

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення механічного руху.
2. Перерахуйте основні властивості простору і часу.
3. Яке тіло називають матеріальною точкою?
4. Який рух називають поступальним?
5. Як визначають координати тіла?
6. Як декартові координати тіла пов'язані з радіус-вектором?
7. Як пов'язані між собою переміщення та радіус-вектор?
8. Дайте означення швидкості.
9. Як за допомогою вектора швидкості визначають напрямок руху?
10. Запишіть формулу рівняння руху для рівномірного прямолінійного руху.
11. Як за допомогою швидкості знайти переміщення та шлях?
12. Дайте означення середньої швидкості.
13. Дайте означення прискорення.
14. Як за допомогою прискорення знайти швидкість?
15. Запишіть рівняння рівноприскореного прямолінійного руху.
16. Дайте визначення нормального і тангенціального прискорень.

1.13. Формули необхідні для розв'язку задач

1. Означення радіус-вектора:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де x, y, z – координати матеріальної точки

2. Означення швидкості руху:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

3. Зв'язок між проекціями вектора швидкості та похідними координат:

$$v_X = \frac{dx}{dt}, \quad v_Y = \frac{dy}{dt}, \quad v_Z = \frac{dz}{dt}.$$

4. Визначення кута між вектором швидкості і координатною віссю OX:

$$\cos \alpha = \frac{v_X}{|\vec{v}|}$$

5. Переміщення, здійснене тілом протягом інтервалу часу $[t_1, t_2]$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt.$$

6. Шлях, пройдений тілом за інтервал часу $[t_1, t_2]$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

7. Зв'язок між радіус-вектором і часом при прямолінійному рівномірному русі, коли $\vec{v} = \text{const}$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t .$$

8. Середня швидкість руху:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt ,$$

або

$$v_{\text{сеп}} = \frac{S}{t_2 - t_1} ,$$

де S – шлях.

9. Означення прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} ,$$

або

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} .$$

10. Зв'язок між швидкістю руху та його прискоренням:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt ,$$

де \vec{v}_0 – початкова швидкість в момент часу $t=0$.

11. Зв'язок між швидкістю руху та його прискоренням при рівноприскореному русі $\vec{a}(t) = \text{const}$:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

і радіус-вектором та прискоренням:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 ,$$

де \vec{r}_0 – радіус-вектор початкового положення тіла.

12. Означення тангенціальної та нормальної складових прискорення і його модуль:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

13. Означення тангенціального прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} .$$

14. Означення нормального прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{r},$$

величина якого визначається за формулою доцентрового прискорення точки, що рухається по колу радіуса r з швидкістю v .

1.14. Задачі

1.1. Точка рухається вздовж прямої, так що залежність пройденого нею шляху від часу описується виразом $s = s_0(1 + \alpha e^{-t/\tau})$, де s_0 , α та τ – задані сталі величини, t – час. Знайдіть залежності від часу для швидкості та прискорення. Визначте величину середньої швидкості за перші τ секунд руху.

1.2. Переміщення тіла, що рухається прямолінійно вздовж осі ОХ, змінюється з часом за законом $r_x = 6t - 0,5t^3$ (м/с). Через який час модуль швидкості буде рівним модулю початкової швидкості.

1.3. Координата точки при її русі вздовж прямої описується виразом $x = 5 + 2t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3$ (м), де t – час, визначений в секундах. Знайдіть: початкову швидкість точки, моменти часу розвороту точки, положення точок розвороту та прискорення в них.

1.4. Точка рухається в площині, при цьому її координати залежать від часу і описуються виразами: $x = c_1t^3$, $y = c_2t$, де $c_1=1$ м/с³, $c_2=2$ м/с. Запишіть: рівняння траєкторії точки, залежності від часу для модуля швидкості та модуля прискорення.

1.5. Рівняння плоского руху описується виразом $\vec{r}(t) = r_0(\vec{i} \sin \omega t + \vec{j} \cos \omega t)$, де r_0 та ω – задані додатні сталі. Визначте залежності від часу для модулів швидкості та прискорення. Знайдіть залежність від часу для кута між векторами швидкості та прискорення. Запишіть рівняння траєкторії та залежність від часу для кута напрямку руху.

1.6. Точка рухається в площині і її рівняння руху описується виразом: $\vec{r}(t) = \vec{i} a \cdot \sin \omega t + \vec{j} b \cdot \cos \omega t$, де a , b та ω – задані сталі. Визначте траєкторію і вкажіть напрямок руху точки на ній.

1.7. Рівняння плоского руху точки має вигляд: $\vec{r}(t) = -a\vec{i} / (1 + \alpha t) + b(\alpha t - \beta t^2) \vec{j}$, де $a = 1$ м, $b = 1,73$ м, $\alpha = 2,0$ с⁻¹, $\beta = 0,5$ с⁻². Визначте модуль вектора швидкості у початковий момент часу. Знайдіть напрямок вектора (кут) початкової швидкості відносно координатної осі Х.

