Лекція 11

16. Деякі особливості слабкої надпровідності. Фазова когерентність, види слабкого зв'язку

У 1962 р. аспірант проф. А. Піппарда Брайан Джозефсон надрукував роботу, в якій передбачив існування двох нових, раніше невідомих, ефектів. Вони повинні були з'являтись у так званих тунельних переходах між НП, або, іншими словами, НП контактах. Нагадаю, що перший ефект Джозефсона полягає в тому, що через неметалевий (тунельний) перехід може текти НП струм, точніше – надструм. Важливо, що звичайний – нормальний – струм за тих же умов через такий перехід не тече. Джозефсон показав, що критичне значення надструму вельми дивно залежить від зовнішнього поля. Коли ж надструм через такий перехід перевищить деяке своє критичне значення, цей перехід стає джерелом електромагнітного випромінювання. Воно і складає зміст другого ефекту Джозефсона.

Дуже скоро стало зрозуміло, що ефекти Джозефсона притаманні не тільки тунельним переходам, але й багатьом іншим типам так званого слабкого зв'язку, або ділянкам НП ланцюга, в яких критичний струм є суттєво придушеним, а розмір таких ділянок не перевищує довжини когерентності.

Природа ефектів Джозефсона пов'язана з квантовими властивостями НП стану. Ми вже знаємо, що НП стан – це стан з бозе-конденсатом, або станом, в якому майже всі бозе-частинки – пари – знаходяться на єдиному (як правило, основному) квантовому рівні і описуються єдиною хвильовою функцією. Очевидно, що вони когерентні.

Нехай маємо два масивних і ізольованих один від одного шматка НП при одній температурі $T < T_c$. Це значить, що в кожному з них існує конденсат, що описується хвильовою функцією, про яку ми щойно згадували. Оскільки ми припустили рівність температур і однаковість матеріалу НП, то і величини $|\Psi|$ в обох НП мають бути рівними між собою. Проте фази відповідних функцій можуть бути довільними. Так буде до тих пір, поки куски розділені. Зведемо їх, але так, щоб контакт не зміг радикально змінити НП стан у обох НП. Саме тому подібні з'єднання отримали назву ***слабких контактів,*** або ***слабких зв'язків***. Вони грають роль відносно малих збурень, які змішують обидві хвильові функції і призводять до формування єдиної хвильової функції обох НП. Модулі цих функцій, як ми говорили, однакові, але фази мають узгодитись, що, власне, і відбувається через такі слабкі зв'язки. Утворення єдиної хвильової функції – це прямий результат взаємного впливу обох колективів один на другий.

17. Перший, або стаціонарний, ефект Джозефсона

Розглянемо перший ефект Джозефсона, який має також назву ***стаціонарного***. Фізично його суть поля-

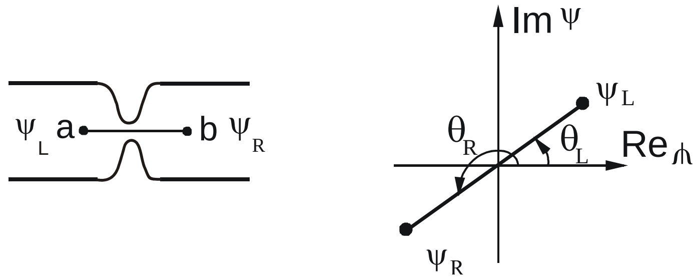

Рис. 11.1

гає в тому, що достатньо малий струм може текти крізь слабкий зв'язок (див. рис. 11.1) бездисипативно, тобто не викликаючи падіння напруги на так званих – лівому *L* і правому *R* –"берегах" контакту. При цьому струм, як правило, виявляється настільки малим, що створюваним ним магнітним полем можна нехтувати. Тому у рівняннях Гінзбурга-Ландау густина надструму визначається лише фазою хвильової функції.

