6. Сили інерції

6.1. Сили інерції при поступальному русі неінерціальної системи

Покажемо, як опис руху тіла залежить від системи відліку, відносно якої воно рухається. Для цього розглянемо тіло масою m, що в інерціальній системі відліку має прискорення $\vec{a}$. У відповідності до принципу відносності Галілея це тіло буде рухатися з тим же самим прискоренням $\vec{a}$ і в усіх інших інерціальних системах відліку. Як ми знаємо, рух тіла в інерціальних системах описується рівнянням руху, яке за другим законом Ньютона має вигляд

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

де $\vec{F}$ – сила, що призводить до прискореного руху тіла.

Проте в деяких випадках виникає потреба опису руху тіл, або їх взаємодії одне з одним в системі відліку, що сама рухається з прискоренням. Іншою мовою необхідно визначити рух тіл в неінерціальній системі відліку, коли другий закон Ньютона формально не виконується.

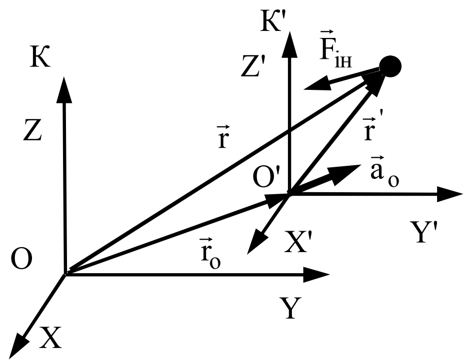

Рис. 54

Для з'ясування особливостей руху в неінерціальних системах відліку перш за все розглянемо випадок, коли неінерціальна система рухається відносно інерціальної системи поступально (рис. 54). При цьому припустимо, що неінерціальна система, її позначено К', рухається відносно інерціальної системи К з прискоренням $\vec{a}_0$. Нехай положення рухомої точки в інерціальній системі визначається радіус-вектором $\vec{r}$, а в неінерціальній системі радіус-вектором $\vec{r}\,'$. Тоді існує простий зв'язок

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{OO'},$$

де $\vec{r}_{OO'}$– радіус-вектор, щзо з’єднує точки відліку неінерціальної системи К' та інерціальної К і фактично є радіус-вектором точки О' в інерціальній системі координат. Двічі продиференціюємо останнє співвідношення по часу:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} + \frac{d^2\vec{r}_{OO'}}{dt^2}.$$

Звідкіля можемо записати, що прискорення в інерціальній системі може бути представлено сумою

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0,$$

де $\vec{a}'$ – прискорення тіла в неінерціальній системі К', а $\vec{a}_0$ не що інакше, як $\frac{d^2\vec{r}_{OO'}}{dt^2}$.

Тобто прискорення тіла в інерціальній системі складається з прискорення $\vec{a}_0$ поступального руху неінерціальної системи та з прискорення $\vec{a}'$, якого набуває тіло в неінерціальній системі.

Підставимо отриманий вираз для прискорення у рівняння другого закону Ньютона:

$$m(\vec{a}' + \vec{a}_o) = \vec{F}.$$

Видно, що в неінерціальній системі відліку рух фактично може бути описаний рівнянням

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_o.$$

За прийнятих умов прискорення $\vec{a}_0$ є однаковим для всіх точок рухомої неінерціальної системи відліку К'. Тому, виходячи з виду рівняння, можна вважати, що в цій системі К' тіло відчуває дію однорідного силового поля, яке характеризується силою $-m\vec{a}_o$. Таку силу називають *силою інерції* і позначають $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}_o$. Видно, що вона направлена протилежно до прискорення точки відліку системи К'.

Отже в неінерціальній системі відліку, яка рухається поступально, динамічне рівняння руху треба писати у вигляді

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ін}.$$

Підсумовуючи, можна стверджувати, що прискорення в неінерціальній системі визначається рівнодійною силою, складовою якої є сила інерції. Введення сили інерції дозволяє рівняння руху в неінерціальній системі відліку записувати в формі рівняння другого закону Ньютона для інерціальних систем відліку. Сили інерції не є силами, які викликані звичайними взаємодіями між тілами. Вони – сили фіктивні, а їх виникнення пов’язане з прискореним рухом, або неінерціальністю, систем відліку. Тому величина сили інерції цілком пов’язана з прискорення неінерціальної системи відліку.