1.8. Частинка рухається в площині і залежності її координат від часу описуються виразами: $x = \alpha t$, $y = b \sin \omega t$, де α , b , ω – відомі сталі, t – час. Визначте траєкторію частинки,

знайдіть радіус кривизни траєкторії у точках, де швидкість частинки направлена паралельно до координатної осі X

1.9. Точка рухається в площині, при цьому проекції її швидкості залежать від часу і описуються залежностями: $v_x=c_1t^3$, $v_y=c_2t$, де $c_1=1 \text{ м/с}^4$, $c_2= 2\text{м/с}^2$. Знайдіть: прискорення, рівняння руху та вираз для траєкторії, $x_0=y_0=0$.

1.10. Частинка рухається в площині XOY зі швидкістю $\vec{v}=\alpha y \vec{i} + \beta \vec{j}$, де $\alpha=0,1 \text{ с}^{-1}$, $\beta=-2 \text{ м/с}$, y – координата вздовж осі OY. В початковий момент часу координати точки $x_0=y_0=0$. Знайдіть рівняння траєкторії частинки.

1.11. Тіло рухається вздовж осі OX з прискоренням, проекція якого на цю вісь описується виразом: $a_x = a_0(1 - t/\tau)$, де $a_0 = 0,1 \text{ м/с}^2$, $\tau = 3 \text{ с}$. Знайдіть шлях пройдений тілом на момент часу $t = \tau$ від початку руху. Початкова швидкість тіла $v_0 = 0$.

1.12. Прискорення точки при її прямолінійному русі описується виразом $a_x = 5 + 2t - t^2 \text{ (м/с}^2\text{)}$, де t – час, визначений в секундах. Знайдіть залежності від часу для швидкості і координати, за умови, що початкова швидкість $v_0=0$ і початкове положення $x_0=0$.

1.13. Початкова швидкість тіла, що рухається вертикально вгору, $v_0 = 20 \text{ м/с}$. Запишіть вирази від часу для $\vec{r}(t)$ та $\vec{v}(t)$. Опір повітря не враховувати. Знайдіть час руху.

1.14. Тіло кинули під кутом до горизонту з початковою швидкістю 30 м/с і воно рухалось протягом 3 с . Під яким кутом до горизонту було кинуте тіло? На яку максимальну висоту піднялося тіло?

1.15. Точка рухається прямолінійно і прискорено, причому проекція її швидкості обернено пропорційна до проекції прискорення: $v = -\tau/a$, де τ – задана додатна стала. Знайдіть залежності від часу для прискорення, швидкості та шляху за умови, що при такому сповільненому русі початкова швидкість була v_0 .

1.16. Точка рухається прямолінійно вздовж осі X, причому її координата обернено пропорційна до швидкості $x = \alpha/v$, де v – проекція швидкості, α – задана стала. Визначте залежність від часу для прискорення, швидкості, та шляху, коли початкова координат точки x_0 ($x_0 \neq 0$).

1.17. Точка рухається сповільнено і прямолінійно вздовж осі X, причому модуль прискорення лінійно залежить від швидкості: $a = (v_0 - v)/\tau$, де v – модуль швидкості, а v_0 – модуль початкової швидкості, τ – задана стала, початкова координата $x_0=0$. Знайдіть залежності від часу для прискорення, швидкості. Який шлях пройде частинка до зупинки?

1.18. Точка рухається прямолінійно й сповільнено з початковою швидкістю v_0 . Прискорення точки пропорційно кубу швидкості $a = \alpha v^3$, де α – задана стала. Знайдіть залежність від часу для шляху, пройденого точкою.

1.19. Рух матеріальної точки задано рівнянням $\vec{r}(t) = \vec{i}(10 - 5t^2) + 10\vec{j}t$ (м). Нарисуйте графік траєкторії точки. Для моменту часу $t = 1$ с розрахуйте модулі швидкості, нормального і тангенціального прискорення.

1.20. Тіло кинули під кутом до горизонту з початковою швидкістю 30 м/с під кутом 30° до горизонту. Знайдіть радіус кривизни траєкторії точки в початковий момент часу і в верхній точці траєкторії.

1.21. Точка рухається по колу з радіусом $r = 4$ м. Початкова швидкість точки $v_0 = 3$ м/с, а тангенціальне прискорення $a_\tau = 1$ м/с². Знайдіть шлях і переміщення точки, пройдені за дві секунди від початку руху.

1.22. Точка рухається по колу радіусу $r = 10$ м. В момент часу t вектор повного прискорення складає кут $\varphi = 45^\circ$ з нормальним прискоренням, а величина цього нормального прискорення була $a_n = 4,9$ м/с². Знайдіть t , якщо тангенціальне прискорення стало, а початкова швидкість $v_0 = 0$.

1.23. Залежність шляху від часу для точки, що рухається по колу радіусу $r = 2$ м, описується виразом $S = ct^2$, де S – шлях, а $c = 2$ м/с². Знайдіть момент часу, коли нормальне прискорення дорівнює тангенціальному $a_n = a_\tau$. Визначте повне прискорення точки в цей момент.

1.24. Частинка рухається по дузі кола з радіусом r . Шлях, що вона проходить прямо пропорційний квадрату швидкості $S = \alpha v^2$ (α – додатна стала). Знайдіть кут між векторами повного прискорення і вектором швидкості в залежності від S .

1.25. Точка рухається вздовж дуги кола радіусом r , при цьому під час руху модулі її тангенціального і нормального прискорень однакові. В початковий момент часу швидкість точки v_0 . Знайдіть залежність швидкості точки від пройденого шляху.