Ще одна характерна властивість слабкого зв'язку полягає, в тому, що всередині слабкого контакту зміна (тобто градієнт) всіх змінних (зокрема, фази) виявляється набагато більшою, ніж зовні, або в самих провідниках, які інколи в цілому теж звуться берегами. Для самого тунельного переходу можна навіть характеризувати не градієнтом фази, а її стрибком на переході, тому будемо говорити про таку "джозефсонівську" різницю фаз

$$\varphi_J = \theta_R - \theta_L ,$$

де $\theta_{L,R}$ – фази берегів, умовно лівого L і правого R (див. рис. 11.1), відповідно.

Визначимо деякі очевидні співвідношення:

1. при надструмі $I_S = 0$ через контакт різниця фаз $\varphi_J = 0$;

2. оскільки зміна фаз кожного з берегів на величину, кратну 2π, не змінює фізичний стан, то зрозуміло, що

$$I_S(\varphi_J) = I_S(\varphi_J + 2\pi n),$$

де n – ціле число;

3. зміна знаку різниці фаз φ_J змінює напрямок струму, тобто

$$I_S(\varphi_J) = -I_S(-\varphi_J);$$

4. виконується рівність

$$I_S(\pi) = I_S(0) = 0.$$

Останнє співвідношення має бути доведено. Щоб це зробити, припустимо, що $\theta_L - \theta_R = \pi$, а оскільки $|\psi_L| = |\psi_L|$, то значення ψ_L та ψ_R можуть бути зображені на площині (див. рис. 11.1). Якщо відстань між точками a і b на рис. 11.1 мала, то можна ввести уявлення про градієнт фази (а не про її стрибок). При цьому функція ψ від ψ_L до ψ_R буде змінюватися на площині вздовж прямої, на якій

$$\nabla\theta = 0.$$

Яка найпростіша функція задовольняє усім приведеним умовам 1-4? Легко впевнитись, що такою може бути:

$$I_S(\varphi_J) = I_c \sin\varphi_J,$$

де I_c – максимальний контактний (тунельний) струм між берегами, що зветься ***критичним***.

Щоб вивести останню залежність, розглянемо задачу з квантової механіки, в якій, як відомо, часова еволюція хвильової функції описується рівнянням Шредингера:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi\ .$$

Отже, припустимо, що деяка система може знаходитись у дискретних станах ψ_{μ}, які розрізняються квантовими числами μ. Тоді шукану хвильову функцію можна розкласти по цих ортогональних функціях ψ_{μ}:

$$\psi(t)=\sum_{\psi}C_{\mu}(t)\psi_{\mu}\,,$$

звідки

$$i\hbar\dot{C}_{\mu}=\sum_{\nu}H_{\mu\nu}C_{\nu}\,,$$

де $H_{\mu\nu}=\int\psi_{\mu}\hat{H}\psi_{\nu}dV$ – матричний елемент переходу між станами μ та ν, а енергія системи в кожному з них задається діагональними величинами $\hat{H}_{\mu\mu}$.

Якщо повернутися до контакту, то нехай у відповідності до теорії електричних ланцюгів, на берегах L та R виникла різниця потенціалів, або напруга, V так, що маємо ситуацію, яка зображена на рис. 11.2.

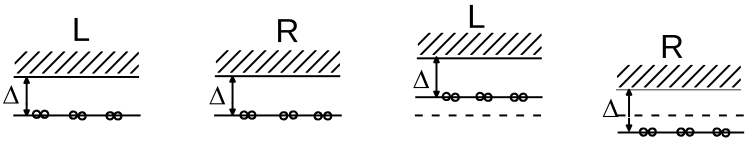

Рис. 11.2

Тоді можна за Р. Фейнманом розглядати два окремі НП (тобто НП-L та НП-R), що мають різні енергії свого основного стану, як дворівневу систему. Це, в свою чергу, означає, що мають місце, або – краще сказати – можна запровадити, означення для енергій рівнів: $H_{LL} \equiv E_L = eV$ і $H_{RR} \equiv E_R = -eV$. Перехід з рівня на рівень, або, що теж саме, між берегами, як завжди, визначається у такому випадку матричним елементом $H_{LR} = H_{LR}^* \equiv K$. У цих означеннях рівняння для шуканої хвильової функції набувають форми:

