{dt} = \sum_j [\vec{r}_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj}] + \sum_j [\vec{r}_j\vec{F}_j].$$

В лівій частині рівності знак суми можна внести під знак похідної. В правій частині подвійна сума складається з пар векторних добутків $[\vec{r}_j\vec{F}_{kj}] + [\vec{r}_k\vec{F}_{jk}]$. Але враховуючи третій закон Ньютона, за яким внутрішні сили задовольняють умові $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$, вираз для суми цих доданків набуває вигляду

$$[\vec{r}_j\vec{F}_{kj}] + [\vec{r}_k\vec{F}_{jk}] = [(\vec{r}_j - \vec{r}_k)\vec{F}_{kj}] = [\Delta\vec{r}_{jk}\vec{F}_{kj}].$$

Знову ж таки за тим же, третім, законом Ньютона сили взаємодії між двома ділянками тіла співнаправлені з радіус-вектором, що сполучає ці ділянки: $\Delta\vec{r}_{jk} \uparrow\uparrow \vec{F}_{jk}$. Тому цей векторний добуток $[\Delta\vec{r}_{jk}\vec{F}_{jk}]=0$. Відповідно, нулем буде і вся подвійна сума $\sum_j [\vec{r}_j \sum_{k,(k\neq j)} \vec{F}_{kj}] = 0$.

Отже в результаті таких перетворень приходимо рівняння

$$\frac{d\sum_j L_j}{dt} = \sum_j [\vec{r}_j\vec{F}_j],$$

в лівій частині якого під знаком похідної стоїть сума моментів імпульсів окремих ділянок тіла

$$\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j [\vec{r}_j \vec{p}_j]$$

що визначає момент імпульсу твердого тіла в цілому.

Справа стоїть сума векторних добутків радіус-векторів на сили. Дамо означення: *моментом сили* називають векторний добуток радіус-вектора точки прикладання сили на її вектор. Позначають вектор моменту імпульсу літерою $\vec{M}$. Згідно з цим означенням для зовнішньої сили $\vec{F}_j$ момент імпульсу дорівнює $\vec{M}_j = [\vec{r}_j \vec{F}_j]$, де $\vec{r}_j$ – радіус-вектор точки прикладання сили $\vec{F}_j$. Таким чином, видно, що в правій частині рівняння стоїть сума моментів сил, які прикладені до тіла:

$$\vec{M} = \sum_j \vec{M}_j = \sum_j [\vec{r}_j \vec{F}_j]$$

В результаті проведених перетворень, отримаємо остаточне рівняння

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

яке називають *рівнянням обертального руху твердого тіла*. Воно свідчить, що швидкість зміни моменту імпульсу твердого тіла визначається моментом зовнішніх сил, що діють на тіло. Це рівняння є справедливим для будь-яких обертальних рухів абсолютно твердого тіла (як з фіксованою, так і не фіксованою віссю) і виконується в довільній інерціальній системі координат, в тому числі і у введеній в пункті 4.1 лабораторній системі координат. Зауважимо, що рівняння обертального руху оперує з новими динамічними величинами: моментом імпульсу $\vec{L}$ та моментом сил $\vec{M}$, фізичний смисл яких буде розкрито в наступних пунктах.

4.4. Момент сили

За означенням, що було сформульовано в пункті 4.3, в формулу $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$ для моменту сили входять радіус-вектор $\vec{r}$ точки, до якої прикладена сила $\vec{F}$. В загальному випадку радіус-вектор $\vec{r}$ при визначенні моменту сили відлічується від початку лабораторної системи координат.

За правилом векторного добутку $|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{F}$. Напрямок вектору $\vec{M}$ визначається за правилом правого гвинта. З цього випливає, що вектор $\vec{M}$ моменту сил направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$.

Щоб з'ясувати основні властивості моменту сил розглянемо довільне тіло, до якого прикладено силу $\vec{F}$ (рис. 30). Радіус-вектор $\vec{r}$ точки прикладання сили визначено відносно точки О, яка лежить на осі ОО'. Представимо радіус-вектор сумою $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_n$, де $\vec{r}_o$ – проекція вектора $\vec{r}$ на вісь обертання, а $\vec{r}_n$ – проекція вектора $\vec{r}$ на площину, що перпендикулярна до осі ОО', тому $\vec{r}_n \perp$ ОО'. Силу також зручно представити сумою векторів: $\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_o + \vec{F}_n$, де $\vec{F}_\tau$ – тангенціальна складова, яка перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}_o$ та $\vec{r}_n$, а $\vec{F}_o$ – складова, що лежить вздовж осі ОО', а $\vec{F}_n$ – нормальна складова сили, яка направлена вздовж або проти вектора $\vec{r}_n$. Підставимо ці вирази для $\vec{r}$ та $\vec{F}$ у формулу визначення моменту сили

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = [(\vec{r}_o + \vec{r}_n)(\vec{F}_\tau + \vec{F}_o + \vec{F}_n)] = [\vec{r}_o\,\vec{F}_\tau] + [\vec{r}_o\,\vec{F}_o] + [\vec{r}_o\,\vec{F}_n] + [\vec{r}_n\,\vec{F}_\tau] + [\vec{r}_n\,\vec{F}_o] + [\vec{r}_n\,\vec{F}_n]$$

Врахуємо, що добуток векторів, які співнаправлені, дорівнює нулеві, тобто $[\vec{r}_o\,\vec{F}_o]=0$, $[\vec{r}_n\,\vec{F}_n]=0$.