6.2. Вага тіла. Принцип еквівалентності

Розглянемо ще один важливий приклад руху в неінерціальній системі, коли вона рухається з прискоренням сили тяжіння. Дійсно нехай тіло масою m розташоване в ліфті (рис. 55), який має прискорення $\vec{a}$. Тоді тіло рухається разом з ліфтом і в системі відліку, що пов’язана з ліфтом, є нерухомим. За цих умов ця система відліку є неінерціальною, а тіло в ній знаходиться в стані спокою. Це в свою чергу означає, що для забезпечення такого стану всі сили, які діють на тіло, мають бути взаємно скомпенсованими.

Насправді до тіла прикладено силу тяжіння $m\vec{g}$, силу реакції опори $\vec{N}$ та силу інерції $\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}$. Сума, або рівнодійна цих сил, як зазначалося, має бути відсутньою, тобто

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ін} = 0.$$

Звідси знаходимо силу реакції опори

$$\vec{N} = -m\vec{g} - \vec{F}_{ін}.$$

Як ми вже говорили *вага* є силою, з якою тіло діє на опору чи підвіс. Вага рівна за величиною і протилежна за напрямком до сили реакції опори, тобто $\vec{P} = -\vec{N}$. Використовуючи це співвідношення знаходимо, що в рухомому ліфті вага визначається рівністю

$$\vec{P} = m\vec{g} + \vec{F}_{ін}.$$

Підставляючи в цей вираз отриману формулу для визначення сили інерції, приходимо до виразу для ваги тіла в ліфті:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

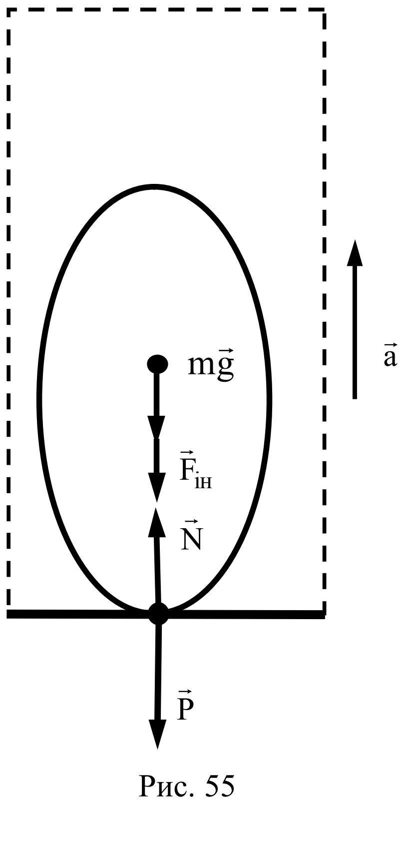

Рис. 55

З цієї формули випливає, що коли прискорення направлене вверх $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{g}$, вага тіла збільшується так, що $P = m(g + a)$. У випадку ж, коли прискорення ліфта направлене вниз $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{g}$, вага тіла зменшується до $P = m(g - a)$.

В результаті ми маємо, що коли прискорення ліфту дорівнює прискоренню вільного падіння, $\vec{a} = \vec{g}$, то тіло стає невагомим, або P=0 і не чинить тиску на підлогу ліфта. Звідси маємо висновок, що тіла, які рухаються під дією тільки сили тяжіння (гравітаційної сили), знаходяться в стані *невагомості*.

