7. Елементи теорії відносності

7.1. Експеримент Майкельсона

До XX-го століття серед фізиків панувала думка, що поширення світла здійснюється в так званому "ефірі", з яким пов'язувалось існування "абсолютної системи координат Ньютона". Вважалося, що в цій системі відліку ефір є нерухомим, а світло поширюється з швидкістю *c*. Зрозуміло, що це була швидкість тільки відносно ефіру. З такого припущення прямо випливало, що в усіх інших системах, які рухаються відносно ефіру, швидкість світла має змінюватися, подібно до того, як змінюється швидкість звуку при переході від однієї системи координат до іншої.

Оскільки світло поширюється всюди в просторі, то і ефір має заповнювати весь простір. Для забезпечення поширення світла ефір мав характеризуватися певною пружністю, бо вважалося, що світло проходить крізь простір подібно до поширення звуку в повітрі. При цьому сам ефір мав бути абсолютно прозорим, і не чинити ніякого опору рухомим фізичним тілам. Тому одночасно припускалося, що ефір не має ані інерційної, ані гравітаційної маси.

Виходячи з таких уявлень, Майкельсон запропонував експеримент, за допомогою якого можна було б встановити, чи змінюється швидкість світла в системах відліку, що рухаються відносно ефіру. Схему досліду наведено на рис. 58. Світло від джерела (S) поширювалось до напівпрозорої пластини (P), яка розташовувалася під кутом 45° до падаючого на неї променя. Промінь, що відбивався від пластини, поширювався у напрямку до дзеркала M_2, а промінь, що проходив через неї, йшов до дзеркала M_1. Потім обидва промені відбивалися від "своїх" дзеркал і поширювалися в зворотних напрямках до пластини. Промінь, відбитий від першого дзеркала, проходив через пластину, а промінь, відбитий від другого дзеркала, знову відбивався від пластини. Після цього промені накладалися і поширювалися в одному напрямку до точки O. Зазначені промені когерентні, тому при їх накладанні має спостерігатися явище інтерференції, за яким інтенсивність результуючої світлової хвилі залежить від різниці фаз коливань хвиль, що накладаються. В даному досліді різниця фаз залежало від часу поширення хвиль від пластини до дзеркал і зворотно, коли промені поширювалися по окремих шляхах.

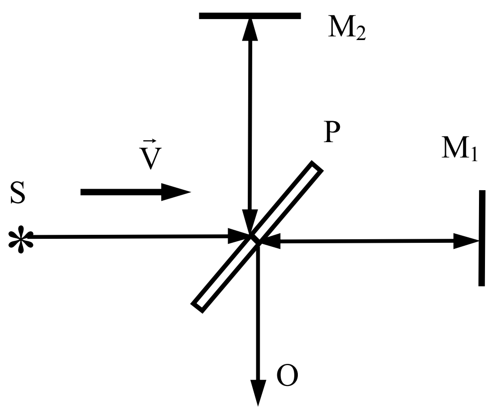

Рис. 58

Експериментальна установка розташовувалась у такий спосіб, щоб швидкість обертального руху Землі $\vec{v}$ була направлена вздовж лінії, що сполучала пластину і дзеркало M_1. При подальших розрахунках будемо також вважати, що відстані від обох дзеркал до пластини однакові, $|LM_1|=|LM_2|=\ell$. Як уже говорилося, світло відносно ефіру має швидкість c, а в інших системах відліку його швидкість має розраховуватися за правилом Галілея додавання швидкостей.

Тоді в інерціальній системі відліку Землі, яка за припущенням рухається крізь ефір з швидкістю v, світло від пластини до дзеркала M_1 буде поширюватися в той же бік з швидкістю c–v, а в зворотному напрямку після відбиття від дзеркала, швидкість світла в тій же системі відліку становитиме величину c+v. Тому час поширення світла від пластини P до дзеркала M_1 і назад може бути обчислений дуже просто:

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2c\ell}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{1-(v/c)^2} \cong \frac{2\ell}{c}\left(1 + (v/c)^2\right).$$

При записі цього виразу було використано наближений розклад $\frac{1}{1-x} \cong 1 + x$, який виконується, коли x<<1. У нас x=v/c і легко перевірити, що відношення швидкості v обертального руху Землі у всіх її точках задовольняє нерівності v/c<<1.