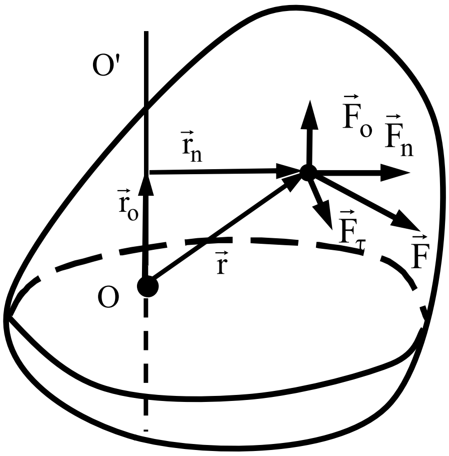

Рис. 30

Вектор моменту сили також розкладемо на складові $\vec{M} = \vec{M}_o + \vec{M}_n$, де $\vec{M}_o$ – складова моменту, що направлена вздовж осі ОО', а $\vec{M}_n$ – складова моменту, що перпендикулярна до цієї осі. З цих означень можна записати дві рівності:

$$\vec{M}_o = [\vec{r}_n\,\vec{F}_\tau],$$

$$\vec{M}_n = [\vec{r}_o\,\vec{F}_\tau] + [\vec{r}_o\,\vec{F}_n] + [\vec{r}_n\,\vec{F}_o].$$

Таким чином, складова $\vec{M}_o$ моменту сили, яка направлена вздовж осі, визначається тангенціальною $\vec{F}_\tau$ складовою сили. А оскільки $\vec{r}_n \perp \vec{F}_\tau$, то легко отримуємо, що $\left|\vec{M}_o\right| = r_n F_\tau$. Складову моменту сили на певну вісь ще називають *моментом сили відносно осі*. Його достатньо для опису обертального руху тіла у випадку фіксованої осі.

Важливим випадком обертального руху є такий, коли на тіло діють декілька сил. Найпростіший випадок той, коли цих сил дві. Тому розглянемо момент пари сил, коли до двох різних точок тіла прикладені дві протилежно направлені сили однакової величини: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}_2\right| = F$. Нехай положення точок прикладання цих сил задають вектори $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ (див. рис. 32). З урахуванням рівності $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, момент пари сил

$$\vec{M} = [\vec{r}_1\vec{F}_1] + [\vec{r}_2\vec{F}_2] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_1] = [\Delta\vec{r}_{12}\vec{F}_1],$$

де $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

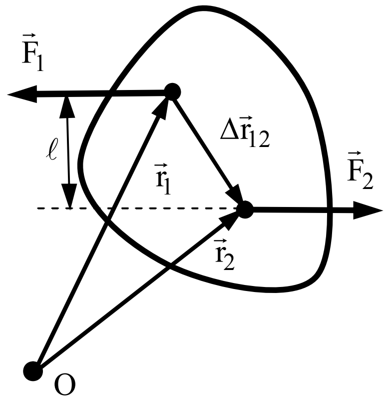

Рис. 31

Величина модуля моменту цих сил може бути представлена у формі

$$M = F\ell,$$

де ℓ – плече пари сил, яке дорівнює найменшій відстані між напрямками дії сил $\vec{F}_1$ та $\vec{F}_2$. Видно, що момент пари сил направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать сили, і дорівнює добутку, що представлений останньою формулою.

В означення моменту сили входить радіус-вектор точки прикладання сили. Але існують сили, які діють на всі точки тіла. Такою, наприклад, є сила тяжіння.

Розрахуємо момент сили тяжіння тіла відносно точки O (див. рис. 32). Масу тіла позначимо m. Розіб'ємо його на маленькі ділянки масами Δm_j. До кожної такої ділянки прикладена сила тяжіння $\Delta m_j\vec{g}$, де $\vec{g}$ - прискорення вільного падіння.

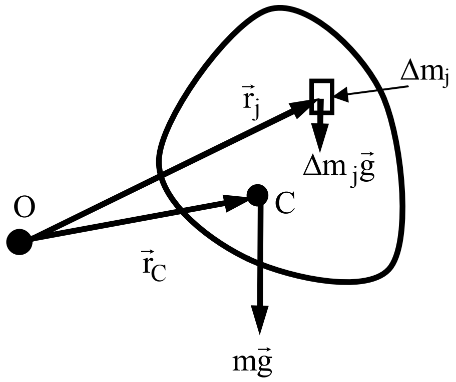

Рис. 32

Повна сила $\vec{F}_T$ тяжіння, що прикладена до тіла, дорівнює сумі: $\vec{F}_T = \sum_j \Delta m_j\vec{g} = \vec{g}\sum_j \Delta m_j = m\vec{g}$, де враховано, що маса тіла дорівнює сумі мас його ділянок.