Розглянемо тепер ракету, що вільно рухається в просторі відносно інерціальної системи відліку. Це означає, що на неї і на тіла, що знаходяться в ній, не діють ніякі зовнішні сили. Такою зокрема є ракета в міжзоряному просторі, коли внаслідок віддаленості великих мас можна нехтувати дією на ракету гравітаційних сил. В такій ситуації всі предмети в ракеті виявляться невагомими. Але коли ракета почне рухатися з прискоренням $\vec{a}$ у цій системі відліку, то всі предмети в ракеті набудуть ваги, величина якої обчислюється за формулою $\vec{P} = -m\vec{a}$. Іншими словами, тіла в ракеті будуть поводити себе так, начебто на них діє однорідне "гравітаційне" поле, прискорення "вільного падіння" якого $\vec{g} = -\vec{a}$. При цьому тіла всередині ракети "падатимуть" відносно неї саме з цим прискоренням. Таким чином, має місце фундаментальний принцип – *еквівалентність* поведінки тіл в гравітаційному полі і в неінерціальній системі відліку, прискорення якої дорівнює прискоренню вільного падіння. Зауважимо, що прискорення вільного падіння визначається масою зірки або планети, в околі якої воно відбувається, тому величина $\vec{g}$ не є однаковою у Всесвіті.

6.3. Відцентрова сила інерція

Щоб зрозуміти особливості іншого типу неінерціальних систем відліку, а саме: таких які рухаються не поступально, а обертально, розглянемо стрижень, що обертається в горизонтальній площині. Нехай вісь обертання проходить через точку O, яка відповідає нерухомому кінцю стрижня (рис. 56). До другого, рухомого, кінця стрижня прикріплена кулька масою m. Кутова швидкість обертання стрижня дорівнює ω, а його довжина становить ℓ і фактично є радіусом траєкторії кульки. Згідно з другим законом Ньютона добуток маси кульки на величину її доцентрованого прискорення визначає силу пружності,

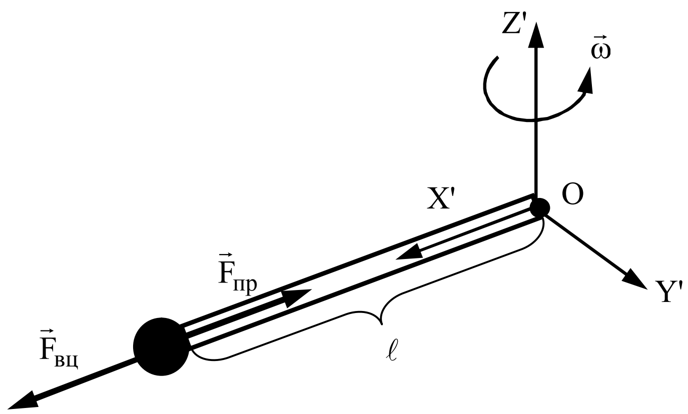

Рис. 56

$$F_{пр}=m\omega^2\ell,$$

яка виникає в стрижні і діє на кульку під час руху.

Відносно неінерціальної системи відліку, що обертається разом зі стрижнем, а вісь X' якої направлена вздовж стрижня (рис. 56), кулька є нерухомою. Дійсно, на неї (кульку) крім сили натягу діє сила інерції, яка в даному випадку співпадає з *відцентровою силою*. Відцентрова сила, як відомо, направлена вздовж радіуса кругової траєкторії, по якій рухається. Величина відцентрової сили

$$F_{вц} = m\omega^2 r,$$

або у векторному вигляді відносно системи відліку, що обертається

$$\vec{F}_{вц} = m\omega^2 \vec{r},$$

де враховано, що вектор $\vec{F}_{вц}$ направлений саме вздовж радіуса траєкторії. Відцентрова сила перпендикулярна до осі обертання, $\vec{F}_{вц} \perp \vec{\omega}$. І оскільки, як зазначалося ℓ=r, а $\vec{F}_{пр}$=– $\vec{F}_{вц}$ (див. рис. 56), кулька під час такого руху залишається в системі відліку X'Y'Z' нерухомою.

Неважко бачити, що сила інерції $\vec{F}_{ін}$, що породжується обертанням (тобто неінерціальністю) системи відліку і діє на нерухоме в ній матеріальне тіло, насправді є відцентровою силою $\vec{F}_{вц}$, і вона не залежить від того, рухатиметься тіло в цій системі чи знаходиться у стані спокою.

