5. Закони збереження

5.1. Інтеграли руху

Розглянемо систему, що складається з N фізичних тіл, які можна наближено вважати матеріальними точками. Це означає, що ми нехтуємо обертальними рухами цих тіл. Положення кожного тіла системи задається за допомогою трьох просторових координат, які є незалежними між собою функціями часу. Повна кількість незалежних координат, які необхідно застосовувати для опису поступального руху *всіх* тіл системи, тобто *число степенів вільності*, для довільної системи складає 3N.

Щоб визначити стан системи в будь-який момент часу, треба записати рівняння руху кожного її тіла. При цьому слід враховувати як внутрішні сили, з якими тіла системи діють одне на одне всередині системи, так і зовнішні сили, які в загальному випадку можуть існувати і тим самим впливати на рух тіл, що входять до системи. За другим законом Ньютона для кожного такого тіла можна записати динамічне рівняння руху:

$$m_j(d^2\vec{r}_j / dt^2) = \vec{F}_j$$

де m_j – маса j-го тіла (j=1, 2, 3,…), $\vec{r}_j$ – його радіус-вектор, а $\vec{F}_j$ – рівнодійна зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до j -го тіла. Зрозуміло, що зазначений набір зв'язаних між собою рівнянь містить 3N шуканих змінних, що визначають траєкторії $\vec{r}_j(t)$. Кожне з рівнянь є диференціальним рівнянням другого порядку, який як відомо, визначається порядком старшої похідної. Отже просторовий рух тіл, що складають систему, описується N (в проекціях 3N) рівняннями другого порядку.

Щоб знайти особливості руху цих тіл і тим самим визначити положення кожного з них в довільний момент часу, необхідно розв'язати записану систему диференціальних рівнянь. Треба мати на увазі, що після кожного інтегрування рівнянь з'являється своя константа C. Таким чином, загальна кількість подібних констант інтегрування визначається добутком порядку диференціального рівняння на їх кількість, тобто в даному випадку $2 \times 3N$ =6N. В результаті, радіус-вектори для N рухомих і взаємодіючих між собою тіл можуть бути представлені у вигляді

$$\vec{r}_j = \vec{f}_j(t, C_1, C_2 ... C_{6N}),$$

де $\vec{f}_j$ – N функцій, які треба знайти як розв'язок системи N рівнянь, а $C_1,...C_{6N}$ – згадувані вище константи інтегрування, які називають *інтегралами* руху. Для їх визначення використовують так звані початкові умови, якими є положення тіл $\vec{r}_j(t=0)$ і їх швидкості $\vec{v}_j(t=0)$ в початковий момент часу t=0. Зв'язок між константами інтегрування $C_1,...C_{6N}$ та початковими умовами $\vec{r}_j(t=0)$ і $\vec{v}(t=0)$ залежить від конкретного типу фізичної системи, характеру взаємодій між складовими тілами та виду векторних функцій $\vec{f}_j(t, C_1, C_2...C_{6N})$, число яких дорівнює N (в проекціях 3 N).

Серед загальної кількості інтегралів руху $C_1,...C_{6N}$ є декілька таких, які відіграють особливо важливу роль і які визначаються основними властивостями простору і часу. Це інтеграли, які відповідають законам збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії. Відповідні величини пропорційні кількості N тіл в системі, і тому отримали назву *адитивних* інтегралів руху.

5.2. Імпульс

Почнемо з розгляду точкового тіла (матеріальної точки) масою m, що рухається зі швидкість $\vec{v}$. *Імпульсом*, або *кількістю руху*, такого точкового тіла називають векторну фізичну величину, яка визначається за формулою

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

При переході від однієї системи відліку до іншої імпульс тіла змінюється, бо в новій системі згідно з перетвореннями Галілея для швидкостей тіло буде мати інше значення швидкості.

У системі СІ імпульс вимірюють у кілограмах на метр на секунду [p] = кг·м/с.

Тепер візьмемо систему N точкових тіл, маси яких m_j, а швидкості $\vec{v}_j$, тоді кожне з тіл, що належить системі, характеризується імпульсом $\vec{p}_j = m_j\vec{v}_j$. *Повним імпульсом системи тіл* називають суму імпульсів тіл, що входять до системи, а саме:

$$\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j = \sum_j m_j\vec{v}_j .$$

Величина повного імпульсу системи тіл, як і імпульс кожного з них, також залежить від вибору системи відліку.

У пункті 3.9 було показано, що центр мас $\vec{r}_C(t)$ системи тіл рухається з швидкістю

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j}{m}.$$

Як бачимо, чисельником в цьому виразі є повний імпульс системи, тому можна стверджувати, що повний імпульс системи – це

$$\vec{P} = m\vec{v}_C .$$

Видно, що він визначається лише швидкістю центра мас системи.

Слід зауважити, що у системі відліку, в якій центр мас є нерухомим, повний імпульс системи дорівнює нулю. Цей, здавалося б, тривіальний висновок стосується і того випадку, коли всі тіла системи рухаються і взаємодіють між собою.

Тепер розглянемо суцільне тверде тіло. В припущенні його довільного руху, різні точки тіла будуть мати різні значенні своєї швидкості. Тому при визначенні імпульсу тіла як цілого розіб'ємо його на маленькі ділянки і будемо вважати, що всі вони рухаються поступально. За виконання цих умов імпульс j-ої ділянки є $\vec{p}_j = \Delta m_j \vec{v}_j$, де Δm_j – її маса, а $\vec{v}_j$ – швидкість.

Імпульс $\vec{P}$ всього тіла за означенням складається з суми імпульсів окремих його окремих ділянок, так що

$$\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j = \sum_j \Delta m_j \vec{v}_j \ .$$

Величина імпульсу тіла не повинна залежати від способу розбиття його на ділянки, тому визначення повного імпульсу тіла сумою імпульсів його окремих частин буде справедливим, коли для кожної з них $\Delta m_j \to 0$. За цієї умови записана сума перетворюється на інтеграл, яким і визначається імпульс тіла як цілого:

$$\vec{P} = \int_V \vec{v} dm \,,$$

де $\vec{v}$ – швидкість точок тіла, тобто $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, а інтегрування здійснюється по об'єму V тіла.

