

Лекція 13

18. Відгук джозефсонівського контакту на зовнішнє магнітне поле

Розглянемо тунельний перехід типу сендвич (див. рис 13.1). Він складається з двох пластин, які знаходяться у НП стані і розділені тонким шаром діелектрика D . Нехай система розташована у магнітному полі, що паралельне площині переходу. Тоді, як ми вже уявляємо, у приповерхневому шарі виникає екрануючий струм, що компенсує зовнішнє поле. Струм протікає в області порядку лондонівської глибини проникнення λ_L . Проте, як ми неодноразово підкреслювали, НП конденсат обох пластин

є єдиним утворенням, а отже, струм має пересікати і площину джозефсонівського переходу, в якому густина критичного струму мала (слабкий зв'язок, або слабе місце для проходження

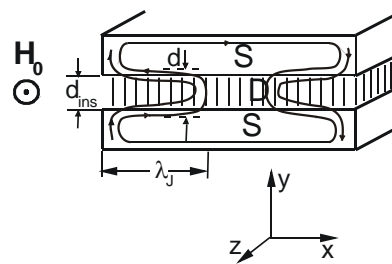


Рис. 13.1

струму, характеризується не провідністю, а константою K тунелювання). При цьому у діелектрик поле

може проникати, в принципі, без обмежень, тому і НП струм може розповсюджуватись в товщу діелектричного переходу на значну глибину. Спробуємо описати таку ситуацію математично.

18.1. Рівняння Феррела-Прейнджа (*Ferrel-Prange*). Виберемо систему координат так (рис. 13.2),

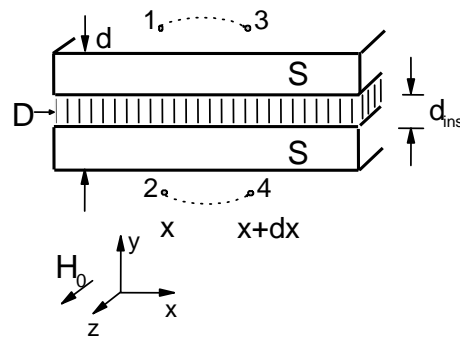


Рис. 13.2

щоб вісь x лежала в площині переходу, а зовнішнє магнітне поле $\mathbf{H}_0 \parallel z$. Нехай область вздовж осі y , де тече струм і магнітне поле відмінне від нуля, має розмір $\sim d$. Тоді з наступного рисунку

видно, що $d \approx 2\lambda_L + d_{ins}$, де d_{ins} – ширина ізолюючого прошарку. Розглянемо тепер (див. рис. 13.2) дві близькі пари точок 1-2 та 3-4 на різних берегах переходу, вибрані ззовні області, яка зайнята магнітним полем. Покладемо відстань між цими точками в кожній парі рівною dx .

Щоб отримати рівняння для опису проникнення поля у діелектрик з тунельним струмом, згадаємо узгацьний імпульс куперівської пари, який ми вже наводили раніше:

$$\hbar \nabla \theta = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A},$$

де, як завжди, θ – фаза хвильової функції конденсованих пар, \mathbf{v}_s – їх швидкість, \mathbf{A} – векторний потенціал. Проінтегруємо це рівняння по ділянкам $1 \rightarrow 3$ та $4 \rightarrow 2$:

$$\hbar \left(\int_1^3 \nabla \theta d\mathbf{l} + \int_4^2 \nabla \theta d\mathbf{l} \right) = \frac{2e}{c} \left(\int_1^3 \mathbf{A} d\mathbf{l} + \int_4^2 \mathbf{A} d\mathbf{l} \right),$$

де доданки з швидкістю \mathbf{v}_s випали внаслідок припущення, що вибрані точки знаходяться поза межею існування надструму.

Видно, що вираз праворуч наближено дорівнює інтегралу по контуру, а отже:

$$\frac{2e}{c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{2e}{c} d\Phi,$$

де $d\Phi$ – магнітний потік крізь площину, що охоплюється контуром, який для цілісності додатково включає відрізки 3-4 та 2-1.