$$i\hbar \frac{\partial C_L}{dt} = eVC_L + KC_R;$$

$$i\hbar \frac{\partial C_R}{dt} = -eVC_R + KC_L.$$

При цьому можна також покласти, що $|C_L|^2 = n_S^{(L)}$ і $|C_R|^2 = n_S^{(R)}$, звідки в загальному вигляді отримуємо:

$$C_{L,R} = \sqrt{n_S^{(L,R)}}e^{i\theta_{L,R}},$$

причому в рівновазі $n_S^{(L)} \approx n_S^{(R)} = n_S$. Продиференціюємо останнє співвідношення по часу:

$$\dot{C}_{L,R} = \frac{\dot{n}_S^{(L,R)}}{2\sqrt{n_S^{(L,R)}}}e^{i\theta_{L,R}} + i\sqrt{n_S^{(L,R)}}e^{i\theta_{L,R}}\theta_{L,R}$$

і підставимо:

$$i\hbar \frac{\dot{n}_S^{(L)}}{2\sqrt{n_S^{(L)}}}e^{i\theta_L} - \sqrt{n_S^{(L)}}e^{i\theta_L}\dot{\theta}_L = eV\sqrt{n_S^{(L)}}e^{i\theta_L} + K\sqrt{n_S^{(R)}}e^{i\theta_R};$$

$$i\hbar \frac{\dot{n}_S^{(R)}}{2\sqrt{n_S^{(R)}}}e^{i\theta_R} - \sqrt{n_S^{(R)}}e^{i\theta_R}\dot{\theta}_R = -eV\sqrt{n_S^{(R)}}e^{i\theta_R} + K\sqrt{n_S^{(L)}}e^{i\theta_L}.$$

Перегрупуємо доданки, використавши вже введене означення $\varphi_J = \theta_R - \theta_L$. Тоді легко знаходимо:

$$i\hbar\dot{n}_S^{(L)} - 2\hbar n_S^{(L)}\dot{\theta}_L = 2eVn_S^{(L)} + 2Kn_S^{(R)}(\cos\varphi_J + i\sin\varphi_J);$$
$$i\hbar\dot{n}_S^{(R)} - 2\hbar n_S^{(R)}\dot{\theta}_R = -2eVn_S^{(R)} + 2Kn_S^{(L)}(\cos\varphi_J - i\sin\varphi_J).$$

Тепер відокремимо дійсні та уявні складові цих рівнянь, враховуючи, що $\dot{n}_S^{(L)} = -\dot{n}_S^{(R)} = \dot{n}_S$; маємо:

$$\dot{n}_S = \frac{2Kn_S}{\hbar}\sin\varphi_J;$$
$$\dot{\theta}_L = -\frac{K}{\hbar}\cos\varphi_J - \frac{eV}{\hbar};$$
$$\dot{\theta}_R = -\frac{K}{\hbar}\cos\varphi_J + \frac{eV}{\hbar}.$$

Струм через контакт має бути пропорційним різниці похідних $\dot{n}_S^{(L)} - \dot{n}_S^{(R)}$. Покажемо це на основі таких міркувань, висловлених також Фейнманом. Дійсно, в перший момент після включення (або з'єднання НП через контакт) густина НП електронів в берегах буде змінюватись із швидкістю відповідно $\dot{n}_S^{(L)}$ та $\dot{n}_S^{(R)}$, і виникне струм $I_S \sim \dot{n}_S^{(L)} - \dot{n}_S^{(R)} \sim \dot{n}_S$. Звичайно, зменшення кількості електронів в одній частині НП ланцюга і збільшення в іншій буде компенсуватися їх приходом з або уходом до джерела. Але на початковій стадії досить прийняти, що $I_S \sim \dot{n}_S$, звідки (див. перше з останніх рівнянь)

$$I_S = I_c\sin\varphi_J,$$

де для критичного струму маємо $I_c = 2Kn_S/\hbar$.

