5.9. Кінетична енергія точкового тіла

Кінетична енергія точкового тіла маси m визначається за формулою

$$E_{кін} = \frac{mv^2}{2},$$

де m – маса тіла, а v – модуль його швидкості $v = |\vec{v}|$.

Кінетичну енергію можна визначити через імпульс тіла, якщо записати $\vec{p} = m\vec{v}$, звідки $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$. Підставимо цей вираз у формулу для кінетичної енергії:

$$E_{кін} = \frac{p^2}{2m}.$$

Отже, кінетична енергія точкового тіла прямо пропорційна квадрату його імпульсу.

Тепер розглянемо довільне точкове тіло, яке рухається під дією сили $\vec{F}$. Запишемо рівняння руху тіла (другий закон Ньютона)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}.$$

Помножимо скалярно це рівняння на вектор швидкості

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\vec{F},$$

і врахуємо, що

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}.$$

При цьому скалярний добуток сили $\vec{F}$ на швидкість $\vec{v}$ є миттєвою потужністю N, яка дорівнює $N = \frac{dA}{dt}$. Тому маємо рівність

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{v},$$

яку ми вже записували раніше.

З урахуванням цих співвідношень приходимо до рівняння для похідних:

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} = \frac{dA}{dt}.$$

Якщо це рівняння переписати у спосіб

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} - A\right) = 0,$$

то видно, що оскільки воно виконується для довільних моментів часу, вираз під знаком похідної не залежить від часу, тобто

$$\frac{mv^2}{2} - A = C_{кін},$$

де $C_{кін}$ – довільна константа. Для її визначення врахуємо, що у початковий момент часу робота дорівнює нулю, а швидкість дорівнює $\vec{v}_0$, тому константа $C_{кін}$ дорівнює $C_{кін} = \frac{mv_0^2}{2}$. Використовуючи це значення константи отримаємо формулу зв'язку між кінетичною енергією і роботою сили

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

В лівій частині цього виразу стоїть зміна кінетичної енергії, а справа робота сили, завдяки дії якої і відбулася ця зміна. Отже, приріст кінетичної енергії тіла, яке рухається під дією сили, дорівнює роботі, виконаній цією силою. Зрозуміло, що цей приріст може бути як позитивним, так і від'ємним.

В СІ кінетичну енергію вимірюють у $[E_{кін}]$ = Дж.

5.10. Кінетична енергія обертального руху твердого тіла

При обертальному русі точки тіла, як відомо, мають різні за величиною та напрямком швидкості. Визначимо кінетичну енергію обертального руху твердого тіла, яке обертається навколо фіксованої осі OO' (рис. 50). Орієнтація осі і її положення відносно тіла не змінюються. Будемо розглядати тільки обертальний рух тіла. Розіб'ємо, як завжди, тіло на маленькі ділянки масою Δm_j (рис. 50), коли кожну ділянку можна вважати матеріальною точкою, а її кінетичну енергію розрахуємо за формулою

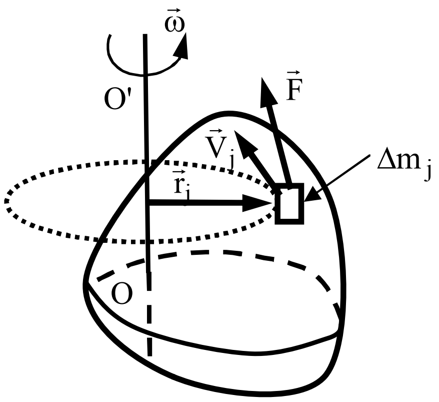

Рис. 50

$$E_{кін}^{(j)} = \frac{\Delta m_j v_j^2}{2},$$

де v_j – модуль вектора $\vec{v}_j$ швидкості j-ої ділянки тіла.