Ліворуч маємо:

$$\hbar[\theta_3(x+dx) - \theta_1(x) + \theta_2(x) - \theta_4(x+dx)] = -\frac{2e}{c} d\Phi.$$

Мінус праворуч в останній рівності виникає внаслідок того, що ми, як завжди, скористалися переходом до інтегралу по поверхні від вектора $rot\mathbf{A} = \mathbf{H}$, а операція ротора дає проекцію $A_y(x)$, яка має від’ємну циркуляцію по “колу” (точніше – контуру) 1-3-4-2, тому що для $\mathbf{H} \parallel z$ повинно бути $A_y(x) < 0$. При цьому можна вважати, що θ_1 і θ_2 , а також θ_3 і θ_4 – це просто значення фази в різних точках на різних берегах перехо-

ду. Проте згідно з очевидною умовою відповідна різниця фаз не що інше, як “кут” φ_J . Враховуючи це означення, а також таку обставину, що струм має текти з точки з більшим значенням фази у точку з її меншим значенням, приходимо до співвідношень:

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) \equiv \varphi_J(x)$$

та

$$\theta_3(x+dx) - \theta_4(x+dx) \equiv \varphi_J(x+dx),$$

з яких прямо випливає рівняння:

$$\varphi_J(x+dx) - \varphi_J(x) = -\frac{2e}{\hbar c} d\Phi \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi_J}{dx} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \frac{d\Phi}{dx},$$

де знову використано визначення кванту потоку $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$. Оскільки, з іншого боку, потік $d\Phi$ через прямокутний “отвір” площиною $d \times dx$ та поле $H_z \equiv H$ пов’язані очевидним співвідношенням

$$d\Phi = H d d x,$$

то $\frac{d\Phi}{dx} = Hd$, де H – напруженість направленої вздовж осі z магнітного поля в переході в точці x . Таким чином, можемо записати:

$$\frac{d\varphi_J}{dx} = -\frac{2\pi}{\Phi_0} Hd,$$

звідки маємо

$$H = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{dH}{dx} = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d^2\varphi_J}{dx^2}.$$

Цю похідну ми отримали, щоб використати рівняння Максвелла, яке ми вже неодноразово записували у формі Лондонів:

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H(x) \end{vmatrix},$$

причому, як вже відомо, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x) \parallel z$. Тоді

$$j_s^y \equiv j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH}{dx},$$

що для похідної прямо дає $dH/dx = -(4\pi/c)j_s$. Тепер, згадуючи рівняння Джозефсона $\mathbf{j}_s = \mathbf{j}_c \sin \varphi_J$, приходимо до рівняння для зміни фази всередині переходу:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} j_s = -\frac{4\pi}{c} j_c \sin \varphi_J,$$

або остаточно

$$\frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = \frac{8\pi^2 d}{c\Phi_0} j_c \sin \varphi_J \equiv \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi_J,$$

де $\lambda_J \equiv \left(\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d}\right)^{1/2}$. Саме це рівняння носить назву **рівняння Феррела-Прейнджа** (1963 р.), а його розв'язки задають розподіл фази φ_J вздовж переходу (у нас, як видно з рис. 13.2, – це вісь x). Знайдемо розв'язки цього рівняння.

Нехай спочатку зовнішнє поле \mathbf{H}_0 дуже слабке, так що виконується умова $H_0 \ll \Phi_0 / 2\pi\lambda_j d$ іншою мовою, потік поля через “прямокутник” з сторонами $\lambda_j(\parallel x)$ та $d(\parallel y)$, що дорівнює $H_0\lambda_j d$, набагато менший за квант потоку: $H_0\lambda_j d \ll \Phi_0$. Це дає підстави сподіватися, що і струм, який компенсує таке поле, через перехід буде слабким, тобто, відповідно, різниця фаз φ_J на берегах теж буде малою. Тоді рівняння Ферреля-Прейнджа лінійаризується, приймаючи просту форму:

$$\frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_j^2} \varphi_J,$$

а його розв’язок, що задовольняє фізично правильній асимптотиці при $x \rightarrow \infty$, має стандартний вигляд:

$$\varphi_J(x) = \varphi_J(0)e^{-x/\lambda_j},$$

звідки

$$H(x) = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{\varphi_J(0)}{\lambda_j} e^{-x/\lambda_j} \equiv H_0 e^{-x/\lambda_j}.$$

Ясно видно, що щойно введена величина λ_j є не що інше, як глибина проникнення слабого поля у джозефсонівський (слабкий) контакт, або, що часто те ж саме, у діелектричний прошарок.

Зробимо оцінки: візьмемо $\Phi_0 \approx 2.07 \cdot 10^{-7}$ Гс см², $d \approx 10^{-5}$ см та $j_c \approx 10^2$ А/см²; тоді глибина проникнення

$$\lambda_j = \sqrt{\frac{c\Phi_0}{8\pi^2 j_c d}} \approx 0.1 \text{ мм}$$

дуже легко вимірюється. Нагадаємо, що $\lambda_L \sim 10^3 - 10^4 \text{ \AA}$, тобто виконується фізично зрозуміла нерівність $\lambda_L \ll \lambda_J$.