Момент $\vec{M}_j$ сили тяжіння, що діє на j-ту ділянку $\vec{M}_j = [\vec{r}_j\Delta m_j\vec{g}]$. Повний момент $\vec{M}_T$ сили тяжіння, що діє на тіло, $\vec{M}_T = \sum_j \vec{M}_j = \sum_j [\vec{r}_j\Delta m_j\vec{g}]$.

Винесемо $\vec{g}$ з під знаку суми; $\vec{M}_T = [(\sum_j \Delta m_j\vec{r}_j)\vec{g}]$ і видно, що момент сили тяжіння дорівнює векторному добутку суми $\sum_j \Delta m_j\vec{r}_j$ на вектор прискорення вільного падіння $\vec{g}$. У пункті 4.2 ми бачили, що така сума може бути представлена з використанням маси тіла m та радіус-вектора його центру мас: $\sum_j \Delta m_j\vec{r}_j = m\vec{r}_C$. Це дозволяє записати, що момент сили тяжіння визначається простою формулою

$$\vec{M}_T = [\vec{r}_C m\vec{g}],$$

з якої випливає важливий висновок: точкою прикладання сили тяжіння можна вважати точку центру мас тіла.

В СІ момент сили вимірюють в одиницях [M]= Н·м (ньютон на метр).

4.5. Момент імпульсу

За означенням момент імпульсу матеріальної точки

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{v}],$$

де m – маса рухомої точки, а $\vec{v}$ – її швидкість (рис. 33). При цьому модуль вектора моменту імпульсу точки

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\alpha = \ell p,$$

де $\ell = |\vec{r}|\sin\alpha$ – плече (див. рис. 33).

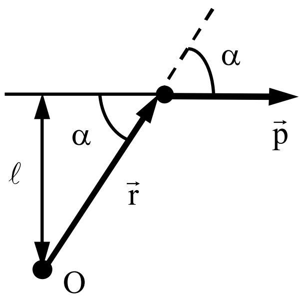

Рис. 33

В СІ момент імпульсу вимірюють в [L]=$\frac{кг \cdot м}{с}$.

Щоб визначити, чому і як змінюється момент імпульсу запишемо часову похідну вектора моменту імпульсу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}\vec{p}] = [\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}] + [\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r}\vec{F}],$$

де враховано, що $[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}] = [\vec{v}\vec{p}] = 0$, бо вектори імпульсу $\vec{p} = m\vec{v}$ і швидкості $\vec{v}$ співнаправлені $\vec{v}\uparrow\uparrow\vec{p}$. Оскільки векторний добуток радіус-вектора на силу задає момент сили $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, то останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

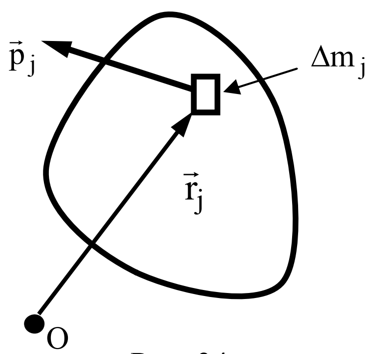

Рис. 34

Якщо розглядається тверде тіло, то згадаємо, що його момент імпульсу дорівнює сумі моментів імпульсів всіх точок твердого тіла. Розіб'ємо тіло на малі ділянки масою Δm_j, причому $\Delta m_j \to 0$ (рис. 34). Розташування таких ділянок характеризується радіус-вектором $\vec{r}_j$, а їх швидкість дорівнює $\vec{v}_j$. Момент імпульсу $\vec{L}_j = \Delta m_j[\vec{r}_j\vec{V}_j]$ кожної такої ділянки визначений відносно точки O (див. рис. 34). Тоді повний момент імпульсу всього тіла дорівнюватиме

$$\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j \Delta m_j [\vec{r}_j \vec{v}_j]$$

За прийнятої умови $\Delta m_j \to 0$, зазначена сума перетворюється на інтеграл:

$$\vec{L} = \int [\vec{r}\vec{V}]dm,$$

де інтегрування здійснюється по об'єму тіла. Отримана формула задає момент імпульсу твердого тіла відносно точки (в даному випадку точки О).

Розрахуємо тепер складову моменту імпульсу тіла, що визначена відносно осі. Для цього знайдемо проекцію вектора $\vec{L}$ на вісь OO' (див. рис.35), точка О якої є початком системи відліку. Проекція вектора моменту імпульсу всього тіла на дану вісь дорівнює сумі проекцій на вісь моментів імпульсів його ділянок. На рис. 35 зображено одну з таких ділянок, місце розташування якої характеризує радіус-вектор $\vec{r}_j$. Імпульс цієї фізичної точки позначено $\vec{p}_j$.