У пункті 4.2 було показано, що радіус-вектор центру мас твердого тіла

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm \,.$$

Якщо продиференціювати ліву і праву частини цього виразу, то знайдемо, що швидкість центру мас тіла пропорційна його повному імпульсу:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\int_V \vec{r} dm = \frac{1}{m}\int_V \frac{d\vec{r}}{dt} dm = \frac{1}{m}\int_V \vec{v} dm = \frac{\vec{P}}{m} \,.$$

Звідси прямо випливає

$$\vec{P} = m\vec{v}_C \,.$$

Ця особливість повного імпульсу твердого тіла робить радіус-вектор центру мас тіла корисною характеристикою опису його руху. Так, вище в 4-ому розділі було показано, що в системі відліку, початок якої співпадає з центром мас, імпульс тіла дорівнює нулю, і в ній тверде тіло здійснює тільки обертальний рух. В усіх інших системах відліку повний імпульс тіла визначається швидкістю його центру мас, незважаючи на те, що тіло може обертатися навколо якої-небудь осі.

5.3. Закон збереження імпульсу

Розглянемо вільне точкове тіло, тобто таке, на яке не діють сили. У відповідності до першого закону Ньютона в інерціальній системі відліку вільне тіло рухається з сталою швидкістю, $\vec{v}$=const. Тому імпульс такого тіла також буде зберігатися. Дійсно, при описі руху вільного тіла в праву частину рівняння, що відповідає другому закону Ньютона, треба підставити $\vec{F}=0$. Тоді це рівняння має простий вигляд

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=0,$$

або

$$\frac{dm\vec{v}}{dt}=0.$$

Звідси прямо отримуємо, що в інерціальній системі відліку імпульс вільного точкового тіла не змінюється з часом, тобто $m\vec{v}=\mathrm{const}$, або за означенням $\vec{p}=\mathrm{const}$.

Тепер розглянемо замкнену систему точкових тіл. *Замкненими* називають системи тіл, на які не діють зовнішні сили. За другим законом Ньютона рух кожного з тіл такої системи описується рівнянням

$$m_j\frac{d\vec{v}_j}{dt}=\sum_{k,(k\neq j)}\vec{F}_k,$$

де m_j – маса j-го тіла, $\vec{r}_j$ – його радіус-вектор, $\vec{F}_{kj}$ – внутрішня сила, з якою k-те тіло діє на j-те тіло, сума розраховується по k.

Як і раніше, просумуємо ці рівняння руху, тобто окремо складемо ліві і праві їх частини; це дає вираз

$$\sum_j m_j\frac{d\vec{v}_j}{dt}=\sum_j\sum_{k,(k\neq j)}\vec{F}_{kj},$$

в якому сума зліва є похідною повного імпульсу системи

$$\sum_j m_j\frac{d\vec{v}_j}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_j\vec{m}_j\vec{V}_j=\frac{d\vec{P}}{dt}.$$

За третім законом Ньютона для внутрішніх сил виконується рівність $\vec{F}_{jk}=-\vec{F}_{kj}$, а тому, як це вже було, подвійна сума всіх внутрішніх сил в правій частині рівняння $\sum_j(\sum_{k,(k\neq j)}\vec{F}_{ki})=0$.

Отже для замкненої системи тіл отримуємо ту ж саму умову, що і для окремого точкового тіла, а саме

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0,$$

де $\vec{P}$ – повний імпульс цієї системи.

З отриманого рівняння випливає, що повний імпульс замкненої системи тіл є незмінною в часі величиною,

$$\vec{P} = \text{const}.$$

З іншого боку, повний імпульс системи визначається імпульсами окремих тіл, що входять до системи, тому вираз для закону збереження імпульсу замкненої системи можна записати у іншому вигляді:

$$\sum_j m_j \vec{v}_j = \text{const}.$$

Незмінність повного імпульсу системи взаємодіючих між собою точкових тіл від часу означає, що значення повного імпульсу мають бути однаковим для двох довільних моментів часу t_1 і t_2:

$$\sum_j m_j \vec{v}_j(t_1) = \sum_j m_j \vec{v}_j(t_2),$$

де $\vec{v}_j(t_1)$ та $\vec{v}_j(t_2)$ позначені швидкості j-го тіла відповідно у момент часу t_1 і t_2.

У пункті 4.2 було показано, що зміна положення центру мас твердого тіла відбувається внаслідок дії зовнішніх сил. Якщо ж тіло ізольоване (тобто на нього не діють інші тіла), то, як відомо, справедливе співвідношення

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = 0,$$

в якому $\vec{v}_C$ – швидкість центру мас твердого тіла.

З останнього рівняння знаходимо, що є сталим добуток маси ізольованого тіла на швидкість $\vec{v}_C$ його центру мас, або

$$m\vec{v}_C = \text{const}.$$

Оскільки за визначенням такий добуток є імпульсом тіла $\vec{P} = m\vec{v}_C$, то останній також є величиною, що зберігається, $\vec{P} = \text{const}$.

Закон збереження імпульсу є прямим наслідком однорідності простору. Це означає, що стан і властивості замкненої системи в просторі не залежать від місця її розташування. Тому замкнену систему як ціле можна переносити в просторі без зміни її стану. Причому таке перенесення не треба витрачати роботи, A=0.

Щоб продемонструвати, як проявляється однорідність простору, розглянемо для спрощення замкнену систему, що складається лише з двох точкових тіл, маси яких m_1 і m_2 і які діють одне на інше з силами $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$. Позначимо $\Delta\vec{r}$ вектор переміщення системи (див. рис. 40). При переміщенні $\Delta\vec{r}$ системи внутрішні сили $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$ виконують роботи A_1 та A_2, відповідно. Але сума робіт цих сил має дорівнювати нулю, бо умова однорідності простору вимагає збереження стану системи. Дійсно, роботу можна записати у вигляді $A = A_1 + A_{21} = \vec{F}_{21}\Delta\vec{r} + \vec{F}_{12}\Delta\vec{r} = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12})\Delta\vec{r} = 0$. І оскільки переміщення може бути довільним, то рівність роботи нулеві виконується тільки за умови, що сума сил $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$. Іншими словами, така рівність має виконуватися саме для внутрішніх сил будь-якої системи тіл. Таким чином, закон збереження імпульсу замкненої системи тіл, а також рівність нулю рівнодіючої всіх внутрішніх сил, є безпосереднім наслідком однієї з найважливіших властивостей оточуючого нас простору – його однорідності.

