

Лекція 12

17. Другий, або нестационарний, ефект Джозефсона

До цього моменту ми неявно вважали, що НП струм через слабкий зв'язок є меншим за критичний. Проте, коли цей струм, що задається зовнішнім джерелом, перевищить критичне значення для даного контакту, на ньому (контакті) з'явиться напруга V . Розглянемо, до чого це призводить.

Для цього знову звернемося до рівняння Шредингера, що описує часову еволюцію стану квантово-механічної системи:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t).$$

Якщо $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{i\theta(t)}$ і при цьому $\hat{H}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r})$, то

$$i\hbar \Psi(\mathbf{r})e^{i\theta(t)} i \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{r})e^{i\theta(t)},$$

звідки маємо

$$-\hbar \frac{\partial \theta(t)}{\partial t} = E.$$

Іншими словами, ми отримуємо відомий результат з квантової механіки, що похідна від фази хвильо-

вої функції по часу визначає енергію стаціонарних станів (зокрема, коли $\theta = \omega t$, то $\hbar\omega = E$, що добре відомо).

Повернемося до слабкого зв'язку. Нехай на ньому встановилася різниця потенціалів V . Це означає, що енергії E_L та E_R куперівських пар на берегах переходу зв'язані співвідношенням $E_L - E_R = 2eV$, яке ми фактично вже використовували і яке прямо враховує, що заряд тунелюючих через контакт частинок дорівнює $2e$. Тоді для кожного з берегів можна записати:

$$\begin{cases} -\frac{\partial\theta_L(t)}{\partial t} = E_L; \\ -\frac{\partial\theta_R(t)}{\partial t} = E_R; \end{cases} \rightarrow \hbar\frac{\partial\varphi_J}{\partial t} = 2eV.$$

Таким чином, ми знову приходимо до рівняння, яке отримали вище, коли розглядали фейнманівський спосіб виведення рівняння Джозефсона.

Що ж відбувається на джозефсонівському контакті, коли крізь нього протікає струм, вищий за критичний? Важливо також, що подібний струм задається ззовні. По-перше, оскільки критичний струм I_c – це надструм, а більшим він бути не може і за означенням, і за фізичними умовами, то в такій ситуації відповідне перевищення буде створюватись струмом нормальної компоненти, або струмом поодиноких електронів. Така обставина негайно приводить нас до так званої резистивної моделі, тобто розгляду слабкого контакту як паралельно увімкнених власне джозефсонівського, або НП тунельного переходу, та нормального опору R .

При цьому неважко записати повний I струм як суму двох струмів: нормального I_N та НП струму I_S (рис. 12.1). Очевидно, що ці компоненти можуть бути

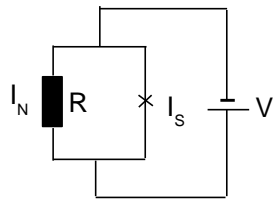


Рис. 12.1

представлені простими і відомими нам виразами. Дійсно, нормальна компонента це не що інше, ніж

$$I_N = \frac{V}{R} = \frac{2eV}{2eR} = \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t},$$

де ми скористалися щойно отриманою формулою для часової похідної різниці фаз конденсатів в берегах. Тут треба зробити одне зауваження. З останнього рівняння начебто випливає, що резистивний струм також є струмом пар, бо саме до такого стану відноситься різниця фаз. І так дійсно може бути, бо на поверхні Фермі багато зв'язаних в пари електронів і вони теж можуть одночасно тунелювати. Так що відповідна – парна – компонента загального струму завжди присутня і саме про неї ми говоримо. Що стосується нормальної компоненти, то вона може бути врахована як деяка додаткова стала. Проте легко впевнитися, що остання нічого не змінює в загальній картині, лише переозначаючи величину повного струму і дещо зменшуючи величину парного, з яким, насправді, і пов'язані всі особливості ефекту, який ми зараз вивчаємо.