При розрахунку часу поширення іншого променя від пластини до дзеркала M_2 вектор швидкості світла $\vec{c}$ визначений відносно ефіру, не є співнаправленим з вектором руху $\vec{v}$ експериментальної установки відносно ефіру (див. рис.59). Тому за теоремою Піфагора знаходимо, що швидкість поширення світла в цьому випадку дорівнюватиме $\sqrt{c^2 - v^2}$. Після відбиття швидкість поширення світла змінює свій напрямок, але її модуль (див. рис. 59) залишається тим самим. Отже, загальний час руху променя від пластини до дзеркала M_2 і від дзеркала до пластини має подібний вигляд:

Додавання швидкостей при русі:

до дзеркала M_2; *від дзеркала* M_2.

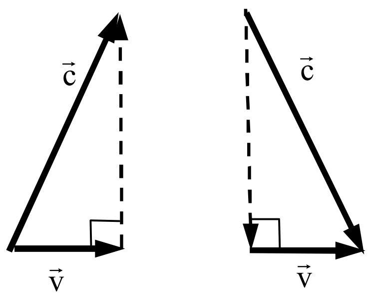

Рис. 59

$$t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \cong \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{1}{2}(v/c)^2\right),$$

де було використано інший наближений розклад $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cong 1 + \frac{1}{2}x$, який теж виконується, коли x<<1.

Шукана різниця часів розповсюдження світла по різних шляхах визначається формулою

$$t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c}\left(1 + (v/c)^2\right) - \frac{2\ell}{c}\left(1 + \frac{1}{2}(v/c)^2\right) = \frac{\ell}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Отже, різниця $t_1 - t_2$ повинна залежати від відношення швидкості обертального руху Землі до швидкості світла. Але експериментально таку різницю для часів поширення світла Майкельсон не виявив. Це означало, що швидкість поширення світла від пластини до обох дзеркал і назад мала однакову величину. З цього дуже важливого експериментального факту випливав також фундаментальний висновок: перетворення Галілея для опису поширення світла не виконуються.

7.2. Принцип відносності Айнштайна

Проблема розповсюдження світла відносно інерціальних систем відліку була розв'язана А. Айнштайном у 1905 році у створеній ним *спеціальній теорії відносності* . Сформулюємо основні постулати цієї теорії:

1. *Принцип відносності.* Фізичні закони у всіх інерціальних системах відліку формулюються однаково.
2. Швидкість світла у вакуумі має одне значення у всіх інерціальних системах відліку. Отже, значення швидкості розповсюдження світла у вакуумі виступає як фундаментальна світова стала.

В першому твердженні спеціальної теорії відносності постулюється, що всі закони – не тільки механіки, (згадаємо, наприклад, принцип відносності Галілея), а і електродинаміки, молекулярної фізики, ядерної фізики… – всі закони фізики в інерціальних системах відліку мають тотожний вигляд і формулюються однаковим чином. Це випливає з того, що всі інерціальні системи абсолютно між собою еквівалентні. В той же час якоїсь однієї абсолютної або нерухомої системи відліку, яку пов'язували з ефіром, не існує.

З другого твердження випливає інший важливий наслідок, за яким швидкість світла у вакуумі виявляється максимально можливою швидкістю передачі будь-яких взаємодій. Так, в класичній механіці припускалося, що потенціальна енергія залежить тільки від взаємних відстаней між тілами. Це означає, що при зміні розташування одного з тіл всі інші тіла миттєво реагують на неї. Проте експериментальні дослідження свідчать, що миттєвої передачі жодної взаємодії нема і бути не може. Кожне тіло реагуватиме на зміну координат одного з них тільки через деякий певний час. І якщо поділити відстань між тілами на величину цієї "затримки" часу, то тим самим можна отримати величину швидкості поширення відповідної взаємодії. В рамках спеціальної теорії відносності існування граничної швидкості поширення взаємодій узгоджується з неможливістю фізичних тілам перебільшувати або навіть досягти цю граничну швидкість. Нарешті, оскільки, згідно з принципом відносності всі закони фізики у інерціальних системах відліку однакові, то гранична (максимальна) швидкість переносу взаємодій також має бути однаковою за величиною (але не за напрямком розповсюдження) у всіх інерціальних системах відліку.