При обертанні навколо осі OO' траєкторіями точок тіла є кола, а вектор швидкості $\vec{v}_j$ направлений по дотичній до цих кіл. Модуль швидкості точки тіла $v_j = \omega r_j$, де ω –

модуль кутової швидкості обертального руху тіла, а r_j – радіус колової траєкторії j-ої ділянки тіла. З урахуванням цих означень кінетичну енергію ділянки тіла при обертанні тіла навколо фіксованої осі запишемо у вигляді

$$E_{кін}^{(j)} = \frac{\Delta m_j \omega^2 r_j^2}{2}.$$

Повна кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичних енергій його ділянок

$$E_{кін} = \sum_j E_{кін}^{(j)},$$

або

$$E_{кін} = \sum_j \frac{\Delta m_j \omega^2 r_j^2}{2}.$$

Кутова швидкість направлена вздовж осі обертання і однакова для всіх точок тіла, тому її можна винести з під знаку суми, записавши

$$E_{кін} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_j \Delta m_j r_j^2 .$$

Сума, що стоїть в останній формулі є моментом інерції тіла $I = \sum_j \Delta m_j r_j^2$, визначеним відносно цієї осі. З урахуванням цього запишемо формулу для кінетичної енергія тіла, що обертається:

$$E_{кін} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Таким чином, видно, що кінетична енергія тіла що обертається, подібна до кінетичної енергії тіла, що рухається поступально; при цьому, як і раніше, існує певна аналогія між масою та моментом інерції, а також швидкістю поступального руху і кутовою швидкістю.

Прикладемо до тіла силу $\vec{F}$, дія якої спричиняє зміну кутової швидкості. Внаслідок дії сили тіло набуває кутового прискорення, яке визначається з рівняння обертального руху

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M},$$

де $\vec{M}$ - проекція моменту сил на вісь OO', або на вектор $\vec{\omega}$.

Помножимо скалярно ліву і праву частини рівняння обертального руху на вектор кутової швидкості:

$$I\vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega}\vec{M}.$$

Скалярний добуток вектора кутової швидкості на вектор її похідної можна переписати у вигляді (дивись пункт 5.9)

$$\vec{\omega}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{\omega}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt}.$$

Як було показано у параграфі 4.4 складова моменту сили на вісь дорівнює векторному добутку $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}_\tau]$, де вектор $\vec{r}$ характеризує положення точки прикладання сили відносно осі, а $\vec{F}_\tau$ – тангенціальна складова сили на напрямок обертального руху її точки прикладання. Отже, маємо, що скалярний добуток кутової швидкості на проекцію моменту сили дорівнює векторно-скалярному (змішаному) добутку векторів

$$\vec{\omega}\vec{M} = \vec{\omega}[\vec{r}\vec{F}_\tau].$$

Застосуємо правило змішаного добутку векторів (див. параграф 4.4) і перепишемо добуток в правій частині рівності, переставляючи вектори:

$$\vec{\omega}\vec{M} = \vec{F}_\tau[\vec{\omega}\vec{r}].$$

Врахуємо, що $[\vec{\omega}\vec{r}] = \vec{v}$, де швидкість обертального руху точки прикладання сили, радіус-вектор якої $\vec{r}$, тому $\vec{F}_\tau[\vec{\omega}\vec{r}] = \vec{F}_\tau\vec{v}$. Тепер можемо записати:

$$\vec{\omega}\vec{M} = \vec{F}_\tau\vec{v}.$$

Згадуючи означення потужності $N = \vec{F}_\tau\vec{V}$, знаходимо, що також

$$\vec{\omega}\vec{M} = N,$$

або

$$\vec{\omega}\vec{M} = \frac{dA}{dt},$$

де A – робота.

З урахуванням всіх виконаних перетворень отримаємо диференційне рівняння

$$I\frac{1}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{dA}{dt},$$

для приросту кінетичної енергії обертального руху, яке перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2} - A\right) = 0.$$

Це рівняння також виконується для всіх моментів часу, тому вираз, що стоїть під знаком похідної, не залежить від часу, тобто

$$\frac{I\omega^2}{2} - A = C_{кін},$$

де $C_{кін}$ – довільна константа. Для її визначення врахуємо, що у початковий момент часу робота дорівнює нулю, а кутова швидкість дорівнює $\vec{\omega}_0$, тому константа $C_{кін}$ дорівнює $C_{кін} = \dfrac{I_o \omega_o^2}{2}$. Використовуючи це значення константи запишемо

$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_o^2}{2} = A .$$

Отже, зміна кінетичної енергії тіла, що обертається навколо фіксованої осі під дією сили, визначається роботою, яка виконана цією силою.