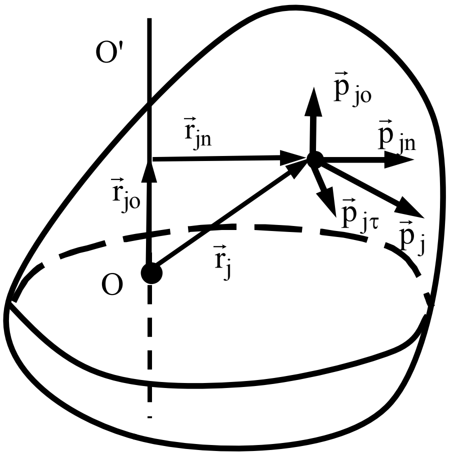

Рис. 35

Представимо її радіус-вектор $\vec{r}_j$ сумою: $\vec{r}_j = \vec{r}_{jo} + \vec{r}_{jn}$, де $\vec{r}_{jo}$ – проекція вектора $\vec{r}_j$ на вісь OO', а $\vec{r}_{jn}$ – його перпендикулярна до осі складова, $\vec{r}_{jn} \perp OO'$.

Вектор імпульсу також розкладемо на складові $\vec{p}_j = \vec{p}_{jo} + \vec{p}_{jn} + \vec{p}_{j\tau}$, де $\vec{p}_{jo}$ – складова імпульсу, що лежить уздовж осі OO', а $\vec{p}_{jn}$ – нормальна складова імпульсу, яка паралельна до вектора $\vec{r}_{jn}$, тобто $\vec{p}_{jn} \parallel \vec{r}_{jn}$, а $\vec{p}_{j\tau}$ – тангенціальна складова імпульсу, яка перпендикулярна до площини, утвореної векторами $\vec{r}_j$ та $\vec{r}_{jo}$, тобто $\vec{p}_{j\tau} \perp \vec{r}_{jn}$ та $\vec{p}_{j\tau} \perp \vec{r}_{jo}$,. Підставимо ці вирази для $\vec{r}_j$ та $\vec{p}_j$ у формулу визначення моменту імпульсу

$$\vec{L}_j = [\vec{r}_j \vec{p}_j] = [(\vec{r}_{jo} + \vec{r}_{jn})(\vec{p}_{j\tau} + \vec{p}_{jo} + \vec{p}_{jn})] =$$

$$= [\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{j\tau}] + [\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{jo}] + [\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{jn}] + [\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{j\tau}] +$$

$$+ [\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{jo}] + [\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{jn}].$$

Врахуємо далі, що векторний добуток паралельних векторів дорівнює нулю: $[\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{io}]=0$, $[\vec{r}_{in}\ \vec{p}_{jn}]=0$.

З іншого боку, вектор моменту імпульсу також можна представити сумою складових: $\vec{L}_j = \vec{L}_{jo} + \vec{L}_{jn}$, де $\vec{L}_{jo}$ – складова, яка направлена вздовж вектора $\vec{L}_{jo}$, а $\vec{L}_{jn}$ –

складова, яка перпендикулярна до нього. Тоді маємо дві незалежні складові моменту імпульсу, а саме:

$$\vec{L}_{jn}=[\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{j\tau}]+[\vec{r}_{jo}\ \vec{p}_{jn}]+[\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{jo}], \qquad \vec{L}_{jo}=[\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{j\tau}].$$

Видно, що складова $\vec{L}_{jo}$ моменту імпульсу точки тіла на вісь визначається тангенціальною складовою імпульсу цієї точки і найменшою відстанню від неї до осі. Оскільки при цьому $\vec{r}_{jn}\perp\vec{p}_{j\tau}$, то для модуля проекції моменту на вісь маємо $\left|\vec{L}_{jo}\right|=\left|\vec{r}_{jn}\right|\left|\vec{p}_{j\tau}\right|=r_{jn}p_{j\tau}$.

В результаті для складової $\vec{L}_{jo}$ вектора моменту імпульсу тіла на вісь приходимо до виразу:

$$\vec{L}_o=\sum_j\vec{L}_{j0}=\sum_j[\vec{r}_{jn}\ \vec{p}_{j\tau}]=\sum_j\Delta m_j[\vec{r}_{jn}\ \vec{v}_{j\tau}],$$

де враховано, що тангенціальна складова імпульсу дорівнює $\vec{p}_{j\tau}=\Delta m_j\vec{v}_{j\tau}$.

Тепер розглянемо випадок, коли вісь OO' фіксована. Нагадаємо, що така вісь не змінює свого положення відносно тіла, і не змінює своєї орієнтації. Обертання здійснюється з однаковою для всіх точок тіла кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, причому $\vec{\omega}\uparrow\uparrow$OO'. Коли початок системи координат лежить на осі OO', то кожна з точок тіла рухається по коловій траєкторії. Модуль вектора $\vec{r}_{jn}$ визначає радіус відповідного j-го кола. За даних умов вектори $\vec{v}_{j\tau}$, $\vec{r}_{jn}$ та $\vec{\omega}$ зв'язані співвідношенням $\vec{v}_{j\tau}=[\vec{\omega}\ \vec{r}_{jn}]$.