В класичній механіці час не змінюється при переході між системами відліку, тобто, іншими словами, на відміну від просторових координат часова змінна залишається єдиною, або, як кажуть, час є абсолютним. У спеціальній теорії класичний принцип абсолютності часу вже не виконується, оскільки різні події, які є одночасними в одній системі відліку не можуть бути такими в інших системах відліку, саме завдяки скінченності розповсюдженості сигналів. Дійсно, найшвидшим способом сповістити про те, що відбулася та чи інша подія, можна за допомогою світла, посилаючи світлові імпульси (світлові кванти). Їх швидкість відповідно до другого постулату обмежена і, що важливо, однакова, а відстані, які мають подолати ці світлові імпульси в різних системах відліку, є різними.

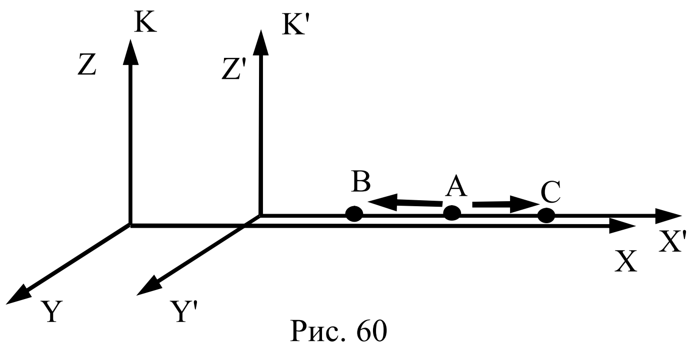

Рис. 60

Розглянемо найпростіший приклад. Нехай дві інерціальні системи відліку K і K' рухаються одна відносно другої вздовж осі OX, причому координатні осі обох систем співпадають за напрямками (рис. 60). Розташуємо в системі K' джерело світла S та на рівних відстанях від нього два також нерухомі в цій системі приймачі M_1 та M_2. Якщо джерело S випромінює світлові сигнали (імпульси) в правий та лівий боки вздовж осі X', то вони досягнуть рівновіддалених від точки S точок M_1 та M_2 одночасно.

Зовсім інша ситуація буде спостерігатися в системі відліку K. В цій системі приймач M_1 рухається назустріч світловому сигналу, що йде з джерела S, а приймач M_2 віддаляється від нього. Оскільки за другим постулатом спеціальної теорії відносності швидкість світла є незмінною в інерціальних системах відліку, то приходимо до висновку, що в системі K світловий імпульс має дійти до точки M_1 раніше, чим він досягне точки M_2. Таким чином, подію, яку спостерігач в системі K' сприймає як одночасну, спостерігач в системі К буде спостерігати не як одночасну, а різночасну. Отримана нерівність часу прибуття сигналів до приймачів є прямим наслідком постулатів Айнштайна.

7.3. Інтервал

Розділ механіки, який враховує відносність, або релятивність, часу при переході від однієї інерціальної системи до іншої, називається *релятивістською механікою*. В цьому розділі механіки вводиться поняття *події*. Подія, що відбулася з матеріальною точкою, є заданою, коли визначені просторові координати x,y,z місця, де відбулася подія, і визначено момент часу t, коли вона здійснилась. Тобто в релятивістській механіці кожна подія характеризується чотирма координатами – трьома просторовими і однією часовою.