5.11. Кінетична енергія твердого тіла при довільному русі

Кінетична енергія тіла при довільному русі дорівнює сумі кінетичних енергій його точок

$$E_{кін} = \sum_j \frac{\Delta m_j v_j^2}{2},$$

де Δm_j– маса j-ої ділянки тіла, швидкість якої $\vec{v}_j$.

Рух тіла, як ми говорили, можна представити сумою поступального та обертального рухів. При цьому швидкість довільної точки тіла дорівнює сумі швидкостей

$$\vec{v}_j = \vec{v}_п + \vec{v}_{об}^{(j)},$$

де $\vec{v}_п$– швидкість поступального руху тіла, яка визначена в лабораторній системі координат, а $\vec{v}_{об}^{(j)}$ – швидкість обертального руху j-ої точки тіла, яка визначена в рухомій системі координат. Швидкість поступального руху однакова для всіх точок тіла, а швидкість обертального руху у точок тіла різна.

Тепер кінетична енергія тіла має вигляд:

$$E_{кін} = \sum_j \frac{\Delta m_j (\vec{v}_п + \vec{v}_{об}^{(j)})^2}{2}.$$

Розкриємо вираз у дужках

$$E_{кін} = \sum_j \frac{\Delta m_j [\vec{v}_п^2 + 2\vec{v}_п \vec{v}_{об}^{(j)} + (\vec{v}_{об}^{(j)})^2]}{2} =$$

$$= \sum_j \frac{\Delta m_j v_п^2}{2} + \sum_j \Delta m_j \vec{v}_п \vec{v}_{об}^{(j)} + \sum_j \frac{\Delta m_j (v_{об}^{(j)})^2}{2}.$$

Перша сума в цьому виразі

$$\sum_j \frac{\Delta m_j v_п^2}{2} = \frac{m v_п^2}{2}.$$

є кінетичною енергією поступального руху тіла.

Друга сума може бути записана у вигляді:

$$\sum_j \Delta m_j \vec{v}_п \vec{v}_{об}^{(j)} = \vec{v}_п \sum_j \Delta m_j \vec{v}_{об}^{(j)} = \vec{v}_п \vec{P},$$

де $\vec{P}$ – імпульс тіла, визначений у системі відліку, в якій відбувається обертальний рух: $\vec{P} = \sum_j \Delta m_j \vec{v}_{об}^{(j)}$.

Третя сума є кінетичною енергією обертального руху тіла. У випадку, коли вісь фіксована (див. параграф 5.10), її напрямок не змінюється, і незмінним є положення осі відносно тіла, то кінетичну енергію обертального руху можна записати через кутову швидкість

$$\sum_j \frac{\Delta m_j (v_{об}^{(j)})^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2},$$

де I - момент інерції, визначений вздовж осі обертання, а ω – кутова швидкість.

Таким чином, кінетична енергія тіла в лабораторній системі координат складається з кінетичної енергії поступального руху тіла, скалярного добутку поступального руху на імпульс тіла та кінетичної енергії обертального руху

$$E_{кін} = \frac{m v_п^2}{2} + \vec{v}_п \vec{P} + \frac{I \omega^2}{2}.$$

У випадку, коли фіксована вісь обертання проходить через центр мас тіла, то, як ми бачили, імпульс тіла $\vec{P} = 0$. Тоді вираз для кінетичної енергії тіла в лабораторній системі координат спрощується і містить лише два доданки

$$E_{кін} = \frac{m v_п^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2},$$

які є кінетичними енергіями двох складових повного руху – поступального та обертального рухів. Проте треба пам’ятати, що в цьому виразі момент інерції визначено відносно осі, що проходить через центр мас тіла.

5.12. Закон збереження механічної енергії

Розглянемо тіло, яке знаходиться в потенціальному силовому полі. При русі тіла в силовому полі внаслідок дії останнього змінюється кінетична енергія тіла. Робота поля при цьому дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$A = E_{кін}^{(2)} - E_{кін}^{(1)},$$

де A – робота, яку виконує силове поле, а $E_{кін}^{(1)}$ і $E_{кін}^{(2)}$ – кінетичні енергії в початковому та кінцевому положеннях тіла, відповідно.

