

## Питання для самоконтролю

1. Що таке інтеграли руху?
2. Поясніть виконання закону збереження імпульсу для вільного точкового тіла, для замкненої системи тіл, для ізольованого твердого тіла.
3. Як закон збереження імпульсу пов'язаний з однорідністю простору?
4. Що таке реактивний рух?
5. Якої швидкості набуває ракета під час реактивного руху?
6. Поясніть виконання закону збереження моменту імпульсу для вільного точкового тіла, для замкненої системи тіл, для ізольованого твердого тіла.
7. Що означає термін механічна робота?
8. Що таке потужність?
9. Як визначають потенціальну енергію?
10. Як потенціальна енергія зв'язана з роботою та силою?
11. Наведіть вираз для потенціальної енергії для тіла в однорідному силовому полі.
12. Дайте означення кінетичної енергії.
13. Запишіть кінетичну енергію для твердого тіла, що рухається поступально, обертально, в загальному випадку.
14. Як кінетична енергія зв'язана з роботою?
15. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
16. Який рух називають фінітним, а який – інфінітним?

### 5.16. Формули необхідні для розв'язку задач

1. Формула для імпульсу точкового тіла
$$\vec{p} = m\vec{v}.$$
2. Формула для повного імпульсу системи тіл
$$\vec{P} = \sum_j m_j \vec{v}_j.$$
3. Закон збереження імпульсу замкненої системи тіл
$$\sum_j m_j \vec{v}_j^{(1)} = \sum_j m_j \vec{v}_j^{(2)},$$

де індексами 1 і 2 позначені швидкості у момент часу  $t_1$  та  $t_2$ , відповідно.

4. Закон збереження моменту імпульсу
$$\vec{L} = \text{const}.$$
5. Формула для елементарної роботи сили при переміщенні  $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F}d\vec{r}.$$

6. Формула потужності

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

7. Формула для елементарної роботи моменту сили, що повертає систему на кут  $d\varphi$

$$dA = \vec{M}d\vec{\varphi}.$$

8. Зв'язок роботи і потенціальної енергії

$$A_{12} = -(U_2 - U_1).$$

9. Диференціальний зв'язок між силою і потенціальною енергією

$$\vec{F} = -\text{grad}U.$$

10. Формула для кінетичної енергії точкового тіла

$$E_{\text{кін}} = \frac{mv^2}{2},$$

де  $\vec{v}_0$  – початкова швидкість, а  $\vec{v}$  – набута завдяки роботі

11. Формула зв'язку між кінетичною енергією і роботою

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

12. Формула для кінетичної енергії тіла, що обертається

$$E_{\text{кін}} = \frac{I_o \omega^2}{2}.$$

13. Вираз закону збереження повної механічної енергії, коли  $A_{\text{дис}}=0$

$$\sum_j \frac{m_j v_j^2}{2} + \sum_j \sum_{k(k \neq j)} U(|\Delta \vec{r}_{jk}|) + \sum_j U(\vec{r}_j) = \text{const.}$$

### 5.17. Задачі

- 5.1. Імпульс тіла, маса якого  $m$ , залежить від часу:  $p = \alpha t^2 + \beta e^{-t/\tau}$ , де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$  – додатні сталі. Знайдіть залежності від часу: для сили, яка прикладена до тіла, для її потужності, а також для кінетичної енергії тіла.
- 5.2. Тіло, маса якого  $m = 500$  г, вільно падає з висоти  $h = 20$  м. Чому дорівнює його кінетична енергія в момент падіння на землю. Опір повітря не враховувати.

5.3. Потужність сили, під дією якої рухається точкове тіло, маса якого  $m$ , змінюється від часу:  $N = \alpha t^3 + \frac{\beta}{t^3}$ , де  $\alpha, \beta$  – додатні сталі. Знайдіть залежності від часу: для кінетичної енергії тіла, його імпульсу та сили, що прикладена до тіла. Початковий момент часу  $t_0 \neq 0$ .

5.4. Залежність від часу моменту імпульсу твердого тіла, що обертається навколо фіксованої осі, описується виразом:  $L = \lambda t^3 + \gamma e^{-t/\tau}$ , де  $\lambda, \gamma, \tau$  – додатні сталі. Знайдіть залежності від часу: для моменту сили, потужності цієї сили та для кінетичної енергії тіла.

5.6. Потужність сили, внаслідок якої тверде тіло обертається навколо фіксованої осі, описується виразом:  $N = \delta t^2 + \frac{\beta}{t^2}$ , де  $\delta, \beta$  – додатні сталі. Знайдіть залежності від часу: для кінетичної енергії тіла, моменту імпульсу тіла та моменту сили, що діє на тіло. Момент інерції тіла  $I$ . Початковий момент часу  $t_0 \neq 0$ .

5.7. Тіло, маса якого  $m$ , здійснює одновимірний рух. Потенціальна енергія тіла описується виразом:  $U = kx^2$ ,  $k$  – задана додатна стала, а  $x$  – координата. Знайдіть залежність прискорення тіла від його координати. Визначте залежність його швидкості від координати, якщо в точці  $x_0 = 0$  вона дорівнює  $v_0$ .