Нехай першою подією в інерціальній системі відліку К є випромінювання світлового імпульсу в момент часу t_1 з точки, яка має координати x_1,y_1,z_1. Другою подією в цій системі відліку будемо вважати прибуття імпульсу в момент часу t_2 до точки, яка має координати x_2,y_2,z_2. Відстані між цими точками в системі К обчислюються за формулою

$$\ell_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 .$$

З іншого боку, ця ж відстань може бути легко знайдена, якщо відомі часи t_1 та t_2, або $\ell_{12} = c(t_2 - t_1)$, звідки

$$\ell_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 .$$

Очевидно, має виконуватися рівність для різниці правих і лівих частин цих виразів, тобто

$$c^2 (t_1 - t_2)^2 - \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right] = 0 .$$

Зазначене співвідношення для цих двох подій, пов'язаних з поширенням світлових імпульсів, має виконуватися в усіх інерціальних системах відліку. Це випливає з того, що в будь-якій інерціальній системі відліку швидкість світла прийнята незмінною.

В загальному випадку рухомих точок (фізичних тіл) зазначену різницю називають *інтервалом* і позначають s_{12}^2, тобто

$$s_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2],$$

при цьому $s_{12}^2 \neq 0$.

Айнштайн сформулював, що для двох довільних подій (довільних, а не тільки для поширення світлових імпульсів) величина інтервалу є інваріантом і не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої інерціальної системи:

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2] = \text{const}.$$

Коли дві події нескінчено близькі, то вираз для інтервалу між ними набуває вигляду

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dx^2 + dy^2 + dz^2].$$

Розглянемо тепер дві події, перша з яких відбулася в момент часу t_1 в точці з координатами $(x_1,0,0)$, а друга – в момент часу t_2 в точці з координатами $(x_2,0,0)$. Величина інтервалу для цих подій має вигляд

$$s^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2.$$

У випадку, коли $s^2 > 0$ (причому відповідна додатність зберігається у всіх інерціальних системах відліку), то сам інтервал s – реальна величина і кажуть, що події розділені *часоподібним* інтервалом. Це означає, що існує інерціальна система відліку, в якій $x_1' = x_2'$, але $t_1' \neq t_2'$, щоб зберегти умову $s^2 > 0$ в цій системі координат подія відбувається в одній точці, але обов'язково в різні моменти часу. При $s^2 > 0$ в такій системі координат час другої події може бути більшим часу першої події, тобто $t_2' - t_1' = \frac{1}{c}\sqrt{s^2} > 0$. Останнє співвідношення між часами демонструє, що друга подія відбувається в майбутньому відносно першої події. І навпаки, в цій системі координат час другої події може бути меншим часу другої події $t_1' - t_2' = \frac{1}{c}\sqrt{s^2} < 0$. Іншою мовою, тепер друга подія відбувається в минулому по відношенню до першої події. Принципово, що та або інша послідовність часоподібних подій зберігатиметься при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої і дозволяє говорити, що одна з двох таких подій завжди відбувається пізніше.

Події з $s^2 < 0$ розділені *просторовоподібним* інтервалом, який сам по собі є уявною величиною. Для таких подій існує інерціальна система відліку, в якій перша і друга подія можуть відбуватися в один момент часу $t_1' = t_2'$, але обов'язково в різних точках простору $x_1' \neq x_2'$.

7.3. Перетворення Лоренца

Нагадаємо, що в класичній механіці перетворення координат і часу при переході від інерціальної системи K до системи K' здійснюють за допомогою перетворень Галілея. У випадку, коли координатні осі обох систем паралельні і система K' рухається відносно системи K з швидкістю v вздовж осі OX і початок системи координат K' лежить на осі OX, координати і час обох систем зв’язані співвідношеннями:

$$x'=x-vt,\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'=t.$$

Якщо скористатися поняттям інтервалу, то легко впевнитися, що перетворення Галілея залишають інваріантними окремо просторовий і часовий інтервали, при чому

