

Питання для самоконтролю

1. Як визначається швидкість будь-якої точки тіла при його довільному русі?
2. Як визначається центр мас твердого тіла?
3. Під дією яких сил рухається центр мас тіла?
4. Що таке момент імпульсу точки, твердого тіла або системи тіл?
5. Як визначається проекція моменту імпульсу на вісь?
6. Як визначається момент пари сил?
7. Що таке момент сили?
8. Як визначається проекція моменту сили на вісь?
9. Дайте означення моменту інерції.
10. Запишіть рівняння обертального руху твердого тіла.
11. Сформулюйте теорему Штейнера.
12. Що таке гіроскоп і його прецесія?

4.10. Формули необхідні для розв'язку задач

1. Рівняння руху центру мас твердого тіла

$$m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j .$$

2. Рівняння обертального руху тіла в загальному випадку

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

3. Основне рівняння обертального руху твердого тіла

$$I_0 \vec{\varepsilon} = \vec{M}_0 .$$

4. Формула визначення моменту сили

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] .$$

5. Формула визначення моменту імпульсу точки

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] .$$

6. Формула визначення моменту інерції твердого тіла

$$I_0 = \sum_j \Delta m_j r_j^2 = \int r^2 \rho dm .$$

4.11. Задачі

- 4.1. Момент інерції стрижня, відносно перпендикулярної до нього осі $I = 2,24 \text{ кгм}^2$. Знайдіть відстань від цієї осі до центра мас стрижня, якщо його маса $m = 2 \text{ кг}$, а його довжина $\ell = 1,2 \text{ м}$
- 4.2. Розрахуйте момент інерції тонкого диску, радіус якого r , а маса m , відносно осі, що проходить через центр мас і перпендикулярна до площини диску.
- 4.3. Розрахуйте момент інерції тонкого кільця, радіус якого r , а маса m , відносно осі, що співпадає з діаметром кільця.
- 4.4. Розрахуйте момент інерції тонкого диску відносно осі, яка співпадає з його діаметром. Маса диску m , а його радіус r .
- 4.5. Тонка однорідна квадратна пластина, довжина сторони якої ℓ , має масу m . Визначте момент інерції пластини відносно осі, що проходить через її центр мас і направлена перпендикулярно до площини пластини.
- 4.6. Розрахуйте момент інерції тонкої пластини, маса якої m , і яка має форму рівнобедреного прямокутного трикутника, відносно осі, яка співпадає з його катетом, довжина якого a .
- 4.7. Момент імпульсу суцільного циліндру, маса якого m , а радіус r , при його обертанні навколо власної осі змінюється з часом t за законом: $L = \alpha t - \beta t^2$, де α, β – задані додатні сталі. Знайдіть момент часу зміни напрямку обертання циліндру та визначте величину кута повороту циліндру для цього моменту часу, коли $\varphi_0 = 0$.
- 4.8. Момент імпульсу однорідного стрижня, що обертається навколо фіксованої осі, яка проходить через його центр мас і перпендикулярна до осі стрижня, змінюється від часу: $L = \alpha t^2 + \beta t^3$, де α, β – задані сталі. Маса стрижня m , а його довжина ℓ . Знайдіть залежності від часу для доцентрового та тангенціального прискорень крайніх точок стрижня.
- 4.9. Момент імпульсу тіла, що обертається навколо фіксованої осі, змінюється від часу: $L = \alpha t - \beta t^3$, де α, β – додатні сталі. Момент інерції стрижня I . Визначте залежність від часу для моменту сили та знайдіть момент часу, коли він змінює напрямок на протилежний.
- 4.10. До краю стрижня і перпендикулярно до його осі приклали силу, через що циліндр обертається відносно осі, що проходить через його другий край. Маса стрижня m , а його довжина ℓ . Момент сили змінюється з часом: $M = \alpha t^2 + \beta t^3$, де α, β – задані сталі. Знайдіть залежності від часу доцентрового та тангенціального прискорень для точки, що розташована в центрі циліндру.
- 4.11. До точки, радіус-вектор якої $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j}$, прикладена сила $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j}$, де a, b, A, B – задані постійні. Знайдіть вектор моменту сили і плече сили відносно точки O початку відліку.

- 4.12. До точки, радіус-вектор якої $\vec{r}_1 = a\vec{i}$, прикладена сила $\vec{F}_1 = A\vec{j}$, а до точки з $\vec{r}_2 = b\vec{j}$ прикладена сила $\vec{F}_2 = B\vec{j}$, де a , b , A , B – задані постійні. Знайдіть плече рівнодійної сили відносно точки O початку відліку.
- 4.13. Кульку, маса якої m , кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Знайдіть залежність модуля моменту імпульсу кульки від часу відносно точки, з якої почало рухатися тіло.
- 4.14. Знайдіть момент імпульсу супутника, маса якого m , і який рухається по коловій орбіті на висоті h від поверхні Землі.
- 4.15. На суцільний однорідний циліндр, маса якого $m = 5$ кг і радіусом $r = 10$ см, і який розташований горизонтально, намотана нерозтяжна нитка, до кінця якої прикладена сила. Знайдіть величину цієї сили, якщо при розмотуванні нитки внаслідок дії сили циліндр обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 0,2$ рад/с².
- 4.16. Тонкостінний циліндр розкручують навколо його осі, прикладаючи силу 6,28 Н до намотаної на циліндр нитки. Яку кількість обертів зробить циліндр на момент часу, коли швидкість обертального руху його точок становить 2 м/с. Маса циліндру 1 кг, а його радіус 10 см,
- 4.17. На однорідний тонкостінний циліндр який розташований горизонтально, намотана нитка, до кінця якої прикріплено тягарець масою m_T . В початковий момент часу вся система почала рухатись. Знайдіть залежність від часу для моменту імпульсу тягарця, визначеного відносно осі циліндру. Маса циліндру m , а його радіус r .
- 4.18. На горизонтально розташований циліндр з радіусом 4 см намотана нитка, до якої прикріплено тягарець. Циліндр може вільно обертатися навколо своєї осі. Коли тягарець відпустили, то через 3 секунди він опустився на 1,5 метри. Визначте кутове прискорення циліндра.
- 4.19. Маховик, який мав початкову кутову швидкість ω_0 , почав гальмуватися під дією сили, момент якої відносно його осі пропорційний квадратному кореню з кутової швидкості маховика: $M = \alpha\sqrt{\omega}$, де α – задана стала. Знайдіть залежності кутової швидкості та кута повороту маховика від часу, якщо момент інерції маховика I .
- 4.20. Однорідна куля, скочується без ковзання по похилій площині з кутом α до горизонту. Знайдіть залежність від часу для швидкості її центру мас.
- 4.21. Однорідний суцільний циліндричний стрижень скочується без ковзання по похилій площині з кутом α до горизонту. Знайдіть прискорення осі стрижня, та найменше значення коефіцієнта тертя, щоб при його русі не було ковзання.
- 4.22. На бічну поверхню однорідного диску, радіус якого r , а маса m , що лежить на гладкій горизонтальній поверхні, намотана нитка, до вільного кінця якої прикладена горизонтальна

постійна сила F . Після початку руху центр мас перемістився на відстань ℓ . Знайдіть кутову швидкість диску на цей момент часу.

4.23. Однорідному диску, радіус якого r , надали кутової швидкості ω_0 і поклали на горизонтальну поверхню. Скільки обертів зробить він до зупинки, якщо коефіцієнт тертя дорівнює k ?