У цьому випадку складова моменту імпульсу тіла на вісь має вигляд

$$\vec{L}_o=\sum_j\Delta m_j[\vec{r}_{jn}\ [\vec{\omega}\ \vec{r}_{jn}]],$$

де під знаком суми стоїть подвійний векторний добуток. Результатом цього добутку є вектор направлений уздовж $\vec{\omega}$, бо за правилами векторного добутку $\vec{r}_{jn}[\vec{\omega}\ \vec{r}_{jn}]=r_{jn}^2\ \vec{\omega}$.

Таким чином, складова моменту імпульсу тіла, яке з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ обертається навколо фіксованої осі OO' за умови, що початок системи відліку лежить на цій осі, може бути представлений у формі:

$$\vec{L}_o=\sum_j\Delta m_j\ r_{jn}^2\ \vec{\omega}=\vec{\omega}\sum_j\Delta m_j\ r_{jn}^2=I_o\vec{\omega},$$

Видно, що момент імпульсу тіла, яке обертається навколо фіксованої осі, прямо пропорційний кутовій швидкості обертального руху тіла. Коефіцієнт пропорційності називається *моментом інерції*. Його величина залежить від орієнтації та положення осі, відносно якої здійснюється обертальний рух, і визначається як сума

$$I_o = \sum_j \Delta m_j \ r_{jn}^2,$$

де r_{jn} – найменша відстань від точки тіла до осі обертання.

4.6. Основне рівняння обертального руху

Вище в пункті 4.3 було отримано в загальному випадку рівняння обертального руху твердого тіла:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

де $\vec{L}$ – момент імпульсу тіла, визначений відносно точки початку лабораторної системи координат, а $\vec{M}$ – повний момент сил, прикладених до тіла, який також визначений відносно цієї точки. Це рівняння виконується для будь-яких обертальних рухів твердого тіла і справедливе для всіх інерціальних систем відліку. Воно також має виконуватись і для проекцій на довільну вісь. Наприклад, коли такою обрана будь-яка вісь OO', буде виконуватися рівняння

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o$$

де $\vec{L}_o$ і $\vec{M}_o$ – складові моменту імпульсу і моменту сил на цю вісь.

Розглянемо випадок, коли вісь обертання OO' фіксована і не змінює свого напрямку і положення відносно тіла, а початок системи відліку лежить на цій осі. Складова $\vec{L}_o$ моменту імпульсу на таку вісь пропорційна кутовій швидкості $\vec{\omega}$, $\vec{L}_o = I_o\vec{\omega}$, де I_o – момент інерції, визначений відносно осі обертання. Для абсолютно твердого тіла величина I_o=const, тому вираз для рівняння обертального руху тіла можна переписати у вигляді

$$I_o \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_o.$$

Отримане рівняння називають *основним рівнянням динаміки обертального руху* твердого тіла. Воно виконується для довільної фіксованої осі, коли система відліку, в якій розглядається обертання тіла є інерціальною. Але коли фіксована вісь проходить через центр мас, то вимога, щодо інерціальності системи відліку є необов’язковою. Для такого випадку рухома, пов’язана з тілом система відліку, може рухатися в лабораторній системі координат поступально з прискоренням $\vec{a}_C$. Таким чином, для випадку коли фіксована вісь обертання проходить через центр мас, для опису руху тіла в лабораторній системі відліку достатньо використати два рівняння:

$$m\frac{d^2\vec{r}_C}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j ,$$

яке описує рух центру мас тіла, який співпадає з початком рухомої системи відліку. І основне рівняння обертального руху тіла

$$I_C \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_o ,$$

яке описує обертальний рух тіла в рухомій системі координат навколо фіксованої осі OO', що проходить через центр мас тіла, причому I_C – момент інерції тіла визначений відносно цієї осі. Якраз таку систему рівнянь ми будемо розв’язувати в пункті 4.9 при розгляді руху циліндра, що скочується з похилої площини.

Слід також прийняти до уваги, що часова похідна від вектора кутової швидкості є кутовим прискоренням, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, тому основне рівняння динаміки обертального руху можна представити у вигляді:

$$I_o \vec{\varepsilon} = \vec{M}_o .$$

Це рівняння схоже по формі на рівняння другого закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} ,$$

яке є рівнянням поступального руху тіла.

Легко бачити, що при обертальному русі роль маси m відіграє момент інерції I_o, роль прискорення $\vec{a}$ – кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$, роль сили $\vec{F}$ – момент сили $\vec{M}$.

4.7. Момент інерції

Згідно з визначенням, яке наведено у пункті 4.5, момент інерції тіла визначається шляхом розрахунку суми

$$I_o = \sum_j \Delta m_j \, r_{jn}^2 ,$$

де r_{jn} – найменша відстань від точки тіла до осі обертання. Далі індекс n у r_{jn} будемо опускати, тобто найменшу відстань від точки тіла до осі обертання позначимо r_j (див. рис. 36). Після такого перепозначення формула для момент інерції твердого тіла запишеться у вигляді

$$I_o = \sum_j \Delta m_j \, r_j^2 ,$$

де Δm_j – маса ділянки тіла, r_j – найменша відстань від неї до фіксованої осі обертання (рис. 36).