$$s_{12}^2(t)=(t_1-t_2)^2=(t_1'-t_2')^2,$$

$$s_{12}^2(r)=(x_1-x_2)^2=(x_1'-x_2')^2.$$

В релятивістській теорії просторовий інтервал $s_{12}^2(r)$ і часовий інтервал $s_{12}^2(t)$ окремо не зберігаються. Перетворення, які задовольняють збереженню різниці цих окремих інтервалів $s_{12}^2=s_{12}^2(t)-s_{12}^2(r)=\text{const}$ називають *перетвореннями Лоренца*. Такі перетворення координат і часу для розглядуваних систем координат K і K' мають вигляд:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Зворотні формули переходу від K' до K можна отримати прямо з цих формул. Як і в перетвореннях Галілея це робиться заміною $v\to -v$, бо система K рухається відносно K' з швидкістю $-v$. Вони записуються у вигляді

$$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Видно, що швидкість руху системи K' відносно системи K значно менша одиниці, $v/c\ll 1$, то перетворення Лоренца з точністю до величини другого порядку $(v/c)^2$ переходять у перетворення Галілея. Фактично перетворенням Галілея відповідає граничний перехід за припущенням, що швидкість світла прямує до нескінченості. При $c\to\infty$ перетворення Лоренца та Галілея співпадають.

Нерівність $v>c$ неможлива, бо координати при переході від однієї системи відліку до іншої стають уявними. Це також наслідок другого постулату Айнштайна, що унеможливлює рухи з швидкостями більшими за швидкість світла.

7.4. Скорочення довжини стрижня

Розберемо деякі наслідки постулатів Айнштайна в рамках побудованої ним релятивістської механіки. Нехай в системі K знаходиться нерухомий стрижень, який розташовано паралельно до осі OX. Позначимо довжину стрижня ℓ_0, яка дорівнює різниці координат обох кінців стрижня $\ell_0 = x_2 - x_1$, де координати визначені в системі К. Визначимо довжину ℓ цього стрижня в системі К', яка рухається вздовж осі ОХ (див. рис. 60) відносно системи К з швидкістю v. Для цього знайдемо різницю координат x_2' та x_1' обох кінців стрижня в один і той же момент часу t', які згідно з перетвореннями Лоренца мають вигляд

$$x_1 = \frac{x_1' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \qquad x_2 = \frac{x_2' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Різниця цих координат, або довжина стрижня, визначається виразом

$$\ell_0 = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

де враховано, що довжина стрижня в рухомій системі К' є $\ell = x_2' - x_1'$.

Таким чином, довжина стрижня в рухомій системі відліку стає іншою, а саме:

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Вираз під коренем завжди менший одиниці, тому найбільшу довжину стрижень має в системі відліку, де він не рухається. Таку систему відліку називають системою *спокою*, а довжину ℓ_0 називають *власною* довжиною. При цьому зменшення довжини називають *лоренцевим скороченням*.

Зауважимо, що при русі довільного тіла його поперечні відносно напрямку руху розміри не змінюються. Зменшення об’єму тіла повністю визначається скороченням його поздовжнього відносно напрямку руху розміру.

7.5. Уповільнення часу годинника

Визначимо тепер, як зміниться інтервал часу за показами годинника при переході між системами координат К і К', що зображені на рис. 60. Нехай в системі К' годинник в знаходиться в одній і ті же самій точці x'. Проміжок часу, визначений за допомогою годинника в системі К', знайдемо з різниці $\tau' = t_2' - t_1'$, яку встановлено для двох різних подій, що мають місце в одній точці.

Розрахуємо час, що пройшов між цими подіями в системі К. Тоді з перетворень Лоренца маємо

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

звідки за означенням

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким чином, аналогічно довжині час між двома подіями при переходах між системами відліку змінюється так, що

$$\tau' = \tau\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Час τ', який відраховує нерухомий годинник називають *власним* часом. Видно, що власний час τ' завжди менший часу τ рухомого годинника, $\tau' < \tau$.