6.4. Сила Коріоліса

А в тім при русі тіла в неінерціальній системі відліку, яка обертається, крім відцентрової сили, з'являється ще одна сила інерції, що залежить від величини швидкості тіла в неінерціальній системі відліку. Цю додаткову силу інерції називають *силою Коріоліса*.

Для простоти уявімо собі, що неінерціальна система відліку X'Y'Z' закріплена на диску радіусу r, який обертається з кутовою швидкістю ω=const (рис. 57). Нехай по краю диску вздовж його ободу рухається тіло масою m. Швидкість $\vec{v}$ тіла в нерухомій (лабораторній) системі відліку дорівнює сумі його швидкості $\vec{v}'$ відносно диску та швидкості $\vec{v}_{об}$ обертального руху, яку має точка диску де розташоване тіло,

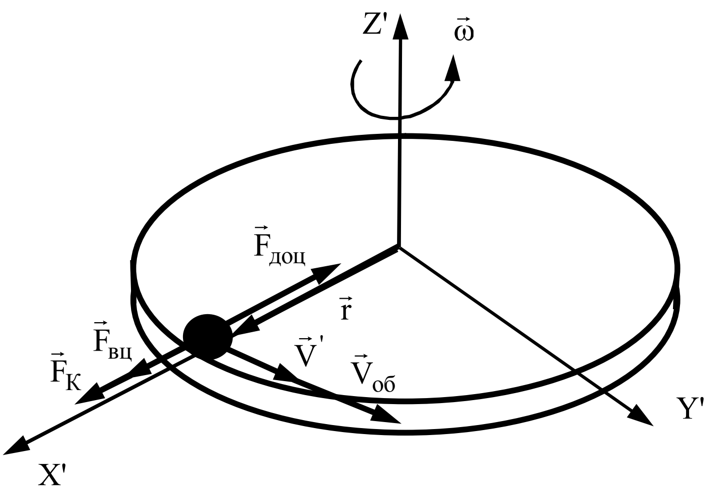

Рис. 57

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{об}$$

Зазначене додавання швидкостей виконується також і для їх тангенціальних проекцій, тому можна записати

$$v = v' + v_{об},$$

де v, v', $v_{об}$ – тангенціальні складові векторів швидкостей $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{v}_{об}$, відповідно.

Швидкість обертального руху визначається добутком кутової швидкості на радіус колової траєкторії тіла $v_{об} = \omega r$. З урахуванням цього співвідношення маємо

$$v = v' + \omega r.$$

Згадаємо, що коли тіло рухається по колу, воно набуває доцентрового прискорення. Такий рух тіла відбувається завдяки доцентровій силі $\vec{F}_{доц}$, що прикладена до тіла і співнаправлена з доцентровим прискоренням $\vec{a}_{доц}$, $\vec{F}_{доц} \uparrow\uparrow \vec{a}_{доц}$. Такою доцентровою силою може бути сила пружності, з якою обод диску діє на тіло. Величина цієї сили має задовольняти другому закону Ньютона

$$m\frac{v^2}{r} = F_{доц}.$$

Фактично це і є рівняння руху тіла в інерціальній системі відліку.

Тепер визначимо, який рух буде спостерігатися в неінерціальній системі відліку X'Y'Z', що обертається разом з диском. Підставимо у вираз доцентрового прискорення швидкість тіла записану через суму швидкостей v' та $v_{об}$:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{(v' + \omega R)^2}{r} = \frac{(v')^2}{r} + 2v'\omega + \omega^2 r.$$