Момент інерції визначається для певної осі, на що вказує індекс "о" у I_o. При зміні положення осі чи її напрямку величина моменту імпульсу змінює своє значення. Оскільки $\Delta m_j \to 0$, то формула для моменту інерції може бути записана у вигляді інтегралу

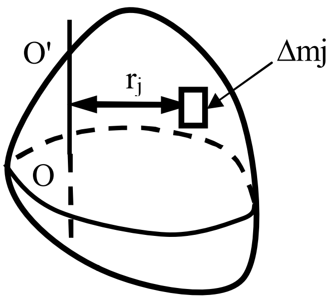

Рис. 36

$$I_o = \int r^2 dm,$$

де інтегрування здійснюється по об'єму тіла, а r – найкоротша відстань від точки масою dm до осі.

Елементарна маса, як відомо, дорівнює добутку густини тіла ρ на елементарний об'єм dV: dm =ρdV. Користуючись цим співвідношенням запишемо вираз для моменту інерції наступним чином

$$I_o = \int r^2 \rho dV.$$

Як бачимо, момент інерції залежить не тільки від маси тіла, а і від геометричних розмірів тіла і від орієнтації осі, відносно якої його розраховують.

Розглянемо найпростіший приклад розрахунку моменту інерції обода колеса масою m і радіусом r, коли вісь OO' проходить через точку O центра мас колеса і направлена перпендикулярно до площини колеса (див. рис. 37). Будемо óбід вважати нескінченно тонким. В цьому випадку відстань від точок обода до осі буде однаковою і рівною радіусу r. Розрахунок моменту інерції відносно осі OO' є тривіальним

$$I_o = \int r^2 dm = r^2 \int dm = mr^2.$$

Але, наприклад, у випадку осі AA', що проходить через точку A, яка лежить на ободі і яка також перпендикулярна до площини колеса, розрахунок інтегралу потребує певних зусиль. Проте слід мати на увазі, що зазначений випадок відповідає теоремі Штейнера, за якою момент інерції тіла I відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції тіла I_o відносно осі паралельній даній і яка проходить через центр мас, та добутку маси тіла на відстань a між осями, тобто

$$I_A = I_o + ma^2.$$

Для розглянутого на рис. 37 прикладу, осі AA' і OO' паралельні. Вісь OO' проходить через центр мас, причому відстань між осями дорівнює радіусу a=r. Таким чином, момент інерції I_A ободу , визначений відносно осі AA' дорівнює: $I_A = I_o + ma^2 = mr^2 + mr^2 = 2mr^2$.

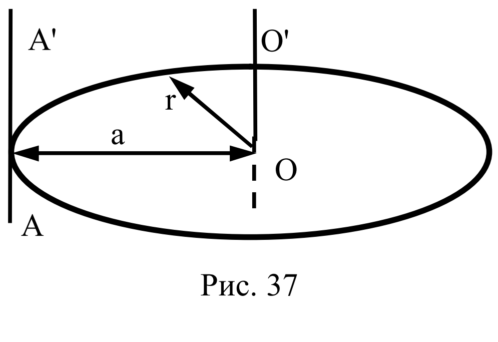

Рис. 37

Наведемо вирази для моментів інерції різних тіл:

1. Для тонкого однорідного стрижня, коли вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його центр мас:

$$I_o = \frac{1}{12} m \ell^2,$$

де ℓ – довжина стрижня, а m – його маса.

2. Для тонкостінного циліндру, коли вісь обертання лежить уздовж його осі:

$$I_o = mr^2,$$

3. Для суцільного однорідного циліндра, коли вісь обертання лежить уздовж його осі:

$$I_o = \frac{1}{2} mr^2,$$

де r – радіус циліндру, а m – його маса.

3. Для суцільної однорідної кулі, коли вісь проходить через її центр

$$I_o = \frac{2}{5} mr^2,$$

де r – радіус кулі, а m – її маса.

В СІ момент інерції вимірюють в $[I]$=кгм^2.

4.8. Прецесія гіроскопа

Для випадку обертання навколо фіксованої осі було отримано, що момент імпульсу тіла співпадає за напрямком з кутовою швидкістю (див. пункт 4.5). Але, коли вісь вільна, то це твердження може не виконуватися і можливі рухи, що супроводжуються зміною напряму вісі обертання. Розглянемо приклад руху гіроскопу, або приладу, вісь обертання якого має можливість вільно орієнтуватись. *Гіроскопом* називається тіло з віссю симетрії, яке швидко обертається навколо своєї геометричної осі.

На рис. 38 наведено гіроскоп, який має форму тонкого диску, що швидко обертається навколо власної осі OO' з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Момент імпульсу гіроскопа відносно OO' дорівнює $\vec{L} = I_0\vec{\omega}$ Уздовж осі диску до його центру прикріплено два стрижні, однакової довжини ℓ. Відстань |OC| від центру мас C гіроскопа до точки O дорівнює ℓ. Вісь гіроскопа нахилена до вертикальної осі під кутом α.

До гіроскопу прикладена сила тяжіння $m\vec{g}$, момент якої відносно точки O дорівнює $M_T = mg\ell \sin\alpha$, де M_T – модуль моменту сили тяжіння, m – маса гіроскопа. Момент сили тяжіння направлений перпендикулярно до осі гіроскопа і до вертикальної осі Z. Момент сили тяжіння також перпендикулярний і до моменту імпульсу $\vec{L}$. Тому під дією цього моменту модуль $\vec{L}$ не змінюється, а змінюється тільки його напрямок.

