Лекція 10

15. Енергія границі поділу між нормальною та надпровідною фазами

Під час розгляду магнітних властивостей НП ми ввели уявлення про НП I-го та II-го роду, які порізному проявляють себе під час дії на них зовнішнього магнітного поля. Це відбувається тому, що енергія σ_{NS} границі поділу між N - та S -фазами у НП-I позитивна, а у НП-II – від'ємна. Тепер ми розрахуємо відповідну енергію і визначимо причину такої різниці. Буде продемонстровано, що все залежить від співвідношення між λ_L та ξ_S. Виявляється, що першому випадку відповідає нерівність $\lambda_L < \xi_S$, а у другому – $\lambda_L > \xi_S$. Більш точно "границя параметрів" буде наведена нижче, з розрахунків. Почнемо з НП-I.

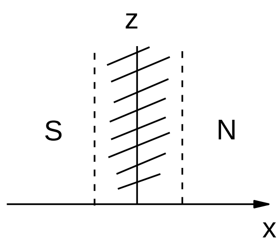

Рис. 10.1

Отже, розглянемо плоску NS -границю НП (рис. 10.1), що знаходиться у проміжному стані. Нехай далеко ліворуч від цієї границі система перебуває в S -стані, а далеко праворуч – в N -стані, при цьому границя розташована перпендикулярно до вісі x, магнітне ж поле направлено вздовж осі $\mathbf{H} \parallel z$. Оскільки ми, як і вище, припускаємо однозв'язність НП простору, то з калібрувальної інваріантності можна скористатися такою калібровкою вектору-потенціалу $\mathbf{A}$, що параметр порядку буде описуватися дійсною хвильовою функцією $\psi(\mathbf{r})$. Крім того, проста геометрія задачі свідчить, що всі змінні будуть функціями лише однієї координати x, вектор $\mathbf{A} \parallel y$, а начало координат, тобто границю, розташуємо у точці $x = 0$.

Отже, маємо:

$$\begin{array}{l} i)\mathbf{H} = (0, 0, H_z(x)); \\ ii)\psi = \psi(x); \\ iii)\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0); \end{array} \qquad \mathbf{H} = rot\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & A_y(x) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial A_y}{\partial x}\mathbf{k} \equiv \frac{dA_y}{dx}\mathbf{k}.$$

Тепер можна записати рівняння Гінзбурга-Ландау і зробити деякі підготовчі для подальшого розгляду перетворення:

$$\xi_S^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi = 0;$$

$$rotrot\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2}(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}),$$

при цьому можна покласти $\theta = 0$ внаслідок дійсності функції ψ. Тоді

$$\xi_S^2 (i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})^2 \psi - \psi + |\psi|^2 \psi =$$

$$=\xi_S^2(-\frac{d^2}{dx^2})\psi(x)+\xi_S^2(\frac{2\pi}{\Phi_0})^2A_y^2(x)\psi-\psi+\psi^3=0;$$

$$rotrot\,\mathbf{A}=rot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & A_y(x) & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial A_y(x)}{\partial x}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{d^2A_y(x)}{dx^2}=-\frac{|\psi(x)|^2}{\lambda_L^2}A_y(x).$$

Замінимо позначення:

$$\xi_S^2(-\frac{d^2}{dx^2})\psi(x)+\xi_S^2(\frac{2\pi}{\Phi_0})^2A_y^2(x)\psi-\psi+\psi^3=0\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad -\xi_S^2\psi''+\xi_S^2(\frac{2\pi}{\Phi_0})^2A_y^2\psi-\psi+\psi^3=0;$$

$$-\frac{d^2A_y(x)}{dx^2}=-\frac{|\psi(x)|^2}{\lambda_L^2}A_y(x)\ \rightarrow\ \lambda_L^2A_y''=\psi^2A_y.$$

Помножимо перше рівняння на ψ', а друге на A_y':

$$-\xi_S^2\psi''\psi'+\xi_S^2(\frac{2\pi}{\Phi_0})^2A_y^2\psi\psi'-\psi\psi'+\psi\psi'^3=0;$$

$$\lambda_L^2A_y''A_y=\psi^2A_yA_y'$$

і використаємо тотожність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(A_y\psi)^2=A_y^2\psi\psi'+\psi^2A_yA_y'.$$