НП компонента, як ми вже знаємо, визначається виключно різницею фаз:

$$I_S = I_c \sin \varphi_J.$$

Тоді, з урахуванням зробленого зауваження, повний струм через контакт має вигляд:

$$I = I_S + I_N = I_c \sin \varphi_J + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t},$$

який фактично задає рівняння для часової залежності різниці $\varphi_J(t)$ фаз в берегах. Знайдемо її.

Таким чином, маємо рівняння:

$$I = I_c \sin \varphi_J + \frac{\hbar}{2eR} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t},$$

де величини I , R та I_c вважаються відомими. Це рівняння відносно кута $\varphi_J(t)$, яке можна представити наступним чином:

$$\frac{d\varphi_J}{I - I_c \sin \varphi_J} = \frac{2eR}{\hbar} dt.$$

Будемо його перетворювати:

$$\frac{d\varphi_J}{I - \frac{I_c}{2i}(e^{i\varphi_J} - e^{-i\varphi_J})} = \frac{2ie^{i\varphi_J} d\varphi_J}{2ie^{i\varphi_J} - I_c e^{2i\varphi_J} + I_c} = \frac{2ieR}{i\hbar} dt.$$

Введемо нову змінну $x = ie^{i\varphi_J}$; вона дає $dx = ie^{i\varphi_J} i d\varphi_J = -e^{i\varphi_J} d\varphi_J$. Тоді

$$\frac{dx}{2Ix + I_c x^2 + I_c} = i \frac{eR}{\hbar} dt;$$

$$\frac{dx}{x^2 + 2\frac{I}{I_c}x + 1} = \frac{dx}{(x - x_+)(x - x_-)} = i \frac{eRI_c}{\hbar} dt,$$

де $x_{\pm} = -\frac{I}{I_c} \pm \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}$, причому

$$x_+ x_- = \left(-\frac{I}{I_c} + \sqrt{\dots}\right) \left(-\frac{I}{I_c} - \sqrt{\dots}\right) = 1.$$

Перетворюємо далі:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x-x_+} - \frac{dx}{x-x_-} &= ie \frac{RI_c}{\hbar} (x_+ - x_-) dt = i2e \frac{RI_c}{\hbar} \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} dt = \\ &= i2e \frac{R}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2} dt \equiv i\omega_J dt, \end{aligned}$$

тобто приходимо до рівняння, яке легко інтегрується:

$$\ln \frac{x-x_+}{x-x_-} = i\omega_J t \quad \rightarrow \quad \frac{x-x_+}{x-x_-} = Ce^{i\omega_J t},$$

звідки

$$x = \frac{x_+ - Cx_- e^{i\omega_J t}}{1 - Ce^{i\omega_J t}}.$$

Повернемося до старої змінної φ_J : $x = ie^{i\varphi_J}$; $x^* = -ie^{-i\varphi_J}$ і $x(t) + x^*(t) = -2 \sin \varphi_J(t)$. Використання цієї змінної дозволяє визначити невідому константу C . Для цього вимагатимемо, щоб в початковий момент виконувалась умова $I = I_c$, тобто $\sin \varphi_J(0) = 1$. Це, в свою чергу, означає, що $x(0) + x^*(0) = -2$, і можна припустити, що $x(0) = x^*(0) = -1$. Тоді виконується співвідношення

$$\frac{x_+ - Cx_-}{1 - C} = -1 \quad \rightarrow \quad x_+ - Cx_- = -1 + C,$$

звідки

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 + x_+}{1 + x_-} = \frac{1 - \frac{I}{I_c} + \sqrt{\dots}}{1 - \frac{I}{I_c} - \sqrt{\dots}} = \frac{[(1 - \frac{I}{I_c}) + \sqrt{\dots}]^2}{(1 - \frac{I}{I_c})^2 + (\sqrt{\dots})^2} = \\ &= \frac{\cancel{1} - 2\frac{I}{I_c} + (\frac{I}{I_c})^2 + (\frac{I}{I_c})^2 - \cancel{1} + 2(1 - \frac{I}{I_c})\sqrt{\dots}}{1 - 2\frac{I}{I_c} + (\frac{I}{I_c})^2 - (\frac{I}{I_c})^2 + 1} = \\ &= \frac{-2\frac{I}{I_c}(1 - \frac{I}{I_c}) + 2(1 - \frac{I}{I_c})\sqrt{\dots}}{2(1 - \frac{I}{I_c})} = x_+. \end{aligned}$$