Розберемо умовний експеримент. Візьмемо двох близнюків. Один з них знаходиться в ракеті, яка рухається з швидкістю v, близькою до швидкості світла, скажімо $v^2 = 0.99 \cdot c^2$. Вернемо його на Землю через рік по годиннику, що був розміщений у ракеті, тобто τ'=1 рік. Тоді з отриманої нами формули маємо, що годинник на Землі покаже час

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - 0.99}} = \frac{\tau'}{0.1} = 10 \text{ років.}$$

Тим самим приходимо до так званого "парадоксу близнюків", коли близнюк, що залишився на Землі, постарішає аж на 10 років в той час, як близнюк, що перебував у ракеті, проживе лише 1 рік.

7.6. Перетворення швидкості

Для розгляду правил зміни швидкостей у релятивістській механіці припустимо, що в системі К' рухається матеріальна точка. Знайдемо її швидкість в системі К. Система К' рухається з швидкістю v вздовж осі OX системи К, як показано на рис. 60. Координати точки в системі К' та системі К пов'язані перетвореннями Лоренца. Згідно з цими перетвореннями в обох системах відліку нескінчено малі прирости координат матеріальної точки і часу задовольняють співвідношенням:

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Позначимо $\vec{u}$ швидкість матеріальної точки в системі К. Її проекції дорівнюють похідним $u_X = \frac{dx}{dt}$, $u_Y = \frac{dy}{dt}$, $u_Z = \frac{dz}{dt}$. В системі К' вектор швидкості позначимо $\vec{u}'$, і він має проекції $u'_X = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_Y = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_Z = \frac{dz'}{dt'}$. В найпростішому випадку опису руху, коли $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{u}' \uparrow\uparrow \vec{v}$ у матеріальної точки не рівними нулю є тільки Х-ві проекції швидкості: $u_X = u$ та $u'_X = u'$, при цьому $u_Y = u_Y = u'_Y = u'_Z = 0$. За означеннями швидкостей з перетворення просторового і часового диференціалів знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}.$$

Звідси для випадку, коли $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{u}' \uparrow\uparrow \vec{v}$, формула перетворення швидкостей рухомих тіл в релятивістській механіці набувахє вигляду:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}.$$

А що буде, коли u'=c? Насправді, нехай в системі К' поширюється імпульс світла, швидкість u' якого дорівнює c. Підставимо це значення швидкості імпульсу світла у формулу для перетворення швидкостей, щоб отримати його швидкість у системі К, що дає

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c.$$

Отже швидкість імпульсу світла в системі К також рівна u=c. В результаті ми засвідчились, що з перетворень Лоренца випливає така формула перетворення швидкостей, яка точно задовольняє постулатам Айнштайна про граничне значення швидкості світла. При цьому вона є однаковою у всіх без виключення інерціальних системах відліку.

7.7. Залежність маси від швидкості

В релятивістській механіці маса тіла також не є постійною величиною, а залежить від швидкості тіла. Її значення в системі відліку К, яка рухається з швидкістю v відносно системи відліку К', де тіло нерухоме, визначається за формулою

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

причому маса m_0 тіла в системі відліку К' називається *масою спокою*, а m – маса рухомого тіла.

У підсумку можна стверджувати, що чим більшою є швидкість тіла, тим більшою стає його маса, бо при рості швидкості зменшується величина знаменника. Коли $v \to c$, величина $m \to \infty$. Отже, частинки, у яких маса спокою скінчена, $m_0 \neq 0$, не можуть рухатися з швидкостями, близькими або рівними швидкості світла у вакуумі. Інакше: їх можна розігнати до швидкостей, що наближаються до швидкості світла, але завжди буде виконуватись нерівність $v<c$.

7.8. Імпульс

Як і в класичній механіці імпульс матеріальної точки визначається добутком її маси на швидкість. Проте маса точки, як говорилося, залежить від швидкості. Тому можна записати, що імпульс матеріальної точки

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

де $\vec{v}$ – швидкість частинки, а m_0 – її маса спокою.