З іншого боку, виконана полем робота дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятій з протилежним знаком:

$$A = -(U_2 - U_1),$$

де U_1 та U_2 – потенціальні енергії тіла в початковому та кінцевому положеннях.

Прирівняємо праві частини наведених виразів для роботи, що дає рівняння

$$E_{кін}^{(2)} - E_{кін}^{(1)} = -(U_2 - U_1),$$

яке легко перетворити до вигляду

$$E_{кін}^{(1)} + U_1 = E_{кін}^{(2)} + U_2.$$

Звідки отримуємо важливий висновок, що сума кінетичної та потенціальної енергій тіла у початковому положенні, дорівнює сумі цих енергій у його кінцевому положенні. У цій рівності початкове та кінцеве положення тіла не фіксовані певними точками на траєкторії руху, тому ця рівність виконується для будь-яких положень тіла.

Таким чином, сума кінетичної та потенціальної енергій тіла під час його руху в потенціальному силовому полі не змінюється:

$$E_{кін} + U = const.$$

Суму кінетичної та потенціальної енергій тіла називають *повною механічною енергією* тіла, а отриману рівність називають *законом збереження механічної енергії*.

Коли на тіло діють дисипативні сили, то закон збереження механічної енергії не виконується. Робота рівнодійної дисипативних сил дорівнює різниці повної механічної енергії в початковому і кінцевих станах

$$A_{дис} = E_{кін}^{(1)} + U_1 - (E_{кін}^{(2)} + U_2),$$

де $A_{дис}$ – робота рівнодійної дисипативних сил, а перша і друга сума у виразі справа є повною механічною енергією тіла в початковому і кінцевому станах відповідно.

Тепер розглянемо замкнену систему двох точкових тіл, які взаємодіють між собою консервативними силами. Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій обох тіл:

$$E_{кін} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

де v_1 і v_2 – модулі векторів швидкостей першого та другого тіла, а m_1 та m_2 – маси тіл (рис. 51). Взаємодія між частинками призводить до зміни величини їх кінетичних енергій, тому в наступний довільний момент часу повна кінетична енергія системи дорівнює

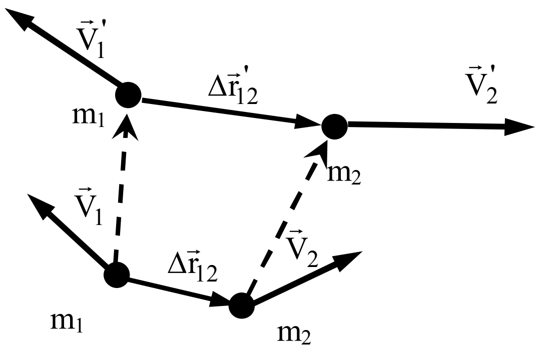

Рис. 51

$$E_{кін}' = \frac{m_1 (v_1')^2}{2} + \frac{m_2 (v_2')^2}{2}.$$

Зміна кінетичної енергії системи визвана роботою, що виконують сили взаємодії між тілами,

$$A = E_{кін}' - E_{кін}.$$

Ця робота, як ми знаємо, дорівнює зміні потенціальної енергії взаємодії між тілами

$$A = -(U' - U),$$

де U та U' – потенціальна енергія взаємодії тіл в початковому та кінцевому станах.

Величина потенціальної енергії взаємодії між тілами залежить від їх взаємного розташування. Якщо початкове положення першого тіла визначається радіус-вектором $\vec{r}_1$, а другого – $\vec{r}_2$, то потенціальна енергія взаємодії між тілами залежить від величини відстані між тілами, тобто від модуля вектора $\Delta\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Звідси отримаємо, що потенціальна енергія початкового стану дорівнює $U = U(|\Delta\vec{r}_{12}|)$. В кінцевому стані тіла характеризують радіус-вектори $\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$, а їх взаємне положення вектор $\Delta\vec{r}_{12}' = \vec{r}_1' - \vec{r}_2'$,. Тому в кінцевому стані потенціальна енергія взаємодії між тілами дорівнює $U' = U(|\Delta\vec{r}_{12}'|)$.