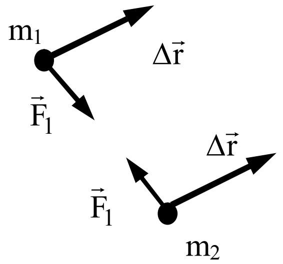

Рис. 40

5.4. Реактивний рух

Закон збереження імпульсу – фундаментальний закон природи. Він визначає протікання багатьох фізичних явищ. Зокрема, цей закон лежить в основі реактивного руху, що "керує" польотами реактивних літаків, реактивних снарядів, тощо.

Реактивним називають рух, який виникає в результаті відокремлювання від тіла з ненульовою швидкістю будь-якої його частини. Найбільш відомим прикладом реактивного руху є рух ракети. В найпростішому варіанті ракета є системою двох тіл – оболонки та газу. Газ утворюється при згорянні палива. Через спеціальний пристрій, який має назву *реактивне сопло,* газ з величезною швидкістю відокремлюється від ракети, утворюючи реактивний струмінь.

Розрахуємо швидкість ракети в припущенні, що можна знехтувати силою тяжіння та силою опору повітря. Ці умови виконуються, наприклад, для руху ракети в космічному просторі.

Оскільки ракета, як система тіл, є системою замкненою, то для оболонки та газу в космічному просторі має виконуватися закон збереження імпульсу. Для будь-якого довільного моменту часу позначимо масу ракети – M, а її швидкість – v. Імпульс ракети в цей момент часу дорівнює Mv.

Нехай протягом наступного малого проміжку часу Δt від ракети відокремлюється порція газу масою Δm. Після відокремлення газу маса ракети зменшується і стає рівною $M - \Delta m$. Швидкість ракети при цьому також змінюється і стає рівною $v + \Delta v$ (рис. 41).

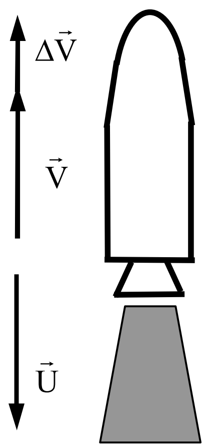

Рис. 41

Будемо вважати швидкість відокремлення газу відносно ракети незмінною і позначимо її u. Ракета рухається, отже швидкість газу в нерухомій (лабораторній) системі відліку становить v–u. Тепер згідно закону збереження імпульсу запишемо рівняння

$$Mv=(M-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u),$$

де справа записано імпульс системи (ракета + відокремлений газ) для моменту часу Δt.

Розкриємо дужки у виразі зліва

$$(M-\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(v-u)=$$

$$=Mv+M\Delta v-\Delta m v-\Delta m\Delta v+\Delta m v-\Delta m u\approx Mv+M\Delta v-\Delta m u,$$

де врахували, що Δm, та Δv за час Δt залишилися малими, так що добутком $\Delta m\Delta v$ можна знехтувати, як величиною другого порядку малості. Тоді з закону збереження отримаємо, що

$$0 = Mv - \Delta m u.$$

Згадаємо, що відокремлення порції газу масою Δm означає, що таку саму величину зменшується і маса ракети, тобто $\Delta m = -\Delta M$.

Тоді отримана рівність імпульсів в близькі моменти часу набуває остаточного вигляду:

$$M\Delta v = -\Delta M u .$$

Поділимо ліву і праву частину цього співвідношенні на Δt, що дає рівняння руху ракети:

$$M\cdot a = -\frac{\Delta M}{\Delta t}u ,$$

де а – прискорення ракети $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, а відношення $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ характеризує швидкість зміни маси ракети при відокремленні газу і фактично є часовою похідною маси ракети. Тому рівняння реактивного руху можна представити у такому вигляді:

$$M\cdot a = -\frac{dM}{dt}u$$

Зауважимо, що за умовою реактивного руху, маса ракети зменшується, отже $\frac{dM}{dt} < 0$, тобто її прискорення позитивне і швидкість зростає.

За другим законом Ньютона добуток маси ракети на її прискорення M·a є сила, що діє на ракету і надає їй прискорення. Цю силу називають *реактивною силою*. Її величина, як відомо, пропорційна швидкості зміни маси ракети при відокремленні газу: $F_{реакт.} = -\frac{dM}{dt}u$.

Поділимо праву і ліву частину рівняння $M\Delta v = -\Delta Mu$ на добуток uv. Це дає рівняння

$$\frac{\Delta M}{M} = -\frac{\Delta v}{u},$$

яке за умови $\Delta t \to 0$ набуває вигляду

$$dv = -u\frac{dM}{M}.$$

Нехай початкова швидкість ракети дорівнює нулю, а початкова маса ракети дорівнює M_0. Після відокремлення газу маса ракети M, і вона набуває швидкості v. Величину швидкості знайдемо шляхом інтегрування

$$v = -u\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M} = u\ln\frac{M_0}{M}.$$

Звідси видно, що чим більшою є швидкість u відокремлення газу, і чим більшу частку на старті ракети складає паливо, тим більшою буде швидкість, яку набере ракета, звільнившись від палива.

5.4. Закон збереження моменту імпульсу

Знову розглянемо вільне точкове тіло. В параграфі 4.3 було отримано, що в інерціальній системі відліку швидкість зміни моменту імпульсу $\vec{L}$ тіла визначається моментом сили прикладеної до нього, тобто $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$. На вільну точку не діють ніякі сили, тому і $\vec{M} = 0$. Отже, часова похідна моменту імпульсу вільного точкового тіла $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$. Звідси випливає, що момент імпульсу вільного точкового тіла є незмінним $\vec{L} = \text{const}$.

Дійсно, у вільної частинки імпульс є постійним, тому для двох довільних моментів часу t_1 та t_2 маємо $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ (див. рис. 42). Визначений відносно точки О, момент імпульсу для цих моментів часу дорівнює $\vec{L}_1 = [\vec{r}_1\vec{p}_1]$, $\vec{L}_2 = [\vec{r}_2\vec{p}_2]$. Обидва ці вектори моменту імпульсу направлені в одну і ту ж сторону перпендикулярно до площини, утвореної радіус-вектором та імпульсом. Модулі дорівнюють імпульсу на плече, яке також однакове (див. рис. 42). Отже, для вільного точкового тіла виконується рівність моментів імпульсу, визначених для двох довільних моментів часу: $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$. Таким чином, момент імпульсу вільної частинки є сталою величиною $\vec{L} = \text{const}$.