Існує й дещо інший шлях отримання рівняння Джозефсона, який належить радянським дослідникам Л.Г. Асламазову і А.І. Ларкіну. Згідно їх розгляду припускається, що є місток (див. рис. 11.3) настільки короткий, що його довжина $l << \xi_S$. У відсутності зовнішнього поля перше рівняння Гінзбурга-Ландау має, як ми вже знаємо, вигляд:

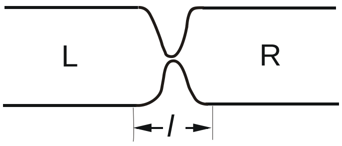

Рис. 11.3

$$-\xi_S^2 \Delta\psi - \psi + \psi\,|\,\psi\,|^2 = 0\,.$$

Оскільки можна вважати, що у короткому містку $\Delta\psi \sim \psi/l^2$, то при обраному припущенні $l << \xi_S$ та необхідній умові $|\,\psi\,| \leq 1$, це рівняння фактично перетворюється на

$$\Delta\psi = 0\,.$$

В області L хвильова функція $\psi = \psi_L e^{i\theta_L}$, в області R – $\psi = \psi_R e^{i\theta_R}$, де відповідні параметри в своїх областях залишаються незмінними. А от в містку записані функції можуть (і мають) інтерферувати. Тож будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_L e^{i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{i\theta_R} [1 - f(\mathbf{r})],$$

де $f(\mathbf{r}) \to 1$ при прямуванні координати в область лівого берега та $f(\mathbf{r}) \to 0$, коли координата відповідає правому берегу. Іншою мовою, лише функція $f(\mathbf{r})$ визначає поведінку розкладу в актуальній області – області містку. Тепер розрахуємо:

$$\nabla\psi = \psi_L e^{i\theta_L} \nabla f - \psi_R e^{i\theta_R} \nabla f; \qquad \Delta\psi = (\psi_L e^{i\theta_L} - \psi_R e^{i\theta_R}) \Delta f\,,$$

звідки для введеної функції знаходимо те ж рівняння $\Delta f = 0$. Сам його розв'язок залежить від конкретних моделей містка, але струм може бути обрахований за допомогою загальної формули:

$$\mathbf{j}_S = -i\frac{\hbar e}{2m_f}|\Psi|^2(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \frac{\hbar e}{2m_f}\frac{|\alpha|}{\beta}\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi).$$

Зробимо послідовно:

$$\psi^*(\mathbf{r}) = \psi_L e^{-i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{-i\theta_R}[1 - f(\mathbf{r})];$$

$$\psi^*\nabla\psi = \{\psi_L e^{-i\theta_L} f(\mathbf{r}) + \psi_R e^{-i\theta_R}[1 - f(\mathbf{r})]\}(\psi_L e^{i\theta_L} - \psi_R e^{i\theta_R})\nabla f(\mathbf{r}) \to$$

$$\to \psi_L\psi_R e^{i(\theta_L - \theta_R)}(1 - f)\nabla f - \psi_L\psi_R e^{-i(\theta_L - \theta_R)} f\nabla f =$$

$$= \psi_L\psi_R e^{i(\theta_L - \theta_R)}\nabla f - 2\psi_L\psi_R f\nabla f\cos(\theta_L - \theta_R),$$

звідки уявна частина є не що інше, ніж

$$\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi) \approx \nabla f\sin(\theta_L - \theta_R).$$

Отже, обидва способи ведуть до одного і того ж рівняння. Проте не можна вважати, що ми вивели рівняння Джозефсона. Як кожне принципово нове рівняння, його неможливо безпосередньо отримати із старих рівнянь або виразів, і Джозефсон фактично постулював його із загальних феноменологічних міркувань, які викладені вище. І наші "виводи" є лише більш-менш послідовною демонстрацією того, що рівняння Джозефсона не суперечить тим рівнянням, які складають фундамент і квантової фізики (рівняння Шредингера), і фізики надпровідності (зокрема, рівняння Гінзбурга-Ландау).