Знайдене значення константи C дозволяє записати

$$x(t) = \frac{x_+ - x_+ x_- e^{i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{i\omega_j t}} = \frac{x_+ - e^{i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{i\omega_j t}},$$

де ми скористалися тим, що $x_+ x_- = 1$. Згадаємо тепер, що $x(t) = i \exp[i\varphi_j(t)] = i[\cos \varphi_j(t) + i \sin \varphi_j(t)] = i \cos \varphi_j(t) - \sin \varphi_j(t)$ і $x^*(t) = -i \cos \varphi_j(t) - \sin \varphi_j(t)$, що дає

$$\sin \varphi_j(t) = -\frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_+ - e^{i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{i\omega_j t}} + \frac{x_+ - e^{-i\omega_j t}}{1 - x_+ e^{-i\omega_j t}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{x_+ - x_+^2 e^{-i\omega_j t} - e^{i\omega_j t} + x_+ + x_+ - x_+ e^{i\omega_j t} - e^{-i\omega_j t} + x_+}{1 + x_+^2 - 2x_+ \cos \omega_j t} = \\
&= -\frac{1}{2} \frac{4x_+ - 2(1 - x_+^2) \cos \omega_j t}{1 + x_+^2 - 2x_+ \cos \omega_j t} = -\frac{1 - \frac{1 + x_+^2}{2x_+} \cos \omega_j t}{\frac{1 + x_+^2}{2x_+} - \cos \omega_j t} = \bullet
\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\frac{1 + x_+^2}{2x_+} = \frac{\mathcal{I} + \left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 2\frac{I}{I_c} \sqrt{\dots} + \left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - \mathcal{I}}{2\left(-\frac{I}{I_c} + \sqrt{\dots}\right)} = -\frac{I}{I_c},$$

приходимо, нарешті, до остаточного виразу (продовження):

$$\bullet = \frac{1 + \frac{I}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t}.$$

Отже, можна прирівняти $2eV = \hbar \partial \varphi_j / \partial t = 2eR(I - I_c \sin \varphi_j)$ та отримати:

$$\begin{aligned}
V(t) &= R\left(I - \frac{I_c + I \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t}\right) = RI_c \left(\frac{I}{I_c} - \frac{1 + \frac{I}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t}\right) = \\
&= RI_c \frac{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 + \frac{\mathcal{I}}{I_c} \cos \omega_j t - 1 - \frac{\mathcal{I}}{I_c} \cos \omega_j t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_j t} =
\end{aligned}$$

$$= RI_c \frac{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_J t} = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega_J t}$$

(нагадаємо, що $\omega_J = 2e \frac{R}{\hbar} \sqrt{I^2 - I_c^2}$).

З одержаного виразу для $V(t)$ видно, що коли $I < I_c$, джозефсонівська частота стає уявною, $\omega_J \rightarrow i\omega_J$, а $\cos \omega_J t \rightarrow \cos i\omega_J t = ch\omega_J t$. При цьому при $t \rightarrow \infty$, тобто коли система досягне рівноваги, $ch\omega_J t \rightarrow \infty$ і тим самим у такому випадку на берегах джозефсонівського контакту зникає напруга, оскільки, як видно, $V(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Інший, фізично красивий, результат впливає з цієї формули для випадку $I_c = 0$:

$$V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega_J t} = IR.$$

По суті остання формула для напруги має звичайний вигляд, проте фактично для іншого току – через слабкий контакт тече парний струм, а не струм одиночних електронів, і саме він забезпечує відповідне падіння напруги.