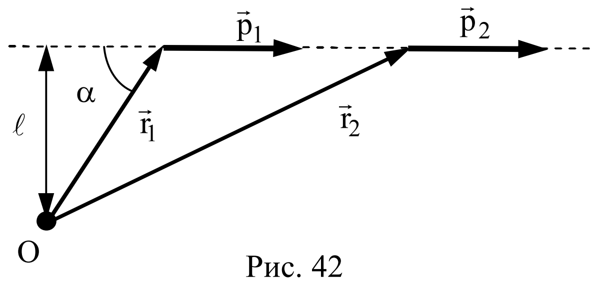

Рис. 42

Тепер продемонструємо виконання закону збереження моменту імпульсу у дуже важливому випадку руху тіла під дією сили, які співнапрямлена (чи навпаки, протилежно направлена) з його радіус-вектором $\vec{r}$. Такою, наприклад є гравітаційна сила притягання супутника (штучного, чи природного, зокрема, Місяця) до Землі, планет до Сонця або електрична сила, що діє на електрони з боку ядер в атомах. Зазначені сили називають *центральними силами*. Вираз для центральної сили можна записати у загальному вигляді

$$\vec{F} = -F(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

де знак "мінус" відповідає притяганню, $F(|\vec{r}|)$ - модуль сили, а $\vec{r}$ – радіус-вектор з точкою відліку в центрі руху (див. рис. 43).

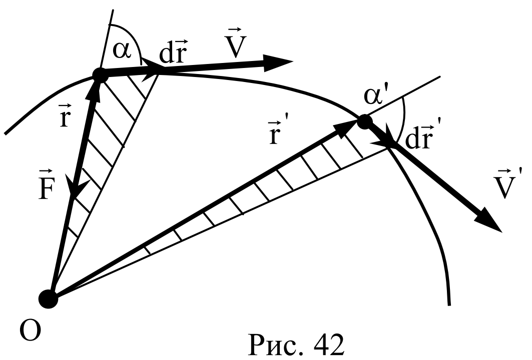

Рис. 42

Нехай точкове тіло рухається під дією сили $\vec{F}$. Момент цієї сили відносно точки О дорівнює нулю. Дійсно, вектор сили $\vec{F}$ і радіус-вектор $\vec{r}$ є колінеарними, тому їх векторний добуток

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = \left[\vec{r}\left(-F(|\vec{r}|)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\right] = -\frac{F(|\vec{r}|)}{|\vec{r}|}[\vec{r}\vec{r}] = 0.$$

Оскільки $\vec{M} = 0$, то момент імпульсу відповідного рухомого тіла буде незмінним, тобто $\vec{L} = \text{const}$, або $[\vec{r}\vec{p}] = \text{const}$.

Імпульс тіла, як завжди, визначається формулою $\vec{p} = m\vec{v}$, тому з умови збереження моменту імпульсу випливає збереження величини векторного добутку радіус-вектора на швидкість. Незмінність величини $[\vec{r}m\vec{v}] = \text{const}$ призводить до незмінності $[\vec{r}\vec{v}] = \text{const}$. Це означає, що для двох різних положень тіла на траєкторії (див. рис. 43) буде виконуватися рівність

$$[\vec{r}_1\vec{v}_1] = [\vec{r}_2\vec{v}_2].$$

Помножимо її ліву і праву частини на величину dt, яка відповідає зміні часу від моменту часу t_1 до $t_1 + dt$ та від t_2 до $t_2 + dt$:

$$[\vec{r}_1 \vec{v}_1]dt = [\vec{r}_2 v]dt .$$

Врахуємо, що $\vec{v}_1 dt = d\vec{r}$, $\vec{v}_2 dt = d\vec{r}_2$, де $d\vec{r}_1$ і $d\vec{r}_2$ – переміщення здійснені супутником за однакові проміжки часу, але в різних його положеннях (див. рис. 42). Отже, рівняння можна переписати у вигляді

$$[\vec{r}_1 d\vec{r}_1] = [\vec{r}_2 d\vec{r}_2] .$$

Ця рівність буде виконуватися і для модулів векторних добутків, тому

$$|\vec{r}_1||d\vec{r}_1|\sin\alpha_1 = |\vec{r}_2||d\vec{r}_2|\sin\alpha_2 ,$$

де α_1, α_2 – кути між векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $d\vec{r}_1$, $d\vec{r}_2$, відповідно.

Якщо помножити ліву і праву частини рівняння на 1/2,

$$\frac{1}{2}|\vec{r}_1||d\vec{r}_1|\sin\alpha_1 = \frac{1}{2}|\vec{r}_2||d\vec{r}_2|\sin\alpha_2 .$$

то видно, що вирази справа і зліва в цьому співвідношенні дорівнюють площам заштрихованих на рис. 43 трикутників (секторів). Таким чином, площі секторів, утворені радіус-векторами під час руху супутника є однаковими для двох довільних проміжків часу. Цей результат справедливий для будь-якого центрального руху – супутників, планет Сонячної системи. Для останніх це співвідношення, яке називають *законом Кеплера*, вперше отримав німецький вчений І.Кеплер, один із засновників небесної механіки.

Тепер розглянемо тверде тіло. Його обертання має задовольняти загальному рівнянню обертального руху. Воно також спирається на закон збереження моменту імпульсу, тому формально не відрізняється від відповідного рівняння для матеріальної точки, а саме:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

Коли на тверде тіло не діють інші тіла, $\vec{M} = 0$, його момент імпульсу в інерціальній системі відліку є незмінним, $\vec{L} = \mathrm{const}$.

У випадку, коли обертання відбувається навколо нерухомої фіксованої осі, яка не змінює свого напрямку і не змінює свого положення відносно тіла, то складова моменту імпульсу вздовж цієї осі пропорційна кутовій швидкості $\vec{\omega}$, $\vec{L}_Z = I\vec{\omega}$, де $\vec{L}_Z$ – складова моменту імпульсу вздовж осі обертання, яку позначено *Z*, *I* – момент інерції тіла відносно цієї осі, а кутова швидкість $\vec{\omega}$ направлена вздовж осі обертання $\vec{\omega} \uparrow\uparrow Z$.