5.8. Тіло, маса якого  $1$  кг, рухається у двовимірному потенціальному полі з енергією:  $U = \alpha(x^2 + y^2)$ , де  $\alpha$  – задана стала,  $x, y$  – координати тіла. Інших сил, крім сили поля, не має. Знайдіть залежність від координати для швидкості тіла, якщо в точці  $x = y = 0$  її модуль  $|\vec{v}_0| = v_0$ . Також розрахуйте залежність від координат для потужності сили, з якою поле діє на тіло.

5.9. Тіло, маса якого  $m$ , рухається в двовимірному потенціальному полі, енергія якого описується виразом:  $U = \alpha xy$ , де  $\alpha$  – задана стала,  $x, y$  – координати. В точці з радіус-вектором  $\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$  швидкість тіла становила  $\vec{v}_1 = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j}$ , а в точці  $\vec{r}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$  його швидкість була  $\vec{v}_2 = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j}$ . Знайдіть роботу сили (сторонньої) при русі тіла з першої точки до другої.

5.10. Тіло, маса якого  $m$ , рухається вздовж координатної осі  $OX$  від точки з координатою  $x_1$  до точки з координатою  $x_2$ . До тіла прикладена сила, модуль якої залежить від координати:  $F = F_0 \sin \alpha x$ , де  $\alpha$  та  $F_0$  – задані сталі. Кут  $\varphi$  між вектором сили  $\vec{F}$  і координатною віссю  $OX$  також змінюється:  $\varphi = \beta x$ , де  $\beta$  – задана стала. Знайдіть роботу, яку виконує сила.

5.11. Нерухома граната, що мала масу  $m$ , розірвалася на два уламки, які розлетілись з швидкостями  $v$  та  $3v$ . Знайдіть відношення мас уламків.

5.12. Знайти швидкість двох тіл після їх непружного зіткнення, якщо до зіткнення вони рухалися з швидкостями:  $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{i} + 2\vec{j}$  (м/с). Маса першого тіла 1 кг, а другого в три рази більша. Знайдіть також виділену при цьому теплоту.

5.13. Дві однакові пластилінові кульки рухалися у взаємно перпендикулярних напрямках з однаковою швидкістю 14,1 м/с і непружно зіткнулися (злиплися). Визначте величину та напрям швидкості кульок після зіткнення.

5.14. При центральному пружному зіткненні тіла, маса якого  $m_1$ , з іншим тілом, що покоїлось, обидва тіла набули руху з однаковими швидкостями, направленими в протилежні сторони. Знайдіть масу другого тіла.

5.15. В човні, маса якого  $M$ , стоїть людина, маса якої  $m$ . Човен пливе з швидкістю  $v$ . Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку з швидкістю  $u$  відносно човна. Знайдіть, якої швидкості після цього набуде човен, якщо людина стрибає: а) протилежно; б) перпендикулярно до руху човна.

5.16. Ракета здійснює вертикальний старт. Її початкова маса  $M_0$ . Залежність від часу для витрачання палива описується виразом  $m(t) = \alpha t^2$ , де  $\alpha$  – задана стала. Знайдіть момент часу відриву ракети від поверхні землі, а також часову залежність для прискорення ракети, якщо швидкість відокремлення палива  $u$ .

5.17. Два тіла, маси яких однакові і рівні  $m$ , зв'язані ниткою. Між тілами знаходиться стиснута пружина з коефіцієнтом жорсткості  $k$ , і така система тіл розташована вертикально. Знайдіть при якому стиску  $\Delta \ell$  пружини нижнє тіло підстрибне, якщо миттєво перерізати нитку.

5.18. Стрижень, маса якого  $M$ , а довжина  $\ell$ , закріплений одним кінцем до горизонтальної осі, і у нерухомому стані висить вздовж вертикалі до земної поверхні. Куля, мас якої  $m$  вцілила у стрижень, який після цього почав обертатися відносно осі. Знайдіть початкову швидкість кулі, якщо нижня точка стрижня піднялась на висоту  $h$ .

5.19. Однорідний тонкостінний циліндр і суцільний циліндр з однаковим радіусами скочуються без ковзання по похилій площині, долаючи висоту  $h$ . Порівняйте їх швидкості на прикінці руху. Початкові швидкості обох тіл дорівнюють нулю.

5.20. Однорідна тонка квадратна пластина, сторона якої  $\ell$ , а маса  $M$ , здатна вільно обертатися відносно фіксованої вертикальної осі, яка співпадає з однією з сторін пластини. В центр пластини, перпендикулярно до її площини влучає кулька, маса якої  $m$ , а швидкість  $v$ . Зіткнення кульки і пластини пружне. Знайдіть швидкість кульки після зіткнення.

5.21. Людина, маса якої  $m$ , стоїть на краю горизонтального диску, маса якого  $M$ , і який здатний вільно обертатися. В деякий момент часу людина почала рухатися вздовж краю диску зі швидкістю  $v$  відносно диску. Знайдіть кутову швидкість обертального руху диску та швидкість людини відносно нерухомої системи відліку, якщо радіус диску  $r$ .

5.22. Два горизонтальні диски вільно обертаються навколо вертикальної осі, яка проходить через центри обох дисків. Моменти інерції дисків  $I_1$  та  $I_2$ , а їх кутові швидкості  $\bar{\omega}_1$  та  $\bar{\omega}_2$ , відповідно. Після того, як верхній диск впав на нижній, обидва диски внаслідок тертя, що виникає між ними, почали обертатися спільно. Знайдіть кутову швидкість обертання дисків та роботу, яку виконала сила тертя.