Отже, величину роботи можна записати у вигляді

$$A = -[U(|\Delta\vec{r}_{12}'|) - U(|\Delta\vec{r}_{12}|)].$$

З порівняння правих частин виразів для роботи знаходимо, що постійною є сума кінетичної енергії системи тіл та потенціальної енергії взаємодії між ними, або

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(|\Delta\vec{r}_{12}|) = \text{const}.$$

Коли така система двох точкових тіл не є замкненою, а знаходиться в потенціальному силовому полі, то вираз для закону збереження енергії набуває вигляду

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(|\Delta\vec{r}_{12}|) + U(\vec{r}_1) + U(\vec{r}_2) = \text{const},$$

де врахована потенціальна енергія тіл у зовнішньому силовому полі.

У випадку довільної системи тіл, які взаємодіють між собою консервативними силами і знаходяться в зовнішньому потенціальному силовому полі, вираз для закону збереження легко записати у формі

$$\sum_j \frac{m_j v_j^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_j \sum_{k,(k\neq j)} U(|\Delta\vec{r}_{jk}|) + \sum_j U(\vec{r}_j) = \text{const},$$

де перша сума є кінетична енергія системи тіл, друга (подвійна) сума є потенціальною енергію взаємодії між тілами, де враховано парний характер взаємодії між тілами, а третя сума є потенціальною енергією тіл системи у зовнішньому силовому полі. Перед подвійною сумою стоїть 1/2, бо такий простий формальний запис потенціальної енергії призводить до того що кожна пара тіл jk та kj входять двічі. Представлення повної механічної енергії системи у вигляді трьох таких сум по числу тіл в системі означає, що повна механічна енергія системи тіл є адитивною фізичною величиною.

Зробимо декілька важливих зауважень. Оскільки кінетична енергія не залежить від положення тіл, а потенціальна енергія взаємодії між тілами залежить від взаємної відстані між ними, то при переміщенні замкненої системи, як ціле, чи при її поворотах в просторі, зміни стану системи не буде і повна енергія замкненої системи не зміниться. Тобто енергія є інваріантною величиною щодо переміщень в просторі чи поворотів в ньому. Це є наслідками однорідності та ізотропності простору.

Повна енергія замкненої системи, як видно, не змінює своєї величини при зміні знаку часу $t \to -t$. За визначенням швидкість дорівнює $\vec{v} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Тому зміна знаку часу приведе до зміни знаку знаменника і, в свою чергу, до зміни на протилежний вектора швидкості. При зміні часу на протилежний система набуває зворотної еволюції (від кінцевого стану до початкового). При цьому кінетична енергія, яка містить квадрат швидкості залишається незмінною. Потенціальна енергія взагалі не залежить від часу і не може змінюватися при будь-якій еволюції системи. Таким чином, закон збереження механічної енергії пов’язаний з можливістю еволюції механічної системи як у прямому, так і зворотному напрямках.

У випадку дії дисипативних сил, якими є сили опору руху, що направлені протилежно до швидкості тіла, закон збереження механічної енергії не виконується. Тепер без втручання зовнішніх тіл еволюція замкненої системи в зворотному напрямку неможлива. Це пов'язано з тим, що при дії дисипативних сил відбувається перетворення механічної енергії в інші види енергії, наприклад, у внутрішню теплову енергію. Такі процеси незворотні. При дисипативних процесах механічна енергія не зберігається, але зберігається повна енергія системи, яка включає механічну енергію, внутрішню енергію системи тощо. Закон збереження повної енергії системи, є фундаментальним законом природи і виконується, в тому числі, і для дисипативних процесів.

5.13. Границі руху

Коли траєкторією руху є фіксована крива і рух тіла описується тільки однією змінною (має лише одну ступінь вільності), то такий рух називають *одновимірним*. Для опису одновимірного руху достатньо однієї координати, якою може бути, наприклад, відстань вздовж кривої руху.

Розглянемо точкове тіло, що здійснює одновимірний рух в потенціальному силовому полі, яке описується потенціальною енергією U=U(x), де x – координата тіла. У випадку, коли тіло рухається по прямій, з формули зв'язку між силою та потенціальною енергією $\vec{F} = -\mathrm{grad}U$ знаходимо, що прикладена до тіла сила дорівнює $F = -\frac{dU}{dx}$. Відповідно до другого закону Ньютона запишемо динамічне рівняння руху

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{dU}{dx}.$$

Продиференціюємо швидкість як складну функцію $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx}$, де враховано, що $\frac{dx}{dt} = v$.