Тоді обидва рівняння можна дещо переписати:

$$-\frac{1}{2}\xi_S^2\frac{d}{dx}(\psi')^2+\frac{1}{2}(\frac{2\pi\xi_S}{\Phi_0})^2\frac{d}{dx}(A_y\psi)^2-(\frac{2\pi\xi_S}{\Phi_0})^2\psi^2A_yA_y'-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\psi^2+\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\psi^4=0;$$

$$\frac{1}{2}\lambda_L^2\frac{d}{dx}(A_y')^2=\psi^2A_yA_y',$$

отримавши для першого після використання другого:

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\xi_S^2(\psi')^2-(\frac{2\pi\xi_S}{\Phi_0})^2(A_y\psi)^2+(\frac{2\pi\xi_S}{\Phi_0})^2\lambda_L^2(A_y')^2+\psi^2-\frac{1}{2}\psi^4]=0,$$

або

$$[1-(\frac{2\pi\xi_SA_y}{\Phi_0})^2]\psi^2-\frac{1}{2}\psi^4+(\frac{2\pi\lambda_L\xi_S}{\Phi_0})^2(\frac{dA_y}{dx})^2+\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2=C.$$

Постійну інтегрування C легко визначаємо з граничної умови: при $x\to-\infty$ функція $\psi\to1$, її похідна $\psi'\to0$, вектор-потенціал $A_y\to0$, звідки $C=1/2$. Гранична умова демонструє, що далеко ліворуч, у НП фазі, магнітне поле відсутнє, параметр порядку досягає свого максимального значення і прямує до 1. Згадуючи тепер, що параметр Гінзбурга-Ландау (див. Лекцію 9) κ_{GL} зв'язаний з полем H_{cm} співвідношенням $\sqrt{2}H_{cm}=\Phi_0/(2\pi\lambda_L\xi_S)$, можемо переписати отримане нами рівняння у формі:

$$[(\frac{2\pi\xi_SA_y}{\Phi_0})^2-1]\psi^2+\frac{1}{2}\psi^4=\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{1}{2}(\frac{H_z}{H_{cm}})^2-\frac{1}{2},$$

де ми також скористалися тим, що залежне від x магнітне поле через операцію $\mathbf{H} = rot\mathbf{A}$ визначається рівністю $H_z = dA_y / dx$.

Тільки зараз, отримавши деякі корисні співвідношення, приступимо до розрахунку енергії NS-границі поділу між *N*- та *S*-станами. При цьому у НП області необхідно точно знати магнітне поле. А це область НП, який в цілому знаходиться у проміжному стані. Значить, десь поряд розташована нормальна область, в якій значення поля має дорівнювати H_{cm}. Таке значення автоматично встановлюється у нормальних областях НП, поки він весь не перейде до *N*-стану.

Тому зовнішнє поле по відношенню до S-ділянок завжди буде дорівнювати тільки H_{cm}. У зв'язку з цим густина гіббсівської енергії у областях однорідної S-фази має вигляд:

$$G_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi} = F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} =$$

$$= F_S^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi}.$$

Ліворуч від NS-границі, як ми зазначали, точне мікроскопічне поле $H_z = 0$, тобто

$$G_S^{(\text{hom})}(0) = F_S^{(\text{hom})}(0),$$

де $F_S^{(\text{hom})}(0)$ – як завжди, густина вільної енергії НП без поля, що, власне, і має бути.

Праворуч від NS -границі, тобто в області теж однорідної N -фази, поле є скінченим, причому $H_z = H_{cm}$, а отже густина вільної енергії

$$F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

де другий доданок не що інше, ніж густина енергії магнітного поля. Але якщо відома вільна енергія, неважко записати вираз для енергії (потенціалу) Гіббса, який за визначенням є:

$$G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}_0}{4\pi} = F_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} =$$

$$= F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi} - \frac{H_{cm}^2}{4\pi} = F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{8\pi} = F_S^{(\text{hom})}(0),$$

де ми використали добре відому рівність, що в області N -стану $H_z = H_{cm}$, а також, що має місце означення (див. Лекцію 3): $F_N^{(\text{hom})}(0) = F_S^{(\text{hom})}(0) + H_{cm}^2 / 8\pi$.