Отже з цього співвідношення випливає, що другий закон Ньютона набуває вигляду

$$m\frac{(v')^2}{r} + 2mv'\omega + m\omega^2 r = F_{доц}.$$

Перепишемо отриманий вираз у формі

$$m\frac{(v')^2}{r} = F_{доц} - 2mv'\omega - m\omega^2 r.$$

Бачимо, що зліва у цьому рівнянні стоїть доцентрове прискорення $a'_{доц}$, яке має тіло в рухомій неінерціальній системі координат. При цьому записана рівність набуває змісту динамічного рівняння руху, якщо два останні доданки в правій частині вважати силами. В попередньому пункті була введена відцентрова сила $\vec{F}_{вц} = m\omega^2\vec{r}$, що однозначно є силою інерції. Другий доданок також визначає силу інерції, яка, як видно, обумовлена присутністю руху тіла в неінерціальній системі і, як зазначалося, називається *силою Коріоліса*. Величина $F_K = -2mv'\omega$ залежить саме від швидкості тіла в системі відліку, що обертається, та від кутової швидкості самої системи. Знаки мінусів вказують, що обидві ці сили інерції направлені від осі диска.

Для порівняння нагадаємо, що на відміну від відцентрової сили, що не залежить від швидкості руху тіла в неінерціальній системі відліку, сила Коріоліса з'являється лише при наявності в неінерціальній системі координат тіла, а її величина визначається швидкістю цього руху. Ця сила не залежить від положення тіла в рухомій системі координат. В загальному випадку тривимірного руху, коли $\vec{v}'$ і $\vec{\omega}$ мають довільні напрямки, сила Коріоліса визначається векторним добутком

$$\vec{F}_K = 2m[\vec{v}'\vec{\omega}].$$

Отже, сила Коріоліса перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори кутової швидкості $\vec{\omega}$ та швидкості $\vec{v}'$. Внаслідок векторного добутку модуль сили Коріоліса $F_K = 2mv'\omega\sin\alpha$, де α – кут між векторами $\vec{\omega}$ та $\vec{v}'$. Тому, коли швидкість тіла змінює напрямок на протилежний, то і сила Коріоліса таким самим чином змінює свій напрямок на протилежний.

Оскільки сила Коріоліса перпендикулярна до вектора швидкості, $\vec{F}_K \perp \vec{v}'$, скалярний добуток цих векторів $\vec{F}_K\vec{v}' = 0$ і, відповідно, потужність сили Коріоліса дорівнює нулю. Це означає, що сила Коріоліса не виконує роботи і не змінює кінетичної енергії тіла. Завдяки її дії змінюється лише напрямок руху тіла, при збереженні модуля швидкості.

Цікаво розглянути вплив руху Землі на рух тіл по її поверхні. Дійсно, внаслідок добового обертання Землі будь-яка система відліку, пов’язана з нею, є неінерціальною. Величина відцентрової сили $F_{вц} = m\omega^2 R_З \cos\varphi$, де $R_З$ – радіус Землі, яка діє на тіла, що розташовані на поверхні Землі, залежить від широти φ. Своє максимальне значення ця сила має на екваторі, де φ=0. На цій широті на тіло масою 1 кг і вагою $P = mg = 1кг \times 9{,}8\frac{м}{с^2} = 9{,}8\,Н$ буде діяти відцентрова сила, величина якої

$$F_{вц} = m\omega^2 R_З = m\left(\frac{2\pi}{T_З}\right)^2 R_З = 1кг \cdot \left(\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\right)^2 \frac{1}{с^2}\cdot 6{,}3\cdot 10^6\,м = 0{,}03\ Н,$$

де враховано, що період добового обертання Землі $T_З$ = 24 год × 60 хв ×60 с, радіус Землі наближено дорівнює $6{,}3\cdot 10^6$ м. Як бачимо, сила інерції змінює вагу тіла лише на 0,3 %.

Сила Коріоліса, яка виникає внаслідок обертання Землі, також виявляється малою в порівнянні з вагою. Проте її дія призводить до того, що тіло, яке вільно падає без початкової швидкості, не буде рухатися вздовж вертикальної до поверхні Землі прямої, а буде при падінні відхилятися на схід. Таке відхилення, наприклад, при падінні з висоти 100 м на широті φ=60° складає не більше 1 см. Незважаючи на малість, сила Коріоліса відіграє дуже важливу роль в метеорології. Так, рух вітрів, зокрема пасатів, відбувався б, якби не було сили Коріоліса, в напрямку від полюсів до екватору. А завдяки дії сили Коріоліса вони відхиляються на захід.