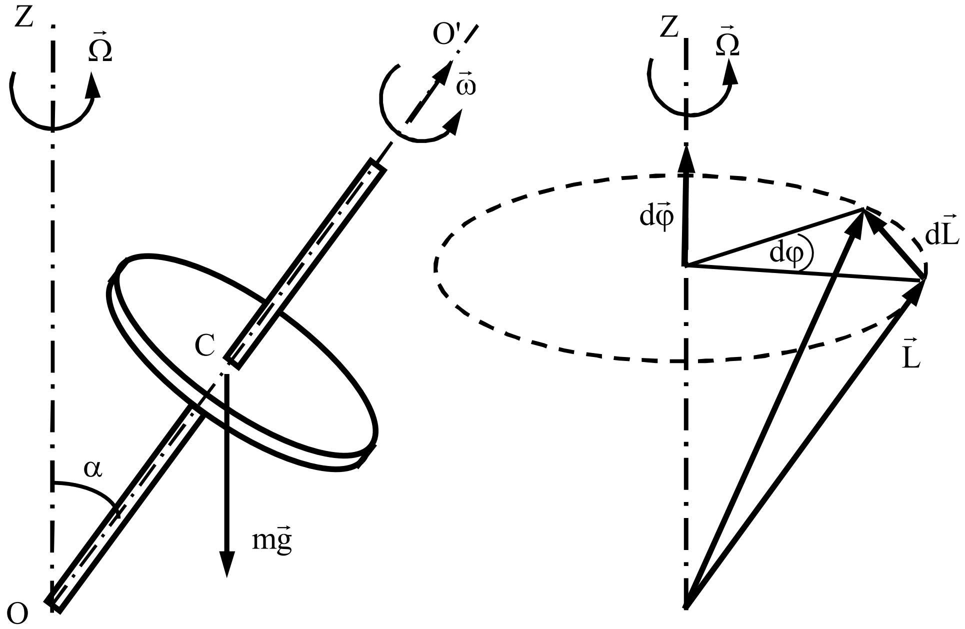

Рис. 38

Запишемо рівняння обертального руху в полі тяжіння:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_T.$$

Приріст $d\vec{L}$ вектора імпульсу направлений здовж вектора $\vec{M}_T$ моменту сили. Отже $d\vec{L} \perp \vec{L}$. За цих умов кінець вектора $\vec{L}$ буде описувати коло. Величина модуля вектора $d\vec{L}$ дорівнює дузі кола з радіусом Lsinα, що опирається на кут dφ. Тому можна записати $dL = L\sin\alpha d\varphi$. З урахуванням цих співвідношень, отримаємо

$$L\sin\alpha\frac{d\varphi}{dt} = M_T.$$

Кутову швидкість обертання вектора $\vec{L}$ відносно Z позначимо $\vec{\Omega}$. Її величина визначається похідною: $\Omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Саме з такою кутовою швидкістю відбувається обертання осі гіроскопу навколо Z. В проекціях моменту імпульсу та моменту сили можна знайти, що виконується співвідношення

$$I\omega\sin\alpha\,\Omega = mg\,\ell\sin\alpha.$$

З якого знаходимо кутову швидкість обертання осі гіроскопу відносно Z:

$$\Omega = \frac{mg\,\ell}{I\omega},$$

яка називається швидкістю *прецесії*. Як видно, ця швидкість не залежить від кута нахилу гіроскопа, і обернено пропорційна його кутовій швидкості. Отже, чим більша величина ω кутової швидкості обертання гіроскопу, тим менша частота прецесії. Закон прецесійного руху можна простежити на прикладі дитячої іграшки дзиги, яка при швидкому обертанні навколо своєї осі повільно прецесіює і негайно падає, як тільки її власне обертанні зупиниться.

4.9. Скочування циліндра з похилої площини

Опишемо рух тонкостінного циліндра масою m і радіусом r, який скочується по похилій площині (рис. 39). Будемо вважати, що циліндр рухається по площині без ковзання. Позначимо α кут між похилою площиною і горизонтальною поверхнею. Нехай початкова швидкість циліндра дорівнює нулеві.