При малих швидкостях $v<<c$ це рівняння для імпульсу переходить у його вираз в класичній механіці. Коли покласти $c=\infty$, отримуємо, що імпульс $\vec{p} = m_0 \vec{v}$, оскільки маса в класичній нерелятивістській механіці є величиною незмінною.

7.9. Основне рівняння релятивістської динаміки

Рівняння руху тіла також має задовольняти принципам відносності Айнштайна. Воно повинне мати однаковий вигляд у всіх інерціальних системах відліку. В релятивістській механіці, як і в класичній, рівняння руху тіла записують наступним чином

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{p}$ – релятивістський імпульс, $\vec{F}$ – сила, що діє на частинку. Але зміст цього рівняння дещо змінюється. Справа в тому, що записане рівняння за своєю формою тотожне до рівняння другого закону Ньютона, але має враховувати рух тіл змінної маси, оскільки в релятивістській механіці маса тіл стає залежною від швидкості тіла величиною.

З урахуванням означення імпульсу, рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F},$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right) = \vec{F},$$

де і швидкість $\vec{v}$, і її модуль $|\vec{v}| = v$ змінюються під час руху, завдяки дії сили $\vec{F}$.

З наведеного рівняння руху випливає, що вектор прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ матеріальної точки не співпадає за напрямком з силою. Дійсно, похідна імпульсу

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}$$

має доданок (перший), який відсутній в класичній механіці, де $\frac{dm}{dt} = 0$. В даному ж випадку можна записати, що прискорення

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\frac{d(m\vec{v})}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{v}\right) = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \frac{dm}{dt}\vec{v}\right),$$

і видно, що при довільному русі, вектори прискорення і сили не є співнаправленими саме завдяки присутності часової похідної $\frac{dm}{dt} \neq 0$. Розрахуємо її з виразу для маси рухомого тіла:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}}{c^2\left(1 - v^2 / c^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\vec{v}}{c^2 - v^2}\frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Звідки легко записати, що

$$m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = (c^2 - v^2)\frac{dm}{dt}.$$

Тепер помножимо (скалярно) рівняння руху на вектор швидкості і зробимо певні перетворення з використанням останнього співвідношення:

$$\vec{F}\vec{v} = \vec{v}\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v}^2\frac{dm}{dt} + m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = v^2\frac{dm}{dt} + (c^2 - v^2)\frac{dm}{dt} = c^2\frac{dm}{dt},$$

Отже, знаходимо, що зміна маси у часі визначається силою так, що

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{c^2}.$$

З урахуванням цього зв'язку вираз для прискорення набуває вигляду

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \frac{(\vec{F}\vec{v})}{c^2}\vec{v}\right).$$

Звідси видно, що вектор прискорення буде колінеарним до вектору сили, коли останній перпендикулярний до швидкості, $\vec{F} \perp \vec{v}$, і скалярний добуток $\vec{F}\vec{v}$=0. В такому випадку прискорення матеріальної точки визначається просто

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}\sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

і фактично повторяє закон Ньютона для змінної маси:

$$\frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m\vec{a} = \vec{F}.$$

Вектор прискорення буде колінеарним вектору сили і тоді, коли сила співнаправлена з вектором швидкості $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$ і можна записати $(\vec{F}\vec{v})\vec{v} = \vec{F}v^2$. В цьому випадку зв'язок між силою і прискоренням стає іншим

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\left(1 - v^2 / c^2\right) = \frac{\vec{F}}{m_0}\left(1 - v^2 / c^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Якщо його представити у вигляді закону Ньютона

$$m\vec{a} = \left(1 - v^2 / c^2\right)\vec{F},$$

то видно, що сила теж зазнає "скорочення", або іншими словами зменшується.

Тим самим приходимо до висновку, що повздовжня сила $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$, на відміну від поперечної, $\vec{F} \perp \vec{v}$, надає тілу меншого прискорення. Це позв’язано з тим, що поперечна сила змінює напрямок швидкості, але не змінює її модуль. Тому при такому русі тіла його маса теж не змінюється в тому сенсі, що хоча $m \neq m_0$, але величина $m = m_0 / \sqrt{1 - (v / c)^2}$ в процесі руху зберігається. Повздовжня сила змінює тільки модуль швидкості. В результаті під час подібного руху буде змінюватися маса тіла, що призводитиме до відповідного зменшення (або збільшення) і величини прискорення.