В результаті, ми знаходимо дивну властивість джозефсонівського переходу. Якщо $I > I_c$, то на переході з'являється скінчена напруга V , причому струм I може бути заданим ззовні і витримуватись в замкненому контурі. Принципово, що в цьому випадку

напруга стає залежною від часу, $V \rightarrow V(t)$, через присутність у формулі періодичної функції (див.

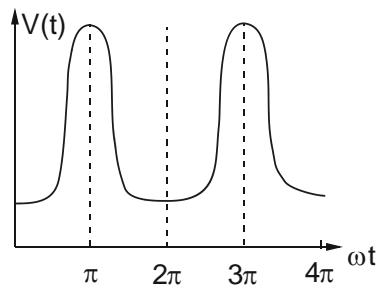


Рис. 12.2

рис. 12.2). Така залежність прямо свідчить, що на контакті виникає періодичний сигнал, а саме явище отримало назву **джозефсонівської генерації**.

Вольтметр постійного струму, підключений до слабкого переходу, покаже середнє по періоду T_J генерації деяке значення. Знайдемо це середнє:

$$\bar{V}(t) = \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{T_J} \int_0^{T_J} \frac{dt}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_J t} =$$

$$(\omega_J = 2\pi\nu_J = 2\pi \frac{1}{T_J}; \quad \omega_J T_J = 2\pi)$$

$$= \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{\omega_J T_J} \int_0^{T_J} \frac{d\omega_J t}{\frac{I}{I_c} + \cos \omega_J t} = \frac{R}{I_c} (I^2 - I_c^2) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{u + \cos y} = \bullet$$

$$(y = \omega_J t \Big|_0^{2\pi}; \quad u \equiv \frac{I}{I_c})$$

Візьмемо інтеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dy}{u + \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2e^{iy} dy}{2ue^{iy} + e^{2iy} + 1} = \\ &= \frac{1}{i\pi} \oint \frac{dz}{2uz + z^2 + 1} = \frac{1}{i\pi} \oint \frac{dz}{(z - z_+)(z - z_-)}, \end{aligned}$$

де використані корені знаменника: $z_{\pm} = -u \pm \sqrt{u^2 - 1}$, з яких лише корінь z_+ лежить всередині кола радіусу $|z|=1$. Далі

$$\bullet = \frac{2\pi i}{i\pi} \frac{1}{z_+ - z_-} = 2 \frac{1}{2\sqrt{u^2 - 1}} = \frac{I_c}{\sqrt{I^2 - I_c^2}}.$$

Отже, можемо записати:

$$\bar{V}(t) = R\sqrt{I^2 - I_c^2} = \frac{\hbar\omega_J}{2e},$$

або $\hbar\omega_J = 2e\bar{V}$. Ця несподівана формула, що отримана Джозефсоном, має прозорий смисл. Якщо середня по енергії відстань між рівнями куперівських пар на обох берегах слабого переходу складає $2e\bar{V}$, то саме це значення з'являється у вигляді кванту. Це ж саме співвідношення має місце у квантовій фізиці.

Вольт-амперна характеристика теж впливає з останніх формул. Напруга на контакті показана на рис. 12.2. Зазначу, що ефект генерації, яка справедливо носить ім'я Б. Джозефсона, вперше, ще до появи його роботи, експериментально спостерігали українські дослідники І.М. Дмитренко, В.М. Свистунов та І.К. Янсон у 1964 році з харківського Фізико-

технічного інституту низьких температур АН України. Але не зрозумівши, звідки йде коливний електромагнітний сигнал, який фіксують їх прилади, результат до друку не послали і оголосили про нього, тим самим підтвердивши, лише після появи роботи Б. Джозефсона у науковому журналі.