Тепер рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dx} = -\frac{dU}{dx}.$$

Перенесемо похідні та внесемо постійні під знак похідної, отримаємо диференційне рівняння

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{mv^2}{2} + U\right) = 0.$$

Бачимо, що в дужках стоїть сума кінетичної енергії та потенціальної енергії тіла. Оскільки похідна дорівнює нулю, то сума цих енергій не змінюється з часом. Таким чином, з розв'язку рівняння руху отримано вираз для закону збереження механічної енергії, за яким повна механічна енергія є незмінною від координати

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x) = const .$$

Величина кінетичної енергії завжди додатна, тому при русі тіла повна механічна енергія завжди більша потенціальної енергії E>U(x). Отже рух тіла можливий тільки на тих ділянках, де U(x)<E.

Нехай, наприклад, залежність U(x) має вигляд наведений на рис. 52. Тіло має повну механічну енергію E, їй на рис. 52 відповідає горизонтальна пряма. Рух тіла для такого значення енергії може відбуватися в області обмеженій координатами x_1, x_2 та справа від x_3. В точках x_1, x_2, x_3 повна енергія дорівнює потенціальній енергії. Оскільки швидкість тіла дорівнює

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)},$$

то в цих точках швидкість тіла стає рівною нулю, і їх називають *точками зупинки*. Якщо рух тіла відбувається між двома точками зупинки (на рис. 52 між x_1, x_2), то такий рух називають *фінітним*, тобто обмеженим в просторі. Коли область руху не обмежена, чи обмежена тільки з одного боку (на рис. 52 справа від x_3), то рух називають *інфінітним,* в цьому випадку тіло може рухатись до $x \to \infty$.

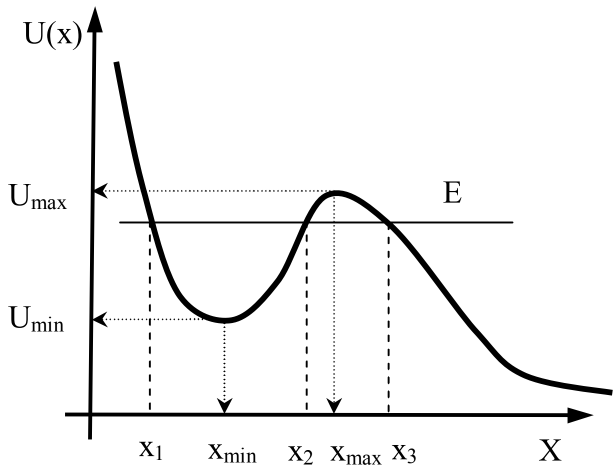

Рис. 52

Одновимірний фінітний рух є коливальним рухом. В цьому випадку рух є періодичним, бо воно рухається між двома точками x_1 та x_2, а час руху тіла з точки x_1 до точки x_2 буде дорівнювати часу руху тіла з точки x_2 до точки x_1.

Сила, з якою поле діє на тіло, дорівнює $F = -\frac{dU}{dx}$. Бачимо, що на ділянці від точки мінімуму потенціальної енергії x_{min} до точки її максимуму x_{max}, коли U(x) є зростаючою, похідна $\frac{dU}{dx} > 0$, а проекція сили на вісь OX від'ємна і направлена до точки мінімуму. Зліва від точки мінімуму та справа від точки максимуму потенціальна енергія є спадаючою функцією від x, тому в цих областях сила додатна.

В точках x_{min} та x_{max} похідні потенціальної енергії дорівнюють нулю, і сила, що діє на тіло, також є нульовою. При відхиленні положення тіла від точки x_{min} виникає сила, яка прагне повернути його до початкового стану. Отже, точка x_{min}, в якій потенціальна енергія є мінімальною, є положенням *стійкої рівноваги* тіла. Навпаки, точка x_{max}, в якій потенціальна енергія максимальна, U_{max}, є положенням *нестійкої рівноваги.* При відхиленні тіла від цієї точки виникають сили, які сприяють подальшому руху тіла від точки x_{max}.