7.10. Основне рівняння релятивістської динаміки

Як було показано в попередньому пункті, потужність сили в релятивістській механіці пропорційна часовій похідній маси:

$$N = \vec{F}\vec{v} = c^2 \frac{dm}{dt}.$$

Нагадаємо, що потужність є часовою похідною роботи $N = \frac{dA}{dt}$. З цих означень знаходимо, що робота пропорційна приросту маси тіла, тобто

$$dA = c^2 dm .$$

Врахуємо, що робота сили призводить до зміни кінетичної енергії тіла, тобто $dE_{кін}=dA$, звідки

$$dE_{кін} = c^2 dm .$$

Таким чином, приріст кінетичної енергії тіла пропорцій приросту її релятивістської маси. При інтегруванні цього виразу врахуємо, що кінетична енергія нерухомого тіла дорівнює нулю, а його маса дорівнює m_0. При цих умовах інтегрування прямо приводить до виразу

$$E_{кін} = (m - m_0)c^2 ,$$

який, використовуючи формулу для маси рухомого тіла, можна записати також у вигляді

$$E_{кін} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - 1 \right).$$

З нього видно, що коли швидкість тіла мала порівняно з швидкістю світла і виконується нерівність $v/c<<1$, вираз для кінетичної енергії набуває класичної форми:

$$E_{кін} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2} .$$

Згідно з теорією Айнштайна повна енергія тіла в релятивістській механіці дорівнює добутку його маси на квадрат швидкості світла

$$E = mc^2 ,$$

або

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} .$$

Легко показати, що енергія і імпульс пов’язані співвідношенням

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} .$$

Дійсно, запишемо вираз для квадрату імпульсу

$$p^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2 / c^2} .$$

Додамо до квадрату імпульсу добуток $m_0^2 c^2$, що дає:

$$p^2 + m_0^2 c^2 = \frac{m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} + m_0^2 c^2 =$$

$$= \frac{m_0^2 v^2 + m_0^2 c^2 - m_0^2 v^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^2}{1 - v^2/c^2} = m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2}.$$

Отже, в результаті цих простих перетворень приходимо до співвідношення, що встановлює зв'язок між повною енергією та імпульсом в релятивістській теорії:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2.$$

Навіть, коли енергія, імпульс та маса частинки змінюватимуться при переході від однієї системи відліку до іншої, різниця

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2,$$

як видно, не залежить від вибору системи координат і є інваріантом, тобто величиною, що є однаковою у всіх інерціальних системах відліку.

У випадку системи тіл її енергію також можна записати як добуток повної маси системи на квадрат швидкості світла. Але при цьому повна маса системи не дорівнює сумі мас її тіл, що входять до неї. Це зв’язано з тим, що повна енергія системи тіл включає енергію взаємодії між ними. Величина $E_{ЗВ}$ цієї енергії, яку називають *енергією зв’язку*, дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб рознести тіла на нескінченість, коли взаємодія між ними прямує до нуля. Енергія зв’язку може бути обчислена за різницею мас системи і мас спокою її складових,

$$E_{ЗВ} = \sum_j m_{0j} c^2 - Mc^2,$$

де m_{0j} – маси спокою окремих складових тіл системи, а M – повна маса системи. Видно, що повна енергія Mc^2 є не що інше, як сума парціальних енергій спокою – $\sum_j m_{0j} c^2$, та потенціальної енергії, яка за знаком протилежна енергії зв’язку – $E_{ЗВ}$. Отримане співвідношення є формальним математичним виразом одного з найважливіших принципів сучасної фізики, а саме: *принципу еквівалентності маси та енергії*, без якого неможливо розрахувати роботу ядерних реакторів, описати термоядерні реакції на Сонці чи спроектувати прискорювач елементарних частинок.