Таким чином, ми досить простими розрахунками, що спираються на такі ж прості міркування, прийшли до висновку, що в умовах рівноваги густина гіббсівського потенціалу (див. рис. 10.2) далеко ліворуч від NS -границі дорівнює густині цього ж потенціалу далеко праворуч від неї. Так, між іншим, і повинно

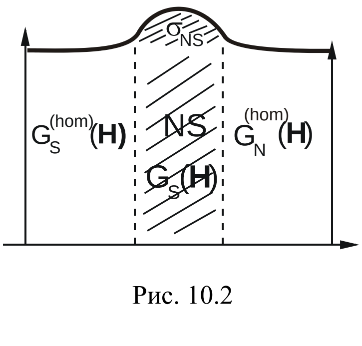

Рис. 10.2

бути. Повторимо:

ліворуч – $G_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_S^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) - \dfrac{H_z H_{cm}}{4\pi} \quad \to$

$$\to \quad F_S^{(\text{hom})}(0),\ (H_z \to 0);$$

праворуч – $G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H}) = F_S^{(\text{hom})}(0)$.

А що ж відбувається в самій NS-границі, де НП стан є просторово неоднорідним? В ній згідно з рисунком густина може відрізнятись від отриманої величини, тому визначимо енергію границі поділу як різницю:

$$\sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\text{hom})}(\mathbf{H})] dx \ ,$$

причому

$$G_S(\mathbf{H}) = F_S(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} ,$$

а

$$F_S(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi}(-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 +$$

$$+\xi_S^2 \, |i\nabla\psi + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}\psi|^2) + \frac{H_z^2}{8\pi} .$$

Отримаємо останній вираз, для чого згадаємо, що таке вільна енергія НП у магнітному полі:

$$F_S(\mathbf{H}) = F_N^{(\text{hom})}(0) + \alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta |\Psi|^4 +$$

$$+\frac{1}{4m_f} |-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi|^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} =$$

$$= F_N^{(\text{hom})}(0) - |\alpha|\Psi_0^2|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta\Psi_0^4|\psi|^4 +$$

$$+\frac{\hbar\Psi_0^2}{4m_f}|-i\nabla\psi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} =$$

$$= F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{\alpha^2}{\beta}|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}|\psi|^4 +$$

$$+\frac{\hbar|\alpha|}{4m_f\beta}|-i\nabla\psi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} =$$

$$= F_N^{(\text{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{4\pi}|\psi|^2 + \frac{1}{2}\frac{H_{cm}^2}{4\pi}|\psi|^4 +$$

$$+\frac{H_{cm}^2}{4\pi}\xi_S^2|-i\nabla\psi - \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2 + \frac{H_z^2}{8\pi} =$$

$$= F_N^{(\text{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi}(-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 +$$

$$+\xi_S^2|i\nabla\psi + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2) + \frac{H_z^2}{8\pi},$$

де ми використали позначення, які вже вводили раніше, а саме:

$$\Psi_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha|}{\beta}; \quad H_{cm}^2 = 4\pi\frac{\alpha^2}{\beta}; \quad \xi_S^2 = \frac{\hbar^2}{4m_f|\alpha|}.$$

Нарешті, для нашого випадку ми тільки що отримали рівність:

$$G_N^{(\mathrm{hom})}(\mathbf{H}) = F_N^{(\mathrm{hom})}(0) - \frac{H_{cm}^2}{8\pi},$$

яку ми можемо використати для обрахування пошукованої енергії NS-границі:

$$\sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\mathrm{hom})}(\mathbf{H})]dx =$$

$$= \sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [G_S(\mathbf{H}) - G_N^{(\mathrm{hom})}(\mathbf{H})]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [F_S(\mathbf{H}) - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} - F_N^{(\mathrm{hom})}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi}]dx\,.$$