Для твердого ізольованого тіла, яке обертається навколо нерухомої фіксованої осі, закон збереження моменту імпульсу можна набуває вигляду $\vec{L}_Z = \text{const}$, або

$$I\,\vec{\omega} = \text{const}.$$

В довільній системі відліку тверде тіло здійснює два рухи – поступальний та обертальний. В системі відліку центра мас тіла воно здійснює тільки обертальний рух і має момент імпульсу $\vec{L}_C$. Момент імпульсу, пов'язаний з поступальним рухом тіла, дорівнює моменту імпульсу його центру мас $m[\vec{r}_C\,\vec{v}_C]$, де $\vec{r}_C$ – радіус-вектор центру мас, а $\vec{v}_C$ – швидкість центру мас. Таким чином, повний момент імпульсу твердого тіла може бути представлений сумою

$$\vec{L} = \vec{L}_C + m[\vec{r}_C\,\vec{v}_C].$$

У вільного тіла, коли до нього не прикладені зовнішні сили, зберігається імпульс $m\vec{v}_C = \text{const}$. З іншої сторони, внаслідок закону збереження моменту імпульсу, у вільного абсолютно твердого тіла має бути постійним повний $\vec{L} = \text{const}$. Звідси приходимо до висновку, що у вільного тіла зберігаються обидві складові моменту імпульсу $\vec{L}_C = \text{const}$ та $m[\vec{r}_C\,\vec{v}_C] = \text{const}$.

Вісь обертання в системі центра мас задана напрямком $\vec{L}_C$ і її можна вважати фіксованою, тому закон збереження моменту імпульсу тіла можна записати у вигляді: $I\,\vec{\omega} + m[\vec{r}_C\,\vec{v}_C] = \text{const}$, де момент інерції I та кутова швидкість $\vec{\omega}$ тіла визначені відносно цієї осі.

Момент імпульсу зберігається також і для замкненої системи тіл, які взаємодіють між собою тільки завдяки внутрішнім силам. Повний момент імпульсу такої системи дорівнює сумі моментів тіл $\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j$. Відповідно часова похідна повного моменту дорівнює сумі часових похідних

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_j \vec{L}_j = \sum_j \frac{d\vec{L}_j}{dt}.$$

У замкненій системі часові похідні моменту імпульсу j-го тіла визначається моментом внутрішніх сил, що прикладені до цього тіла, $\frac{d\vec{L}_j}{dt} = \vec{M}_j$. З урахуванням цього можна записати, що

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{M}_j.$$

В пункті 4.3 було показано, що у відповідності до третього закону Ньютона, сума моментів внутрішніх сил тіл системи: $\sum_j \vec{M}_j = 0$. Отже, для замкненої системи часова похідна повного моменту імпульсу

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

звідки отримуємо, що повний момент імпульсу замкненої системи тіл стала величина,

$$\vec{L} = \text{const}.$$

Закон збереження моменту імпульсу є одним з фундаментальних законів природи і наслідком іншої властивості – його ізотропності, яка полягає в еквівалентності всіх просторових напрямків. З цієї ізотропії випливає, що при довільному повороті замкненої системи її стан не змінюється. Це, в свою чергу, означає, що виконана при цьому робота внутрішніх сил також дорівнюватиме нулеві.

Для спрощення аналізу ролі ізотропії простору розглянемо систему з двох тіл (див. рис. 44). Повернемо її відносно осі, яка проходить через точку О, на кут $d\vec{\varphi}$. При цьому тіла здійснять переміщення $d\vec{r}_1 = \left[d\vec{\varphi}\vec{r}_1\right]$ і $d\vec{r}_2 = \left[d\vec{\varphi}\vec{r}_2\right]$. Виконана обома силами робота складає суму $A = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = = \vec{F}_1\left[d\vec{\varphi}\vec{r}_1\right] + \vec{F}_2\left[d\vec{\varphi}\vec{r}_2\right]$.

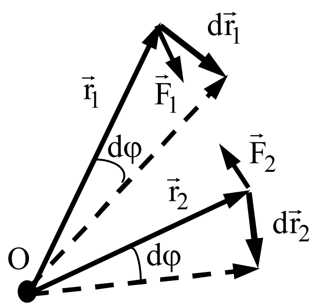

Рис. 44

Використаємо правило *векторно-скалярного* добутку векторів, яке ще називають *змішаним* добутком. Для змішаного добутку трьох векторів виконується рівність: $\vec{a}[\vec{b}\vec{c}] = \vec{b}[\vec{c}\vec{a}]$. Зазначена рівність є очевидною, бо змішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ як на ребрах.

Застосовуючи правило змішаного добутку до виразу для роботи, знайдемо

$$A = d\vec{\varphi}[\vec{F}_1\vec{r}_1] + d\vec{\varphi}[\vec{F}_2\vec{r}_2] = d\vec{\varphi}(\vec{M}_1 + \vec{M}_2).$$

Видно, що робота при повороті системи дорівнює скалярному добутку вектора кутового переміщення $d\vec{\varphi}$ на суму моментів сил. Внаслідок ізотропності простору і незмінності стану системи від її орієнтації робота обох сил має бути рівною нулю, A=0. При довільності кута $d\vec{\varphi}$, останнє можливе, лише коли нулю дорівнює сума моментів внутрішніх сил, $\vec{M}_1 + \vec{M}_2$=0. Таким чином, закон збереження моменту імпульсу для замкненої системи тіл, а також рівність нулю суми моментів внутрішніх сил такої системи, є наслідком ізотропності простору.

5..6. Механічна робота

Механічну роботу виконує сила, при переміщенні тіла. Розглянемо точкове тіло, яке протягом інтервалу часу $[t_1,t_2]$ здійснює переміщення вздовж криволінійної траєкторії (див. рис. 45). Нехай в момент часу t_1 положення рухомої точки задається радіус-вектором $\vec{r}_1$, а в момент часу t_2 – радіус-вектором $\vec{r}_2$. До тіла прикладено довільну силу $\vec{F}$, модуль і напрямок якої може змінюватися під час руху.