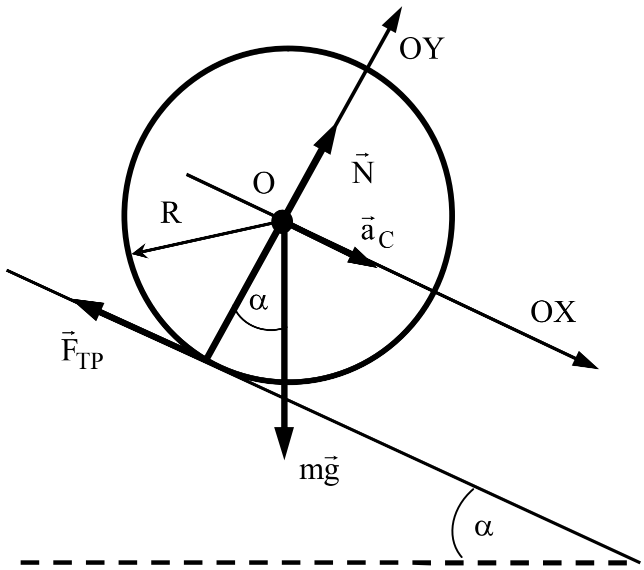

Рис. 39

На циліндр діють сила тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}$ та сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Запишемо рівняння Ньютона для руху центру мас, який знаходиться на осі циліндра:

$$m\vec{a}_C = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер},$$

де $\vec{a}_C$ – прискорення центру мас. На рис. 39 центр мас співпадає з точкою O початку системи відліку. Рівняння руху містить три невідомих, а саме: величину прискорення $\vec{a}_C$, силу реакції опори $\vec{N}$ та величина сили тертя. Сила тертя при цьому є силою тертя спокою, бо вважається, що циліндр не ковзає по площині, тобто точка дотику циліндру не проковзує.

Запишемо рівняння руху в проекціях векторів на осі OX та OY, відповідно до системи координат, що показана на рис. 39:

$$ma_C = mg\sin\alpha - F_{тер},$$

$$0 = N - mg\cos\alpha.$$

З другого рівняння (для Y-их проекцій) легко отримати силу реакції опори $N = mg\cos\alpha$.

В той же час обидві невідомі величини прискорення a_C та сили тертя $F_{тер}$ зв’язані лише одним рівнянням, якого для їх визначення недостатньо.

Проте, до цього моменту ми записали рівняння для прискорення a_C центру мас циліндра. Опишемо тепер рух циліндра як обертальний навколо осі, що співпадає з віссю циліндра. Момент сили тяжіння відносно цієї осі дорівнює нулеві, оскільки вона прикладена до центру мас, який лежить саме на осі обертання. Сила реакції опори прикладена до точки дотику циліндру та площини. Але ця сила проходить через точку О і її момент також дорівнює нулю. Таким чином, сила тертя стає єдиною силою, момент якої відносно осі циліндра, що залишається скінченим. Тільки під дією моменту сили тертя циліндр може набувати кутового прискорення.

Оскільки це так, запишемо рівняння обертального руху для даного циліндру; воно має вигляд:

$$I_o\,\varepsilon = M_{тер}\,,$$

де ε – проекція кутового прискорення на вісь обертання, I_o – момент інерції тонкостінного циліндру, визначений відносно осі циліндра і рівний $I_o = m\,r^2$, а $M_{тер}$– проекція моменту сили тертя на вісь, яка дорівнює $M_{тер} = r\,F_{тер}$. З урахуванням отриманих співвідношень рівняння обертального руху перетворюється до вигляду:

$$mr^2\varepsilon = r\,F_{тер}\,,$$

з якого після скорочення r знаходимо величину сили тертя:

$$F_{тер} = m\,r\,\varepsilon.$$

Врахуємо, що рух циліндра по площині відбувається без ковзання. Це можливо, лише коли швидкість обертального руху в точці дотику дорівнює за величиною, але протилежно направлена до швидкості поступального руху циліндра. Тобто величина швидкості, з якою циліндр прискорено рухається по похилій площині внаслідок свого обертального руху, визначається швидкістю руху осі (або центру мас) циліндра. В результаті, отримаємо, що тангенціальне прискорення точок циліндра дорівнює прискоренню його осі, а отже $a_C = a_\tau$. З іншого боку, – це тангенціальне прискорення $a_\tau = \varepsilon r$, і тому $a_C = \varepsilon r$. З урахуванням останніх співвідношень приходимо до формули

$$F_{тер} = m\,a_C\,,$$

яку можна використати для знаходження шуканого прискорення:

$$ma_C = mg\sin\alpha - ma_C\,.$$

Звідси легко отримуємо, що прискорення центру мас тонкостінного циліндру визначається виразом:

$$a_C = \frac{1}{2} g \sin\alpha .$$

Видно, що величина цього прискорення при скочуванні циліндра з похилої площини в два рази менша, якби циліндр рухаючись поступально зісковзував з неї (див. пункт 3.11).

Запишемо тепер вираз для величини сили тертя спокою

$$F_{тер} = \frac{1}{2} mg \sin\alpha .$$

Зрозуміло, що скочування циліндру без ковзання з похилої площини відбувається, поки сила тертя спокою буде залишатися меншою від її максимального значення, яке дорівнює $F_{тер}^{(max)} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, де μ – коефіцієнт тертя. Отже, порівнюючи вирази для $F_{тер}$ та $F_{тер}^{(max)}$, знайдемо максимальне значення кута, коли ковзання циліндру не буде:

$$tg\alpha = 2\mu g .$$

Слід зауважити, що вирази для сили тертя, прискорення та граничного кута отримані для тонкостінного циліндру. У випадку скочування суцільного циліндру чи, наприклад, кулі ці вирази будуть іншими, що пов’язане з іншими для цих тіл формулами для моментів інерції.