Підставимо щойно знайдену $F_S(\mathbf{H})$:

$$\sigma_{NS} = \int_{-\infty}^{\infty} [\cancel{F_N^{(\mathrm{hom})}}(0) + \frac{H_{cm}^2}{4\pi}(-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi_S^2\,|i\nabla\psi + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2) +$$

$$+ \frac{H_z^2}{8\pi} - \frac{H_z H_{cm}}{4\pi} - \cancel{F_N^{(\mathrm{hom})}}(0) + \frac{H_{cm}^2}{8\pi}]dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{H_{cm}^2}{4\pi}(-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + \xi_S^2\,|i\nabla\psi + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A}\psi|^2) +$$

$$+ \frac{H^2 - 2H_z H_{cm} + H_{cm}^2}{8\pi}]dx\,.$$

Для подальших перетворень зручно згадати, що хвильова функція є дійсною (калібрувальна інваріантність) і що $\mathbf{A} = (0, A_y(x), 0)$. Тоді

$$\sigma_{NS}=\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{H_{cm}^2}{4\pi}[-\psi^2+\frac{1}{2}\psi^4+\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+$$

$$+(\frac{2\pi\xi_S A_y}{\Phi_0})^2\psi^2]+\frac{(H_z-H_{cm})^2}{8\pi}\}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{H_{cm}^2}{4\pi}\{[(\frac{2\pi\xi_S A_y}{\Phi_0})^2-1]\psi^2+\frac{1}{2}\psi^4+$$

$$+\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\psi^2]\}+\frac{(H_z-H_{cm})^2}{8\pi}\}dx,$$

звідки приходимо до остаточного виразу, якщо використаємо вже отриману тотожність:

$$[(\frac{2\pi\xi_S A_y}{\Phi_0})^2-1]\psi^2+\frac{1}{2}\psi^4=\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{1}{2}(\frac{H_z}{H_{cm}})^2-\frac{1}{2}.$$

З її допомогою маємо:

$$\sigma_{NS}=\int_{-\infty}^{\infty}\{\frac{H_{cm}^2}{4\pi}[\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{1}{2}(\frac{H_y}{H_{cm}})^2-$$

$$-\frac{1}{2}+\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2]+\frac{(H_z-H_{cm})^2}{8\pi}\}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{H_{cm}^2}{2\pi}\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{H_z^2}{8\pi}-\frac{\cancel{H_{cm}^2}}{8\pi}+\frac{H_z^2}{8\pi}-\frac{H_zH_{cm}}{4\pi}+\frac{\cancel{H_{cm}^2}}{8\pi}]dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{H_{cm}^2}{2\pi}\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{H_z(H_z-H_{cm})}{4\pi}]dx=$$

$$=\frac{H_{cm}^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\xi_S^2(\frac{d\psi}{dx})^2+\frac{H_z(H_z-H_{cm})}{2H_{cm}^2}]dx.$$

Цей достатньо простий вираз, дозволяє, тим не менш, зробити деякі суттєві висновки: насамперед, зауважимо, що у НП області наявне магнітне поле H_z завжди менше, ніж H_{cm}. Отже, другий доданок в останньому інтегралі завжди від'ємний. Якщо додати, що в теорії Лондонів, де нема градієнтних доданків внаслідок відсутності неоднорідних станів і неоднорідного параметра порядку, тобто $\nabla\psi = 0$, то в ній дійсно завжди $\sigma_{NS} < 0$. Така однозначність виглядала нефізичною, але врахування квантових ефектів знімає цю проблему тим, що з'являється новий доданок $\xi_S^2(\psi')^2$, який є завжди позитивним і, в принципі, може змінювати знак σ_{NS}.

Зробимо відповідні оцінки. В перехідній області, яка і визначає NS-границю, параметр порядку ψ змінюється від 0 до 1. Ця зміна відбувається на довжині порядку довжини когерентності. Тому можна покласти $d\psi/dx \sim \xi_S^{-1}$, або вважати, що $\xi_S^2(d\psi/dx)^2 \sim 1$. Сама ж похідна відмінна від нуля теж на тій же довжині ξ_S, що, в решті решт, дає:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_S^2 (\frac{d\psi}{dx})^2 dx \sim \xi_S \, .$$

З іншого боку, другий доданок можна проаналізувати так: функція $f(\mathbf{H}) = H_z^2 - H_z H_{cm}$ має максимум при $H_{\max} = H_{cm}/2$. Отже, в цілому цей доданок досягає $\{(H_{cm}/2)[(H_{cm}/2) - H_{cm}]/2H_{cm} = -1/8$ всередині NS-границі і дорівнює нулеві як в N-, так і S-фазі. Область, де цей доданок є скінченим, порядку глибини проникнення λ_L, тому внесок цього доданку, будучи від'ємним, $\sim -\lambda_L$.