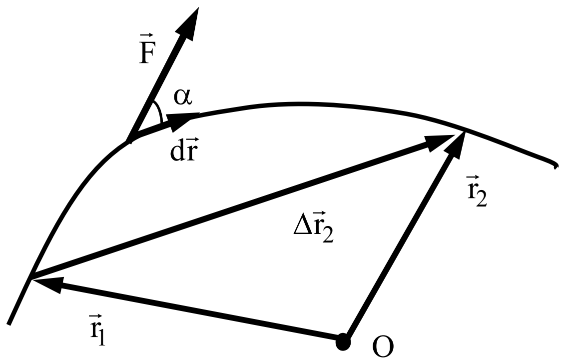

Рис. 45

Розрахуємо роботу, що виконана силою при русі тіла протягом інтервалу часу $[t_1,t_2]$. Оскільки траєкторія криволінійна а сила за припущенням не є постійною, то спочатку визначимо роботу сили при здійсненні малого переміщення $d\vec{r}$ за час dt, коли якому силу можна вважати незмінною. *Механічна робота*, що виконується силою $\vec{F}$ при малому переміщенні $d\vec{r}$, визначається скалярним добутком

$$dA = \vec{F}d\vec{r}.$$

Розкриваючи скалярний добуток, запишемо цю роботу у вигляді

$$dA = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha,$$

де α – кут між векторами сили $\vec{F}$ і переміщення $d\vec{r}$.

Врахуємо, що вектор сили та переміщення можна представити через їх проекції: $\vec{F} = F_X\vec{i} + F_Y\vec{j} + F_Z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Це дає можливість записати вираз для dA, а саме:

$$dA = F_X dx + F_Y dy + F_Z dz,$$

де скористалися рівностями $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$ та $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$ для ортів.

Робота виконана силою протягом інтервалу часу $[t_1,t_2]$ при переміщенні точки $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ дорівнює інтегралу

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dA = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r}.$$

Вираз для елементарної роботи $dA = \vec{F}d\vec{r}$ можна записати і дещо інакше, якщо врахувати, що добуток $|\vec{F}|\cos\alpha = F_\tau$, де $\vec{\tau}$ – одиничний вектор направлений по дотичній до траєкторії і співнаправлений з вектором елементарного переміщення $\vec{\tau}\uparrow\uparrow d\vec{r}$.

Отже вираз для елементарної роботи набуває вигляду:

$$dA = F_\tau dS,$$

де враховано, що величина елементарного переміщення співпадає з елементарним шляхом $|d\vec{r}| = dS$.

Таким чином, роботу можна знайти шляхом контурного інтегрування вздовж шляху проекції сили на траєкторію

$$A = \int_0^S F_\tau dS,$$

де верхня межа S інтегрування є шлях, пройдений тілом протягом часового інтервалу $[t_1,t_2]$.

Коли сила $\vec{F}$ є рівнодійною сил, тобто $\vec{F} = \sum_j \vec{F}_j$, то її робота дорівнює сумі робіт виконаних силами $\vec{F}_j$. Дійсно, легко записати

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \sum_j \vec{F}_j d\vec{r} = \sum_j \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_j d\vec{r}.$$

Оскільки інтеграли, що стоять під знаком суми визначають роботу, яка виконується кожною силою $\vec{F}_j$, то повна робота, або робота рівнодійної сили, складається з робіт, виконаних силами окремо:

$$A = \sum_j A_j,$$

де $A_j = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_j d\vec{r}$.

В СІ одиницею роботи є джоуль: [A]= Дж. Один джоуль дорівнює роботі, яку виконує постійна сила величиною 1 Н при прямолінійному переміщенні на 1 м. Отже, 1 Дж =1 Н· м.

5.6. Потужність

Потужністю називають фізичну величину, яка характеризує швидкість виконання механічної роботи. Експериментально потужність звичайно визначають наступним чином.

Нехай протягом часу Δt механічна сила виконала роботу ΔA. Тоді потужність можна визначити з відношення

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Чим меншим брати Δt, тим точнішою в часі буде величина потужності. В решті решт, коли $\Delta t \to 0$, то границя відношення стає похідною:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Оскільки елементарна робота дорівнює скалярному добутку $dA = \vec{F} d\vec{r}$, тому вираз для потужності можна записати в інший спосіб:

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

де враховано означення швидкості $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Отже, потужність дорівнює скалярному добутку сили на швидкість.

Величина скалярного добутку вектора сили на вектор швидкості дорівнює $\vec{F}\vec{v} = F_\tau v$, де F_τ – проекція вектора сили на одиничний вектор $\vec{\tau}$, направлений уздовж дотичної до траєкторії, а $v = |\vec{v}|$. Тому вираз для потужності можна записати і так:

$$N = F_\tau v.$$

Середня потужність за певний час t_0 визначається шляхом усереднення миттєвої потужності N(t), а саме:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} N(t)dt = \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \vec{F}\vec{v}dt.$$

В цьому виразі перший інтеграл дорівнює роботі $\int_0^{t_0} N(t)dt = A$, тому середня потужність дорівнює відношенню роботи до проміжку часу, за який її виконано:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t_0}.$$

Одиницею потужності в СІ є [N]=Вт (ват), 1 Вт=1Дж/с.

5.7. Потенціальна енергія

Розрахуємо роботу сили однорідного стаціонарного поля (див. п. 3.10) при переміщенні точкового тіла вздовж криволінійної траєкторії (суцільна крива на рис. 46) з точки M_1, положення якої задає радіус-вектором $\vec{r}_1$ до точки M_2, положення якої задає радіус-вектор $\vec{r}_2$. Оскільки поле сил однорідне, в кожній точці траєкторії на тіло діє постійна за напрямком і величиною сила $\vec{F}$=const. Робота виконана цією силою при русі з точки M_1 до точки M_2 дорівнює

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}\Delta\vec{r}_{12},$$

де $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ різниця радіус-векторів, яка дорівнює вектору переміщенню тіла при з його початкового положення до кінцевого. З отриманого виразу прямо випливає, що робота, яку виконує однорідне стаціонарне силове поле, не залежить від форми траєкторії і визначається лише кінцевим і початковим положеннями рухомої точки.