5.14. Кочення циліндра по похилій площині

Розглянемо важливий приклад і, користуючись законом збереження енергії, розрахуємо швидкість тонкостінного циліндра, якої він набуває при коченні по похилій площині (рис. 53). Будемо вважати, що циліндр рухається без ковзання. Позначимо α кут між площиною і горизонтальною поверхнею. Циліндр починає рухатися з висоти h (висоту на рис. 53 визначаємо відносно положення центру мас циліндру). Початкова швидкість циліндра дорівнює нулю і сила тяжіння примушує його рухатися вниз. Маса циліндру m, а радіус r. Рух циліндра зручно представити сумою поступального руху його центру мас, який знаходиться на осі циліндра, і обертального руху відносно цієї осі.

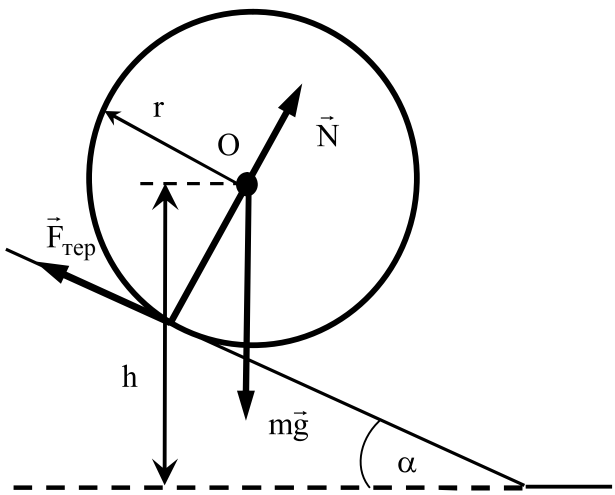

Рис. 53

На циліндр діють сила тяжіння $m\vec{g}$, реакція опори $\vec{N}$ та сила тертя $\vec{F}_{тер}$. Сила реакції опори перпендикулярна до швидкості центру мас циліндру і не впливає на його обертальний рух навколо осі. Тому момент цієї сили відносно осі циліндру дорівнює нулю. Робота сили $\vec{N}$ з цих причин також дорівнює нулю і не змінює енергії циліндру.

Сила тертя спокою теж не виконує роботи, бо під дією цієї сили не відбувається поступального руху точки дотику циліндру відносно площини. Отже миттєва потужність сили $\vec{F}_{тер}$ в нерухомій системі відліку, що пов'язана з площиною, дорівнює нулю.

При русі циліндра без ковзання роботу виконує тільки сила тяжіння, яка є консервативною і робота якої не залежить від виду траєкторії. Додамо, нарешті, що крім сили тертя спокою, всіма іншими силами опору руху ми нехтуємо.

Отже, при русі циліндру по похилій площині за сформульованих умов виконується закон збереження енергії. Сума потенціальної та кінетичної енергій циліндра в нерухомій системі відліку є незмінною

$$E_{кін} + U = const .$$

При цьому кінетична енергія $E_{кін}$ циліндру дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху центру мас та кінетичної енергії обертального руху, так що

$$E_{кін} = \frac{m v^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2},$$

де v – швидкість центру мас, а ω – кутова швидкість. При русі без ковзання швидкість центру мас дорівнює швидкості обертального руху v=ωr, тому у виразі для кінетичної енергії обертання замість кутової швидкості зручно підставити відношення $\omega = \frac{v}{r}$. Треба врахувати також, що для тонкостінного циліндру момент інерції дорівнює I=mr^2.

З використанням цих співвідношень отримаємо, що кінетична енергія циліндру дорівнює

$$E_{кін} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\frac{v^2}{r^2} = m v^2 .$$

В початковому положенні циліндр не рухається і має тільки потенціальну енергію $U = mgh$. В той же час при русі по горизонтальній ділянці циліндр має потенціальну енергію $U = mgr$, бо його центр мас знаходиться на висоті h=r. Тепер же з закону збереження енергії маємо рівняння

$$mgh = mgr + mv^2,$$

з якого знайдемо швидкість руху циліндру на горизонтальній ділянці

$$v = \sqrt{g(h - R)} .$$

Такий вираз для швидкості можна отримати і з розв'язку рівнянь руху для циліндра (див. параграф 4.9).