Розглянемо два граничних випадки.

1) $\kappa_{GL} << 1$, або $\lambda_L << \xi_S$. Тоді головний доданок – градієнтний і ми приходимо до відповіді, що

$$\sigma_{NS} \sim H_{cm}^2 \xi_S > 0.$$

Точний розрахунок приводить до енергії NS-границі $\sigma_{NS} = 1.89 \dfrac{H_{cm}^2}{8\pi} \xi_S \approx \dfrac{H_{cm}^2}{4\pi} \xi_S$.

2) $\kappa_{GL} >> 1$, або $\lambda_L >> \xi_S$. Тут головний доданок – польовий, і ми наближено маємо

$$\sigma_{NS} \sim H_{cm}^2 \frac{\lambda_L}{8} < 0,$$

а в точному розрахунку – $\sigma_{NS} = -\dfrac{H_{cm}^2}{8\pi} \lambda_L$.

Який фізичний сенс отриманих результатів? Зобразимо (див. рис. 10.3) перший випадок, коли $\lambda_L << \xi_S$. Видно, що виникає відносно невелика область $\sim \xi_S$, де параметр порядку є малим, а поле практично відсутнє.

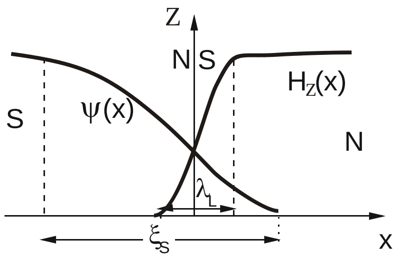

Рис. 10.3

Ця ділянка користується "привілеями" НП, тобто є вільним від магнітно поля, але саме на ній параметр порядку малий, що підвищує його енергію у порівнянні з областю, де $|\psi|^2=1$. Іншою мовою, енергія цієї ділянки більше енергії НП ділянок на величину, яку необхідно було витратити, щоб розірвати куперівські пари і тим самим зменшити ψ. Густина енергії дорівнює $H_{cm}^2/8\pi$, а енергія – $(H_{cm}^2/8\pi)\xi_S$, що знаходиться у відповідності до точної формули.

Другий випадок, коли $\lambda_L >> \xi_S$, ми також зобразили на рисунку (див. рис. 10.4), де знову показана поведінка функцій $\psi(x)$ та $H(x)$. Видно, що в це абсолютно інша ситуація. Має місце досить велика область $\sim\lambda_L$, де поле відмінне від нуля, але в той же час $\psi\sim 1$. Присутність поля примушує порівнювати цю область з N-металом. На відміну від останнього електрони тут, у S-області, знаходяться у впорядкованому НП стані з $\psi\sim 1$, тому їх енергія нижча приблизно на енергію зв'язку. Як і в першому випадку, густина енергії, що йде на розрив куперона (тобто зв'язаної пари), є $\sim(-H_{cm}^2/8\pi)$, а енергія NS-границі відповідно $(-H_{cm}^2/8\pi)\lambda_L$.

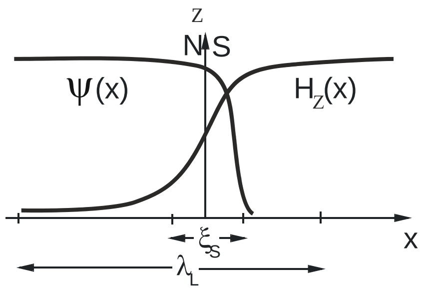

Рис. 10.4

Отже, підсумуємо.

Якщо $\kappa_{GL} << 1$, енергія NS-границі $\sigma_{NS} > 0$, а відповідні матеріали утворюють ***клас НП-I***.

Якщо ж $\kappa_{GL} >> 1$, енергія NS-границі $\sigma_{NS} < 0$ і відповідні матеріали утворюють ***клас НП-II***.

Нарешті, зауважимо, що з точного рівняння для енергії NS-границі випливає, що $\sigma_{NS} = 0$ при значенні $\kappa_{GL} = 1/\sqrt{2}$, тому саме воно є тією чисельною величиною, яка поділяє всі НП на НП-І та НП-ІІ.