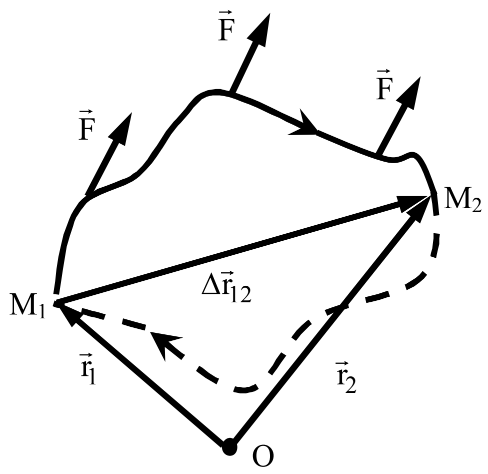

Рис. 46

Розрахуємо тепер роботу, яка виконується силовим полем при переміщенні між точками M_2 та M_1 (траєкторію цього руху на рис. 46 позначено пунктиром). Для такого переміщення маємо:

$$A_{21} = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}\Delta\vec{r}_{21},$$

де $\Delta\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Видно, що $A_{12}=-A_{21}$, бо $\Delta\vec{r}_{21} = -\Delta\vec{r}_{12}$.

Таким чином, робота при русі тіла по довільній замкненій траєкторії в однорідному стаціонарному силовому полі дорівнює нулю

$$A=A_{12}+A_{21}= A_{12}-A_{12}=0.$$

Сили, робота яких залежить тільки від початкового і кінцевого положень рухомої точки і яка не залежить від форми траєкторії, називають *консервативними* або *потенціальними* силами. Це означення також стосується і вище розглянутого прикладу однорідного стаціонарного поля.

Відповідно, стаціонарне силове поле називається *потенціальним*, коли при переміщенні точки з довільного положення 1 (рис.47) в інше, також довільне, положення 2 роботи вздовж двох різних траєкторій (наприклад, робота A_{1a2} уздовж траєкторії 1a2 і робота A_{1b2} уздовж траєкторії 1b2) виявляються рівними:

$$A_{1a2}= A_{1b2}=\int_1^2 \vec{F} d\vec{r}\ .$$

При русі з положення 2 до положення 1 вздовж траєкторії 2b1 робота при зворотному напрямку A_{2b1} і робота руху в прямому напрямку A_{1b2} зв'язані співвідношенням $A_{2b1}=-A_{1b2}$. Звідси легко отримати, що робота вздовж замкненої траєкторії *L* (на рис. 47 це траєкторія 1a2b1) дорівнює нулю:

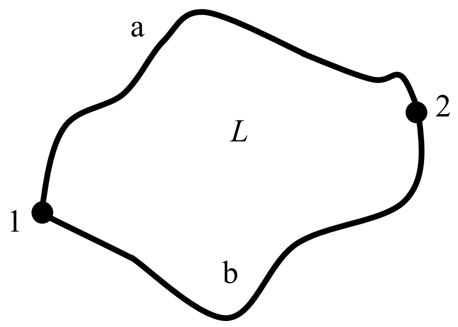

Рис. 47

$$A_{1a2b1}= A_{1a2} + A_{2b1}= A_{1a2} - A_{1b2}=0.$$

Робота вздовж замкненого контуру *L* може бути записана також у вигляді інтегралу

$$\oint\limits_{(L)} \vec{F}\, d\vec{r} = 0,$$

де символ $\oint\limits_{(L)}$ позначає, що інтегрування здійснюється по замкненому контуру *L*. Такі контурні інтеграли від вектора називаються *циркуляцією* вектора. Отже циркуляція вектора потенціальної сили $\vec{F}$, або циркуляція вектора сили $\vec{F}$ потенціального поля, для довільного контуру дорівнює нулеві.

Потенціальні силові поля прийнято характеризувати фізичною величиною, яка називається *потенціальною* енергією. Визначимо її, для чого виберемо точку початку відліку. Це може бути довільна точка простору, яка на рис. 48 позначена буквою О.

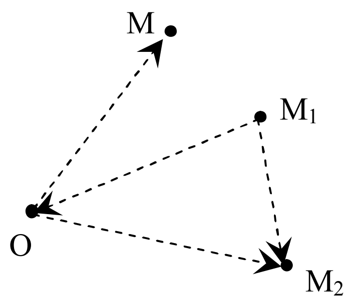

Рис. 48

При переході від точки О до іншої довільної точки М силове поле виконує роботу. Таке переміщення може здійснюватися за довільною траєкторією, тому його на рис. 48 позначено пунктиром. Сформулюємо означення: *потенціальна енергія* U силового поля в точці М дорівнює взятій з від'ємним знаком роботі А поля при переміщенні тіла з точки О до точки М: U=–A. Видно, що тим самим величина потенціальної енергії є залежною від положення точки М. Тому в загальному випадку потенціальна енергія тіла є функцією координат його положення: $U=U(\vec{r})=U(x,y,z)$.

Визначимо тепер роботу при переміщенні тіла з точки M_1 до точки M_2 (див. рис. 48). Врахуємо, що величина роботи потенціального поля не залежить від форми траєкторії. Тому при переміщенні тіла з точки M_1 до точки M_2 роботу зручно розрахувати як суму робіт поля при переміщеннях тіла спочатку з точки M_1 до точки О, а потім – з точки О до точки M_2. Згадуючи означення потенціальної енергії маємо, можемо записати, що робота є різницею потенціальних енергій початкового і кінцевого положень тіла:

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

де A_{12} – робота поля при переміщенні тіла з точки M_1 до точки M_2, U_1 – потенціальна енергія тіла в точці M_1, а U_2 – потенціальна енергія тіла в точці M_2.

З іншого боку, вираз для роботи можна переписати у вигляді

$$A_{12} = -(U_2 - U_1),$$

з якого видно, що робота консервативної сили є нічим іншим, ніж зміна потенціальної енергії, що взята з протилежним знаком.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, називають *неконсервативними*. Наприклад, таким є сили тертя ковзання, сили в’язкого тертя, або сила Лоренца, з якою магнітне поле на рухому заряджену частинку. Але ці сили, хоча вони і консервативні, відрізняються між собою. Сили тертя призводять до втрат енергії руху тіла, а сила Лоренца тільки змінює напрямок руху тіла і не змінює його кінетичної енергії. Тому сили тертя називають *дисипативними* силами, а сили подібні, до сили Лоренца, називають *гіроскопічними* силами.

В СІ потенціальну енергію вимірюють в одиницях [U]=Дж.

5.8. Зв'язок між потенціальною енергією та силою

Візьмемо дві довільні точки M_1 та M_2 (Рис. 49), положення яких задають радіус-вектор $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, та $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, де x_1, y_1, z_1 та x_2, y_2, z_2 – координати точок M_1 та M_2, відповідно. Потенціальна енергія точкового тіла в точці M_1 залежить від координат цієї точки $U_1 = U(\vec{r}_1)$. Потенціальна енергія точки M_2 дорівнює $U_2 = U(\vec{r}_2)$. Положення точки M_2 відносно точки M_1 задає вектор $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проекції якого дорівнюють різниці координат $\Delta\vec{r}_{12} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$, де $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$.

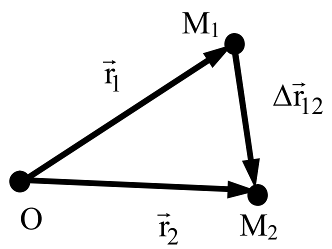

Рис. 49

Розрахуємо роботу силового поля при переміщенні тіла з точки M_1 до точки M_2. Будемо вважати, що точки M_1 та M_2 розташовані поряд, а відстань між ними є достатньо малою, коли можна припустити, що вектори сил в цих точках майже однакові, тобто $\vec{F}(\vec{r}_1) \approx \vec{F}(\vec{r}_2)$. Іншими словами, припустимо, що точка M_2 знаходиться в околиці точки M_1, а коли силове поле є майже однорідним. В цьому випадку робота при переміщенні тіла з точки M_1 до точки M_2 дорівнює

$$\Delta A_{12} = \vec{F}\Delta\vec{r}_{12} = F_X\Delta x + F_Y\Delta y + F_Z\Delta z.$$

З іншого боку, величина цієї роботи дорівнює зміні потенціальної енергії, взятій з протилежним знаком, або

$$\Delta A_{12} = -\Delta U = -(U_2 - U_1) = -(U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)).$$

Різницю потенціальних енергій можна записати наступним чином

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_{12}) - U(\vec{r}_1).$$

Врахуємо, що потенціальна енергія є неперервною функція трьох змінних, якими є координати x, y, z. Це дозволяє різницю енергій записати, використовуючи частинні похідні:

$$U(\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_{12}) - U(\vec{r}_1) =$$

$$= U(x_1, y_1, z_1) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta x + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta y + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta z - U(x_1, y_1, z_1) =$$

$$= \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta x + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta y + \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{x_1,y_1,z_1} \Delta z.$$

де $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x_1,y_1,z_1}$, $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{x_1,y_1,z_1}$, $\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{x_1,y_1,z_1}$ – частинні похідні функції U визначені в точці M_1. Ця точка є довільною, тому далі будемо опускати індекс "1" у координат при записі частинних похідних. З використанням цих співвідношень вираз для роботи набуває вигляду

$$\Delta A_{12} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right).$$

Тепер порівняємо праві частини виразів для роботи, коли робота визначена через силу і дорівнює зміні потенціальної енергії. Тоді маємо співвідношення:

$$F_X \Delta x + F_Y \Delta y + F_Z \Delta z = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z\right),$$

де вважається, що $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$.

Отримане співвідношення виконується для двох довільних, але близько розташованих одна від іншої точок простору. З цієї рівності для роботи випливають рівності між проекціями сили і частинними похідними потенціальної енергії, або

$$F_X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Звідси маємо висновок, що вектор сили можна представити наступним чином:

$$\vec{F} = F_X\vec{i} + F_Y\vec{j} + F_Z\vec{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right).$$

В математиці вектор, проекції якого вздовж координатних осей визначаються похідними скалярної функції, називають *градієнтом* цієї функції.

Отже, потенціальна є градієнт потенціальної енергії, що взятий з протилежним знаком, а саме:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U,$$

де диференціальна операція обчислення градієнту позначена символом "grad", причому, за загальноприйнятим означенням, градієнтом є вектор

$$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Розглянемо приклад однорідного стаціонарного силового поля. Вісь Z направимо вздовж вектора сили, що діє на тіло зі сторони поля. В цій системі координат ненульовою буде тільки одна проекція сили, тобто

$$F_X = F_Y = 0, \quad F_Z = F,$$

де $F = \left|\vec{F}\right|$. В обраній системі координат частинні похідні потенціальної енергії дорівнюють $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial z} = -F$. Легко перевірити, що цим диференціальним співвідношенням задовольняє потенціальна енергія, величина якої лінійно залежить від z

$$U(z) = -Fz + C_U,$$

де C_U – довільна константа, яка формально визначається величиною U(0).

Бачимо, що потенціальна енергія визначена з точністю до довільної сталої C_U. Ця невизначеність пов’язана з тим, що фізичний зміст має лише зміна потенціальної енергії, яка пов’язана з роботою. Часто у випадку однорідного поля константу C_U приймають рівною нулю, тобто вважається, що в точці початку відліку потенціальна U(0)=0. Наприклад, потенціальну енергію однорідного поля сили тяжіння записують у вигляді $U(h) = mgh$, де h – висота, на якій знаходиться тіло відносно поверхні Землі.

Вираз для потенціальної енергії тіла в однорідному силовому полі можна також записати у векторній формі

$$U(\vec{r}) = -\vec{F}\vec{r} + C_U,$$

де $\vec{F}$ – вектор сили, а $\vec{r}$ – радіус-вектор. Легко переконатися, що у випадку, коли координатна вісь Z направлена вздовж вектора сили, то цей вираз для енергії буде співпадати з її попереднім виразом, що залежав лише від координати z.

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох тіл, маси яких m_1 і m_2 визначається за формулою

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r},$$

де G – гравітаційна стала, r – відстань між тілами, які прийняті точковими. Бачимо, що в цьому випадку константа C_U прийнята рівною нулеві. Таке її значення задовольняє умові рівності нулеві енергії гравітаційної взаємодії, коли тіла нескінченно віддалені одне від другого, тобто $r = \infty$.