18.2. *Джозефсонівські вихори.* Рівняння Ферреля-Прейнджа, яке ми отримали, не має обмежень на величину поля, тому може дати відповідь на питання: що станеться з джозефсонівською системою, коли зовнішнє поле поступово почне зростати. По-перше, права сторона рівняння тепер не може розкладатися, бо різниця фаз φ_J стає не малою, а отже треба розв'язувати повне рівняння

$$\varphi_J'' = \lambda_J^{-2} \sin \varphi_J,$$

яке в такому вигляді зветься "*sin-Гордон*". Його розв'язок отримується методами нелінійних рівнянь і має вигляд

$$\varphi_J(x) = 4 \operatorname{arctg} e^{x/\lambda_J},$$

в чому неважко переконатися прямою підстановкою. Виконаємо її, перевіривши рівність "по сторонах" рівняння:

$$\text{ліва} \quad - \quad \varphi_J' = \frac{4}{\lambda_J} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}};$$

$$\varphi_J'' = \frac{4}{\lambda_J} \frac{\frac{1}{\lambda_J} e^{x/\lambda_J} (1 + e^{2x/\lambda_J}) - \frac{2}{\lambda_J} e^{x/\lambda_J} e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2} = \frac{4}{\lambda_J^2} e^{x/\lambda_J} \frac{1 - e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2};$$

$$\text{права} \quad - \quad \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \varphi_J = \frac{4}{\lambda_J^2} \sin \frac{\varphi_J}{4} \cos \frac{\varphi_J}{4} (1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_J}{4}) =$$

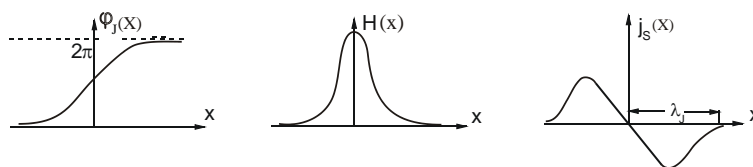


Рис.13.3

$$= \frac{4}{\lambda_J^2} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1+e^{2x/\lambda_J}} \left(1 - \frac{2e^{2x/\lambda_J}}{1+e^{2x/\lambda_J}}\right) = \frac{4}{\lambda_J^2} e^{x/\lambda_J} \frac{1-e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2},$$

$$\text{бо } \sin^2 \frac{\varphi_J}{4} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}, \text{ а } \operatorname{tg} \frac{\varphi_J}{4} = e^{x/\lambda_J}.$$

Якщо повернутися до розв'язку, то з нього випливає також поведінка магнітного поля $H(x) \sim d\varphi_J/dx$ та НП струму $j_s(x) \sim d^2\varphi_J/dx^2$ всередині переходу (див. рис. 13.3).

Інакше, в середину переходу прориваються окремі утворення – НП вихори (*vortex* – вихор), що несуть квант магнітного потоку Φ_0 . Розв'язки, що відповідають цим вихорам, носять назву *солітонів* – поодиноких хвильоподібних збуджень джозефсонівських переходів.

Вздовж переходу (вісь x) цей вихор має розмір $\sim 2\lambda_J$, а впоперек (тобто вздовж вісі y) – $d (\ll \lambda_J)$. Ми дійсно бачили, що для $d \approx 10^{-5} \text{ см} = 10^{-4} \text{ мм}$, довжина $\lambda_J \approx 10^{-1} \text{ мм}$, або насправді $d \ll \lambda_J$. Можна показати, що проникнення вихорів у слабкий контакт починається після перевищення полем деякого значення H_{c1} .

Його можна знайти, якщо записати вираз для вільної енергії переходу, що можна зробити, виходячи з таких міркувань. При наростанні струму через слабкий зв'язок від нульового значення до \mathbf{j}_s за час t в переході запасється певна енергія. Віднесена до одиниці площі переходу, вона дорівнює

$$E_J = \int_0^t j_s V dt,$$

де V , як і вище, – напруга, що виникає на переході в процесі зростання струму. Вираз для неї ми вже писали:

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t}.$$

Оскільки $j_s = j_c \sin \varphi_J$, то

$$\begin{aligned} E_J &= \int_0^t j_c \sin \varphi_J \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \varphi_J}{\partial t} dt = \frac{\hbar j_c}{2e} \int_0^t \sin \varphi_J d\varphi_J = \\ &= -\frac{\hbar j_c}{2e} \cos \varphi_J \Big|_0^t = \frac{\hbar j_c}{2e} (1 - \cos \varphi_J). \end{aligned}$$

Крім записаної енергії, що відповідає енергії струму, у переході присутнє магнітне поле, або відповідна магнітна енергія, густина якої на одиницю площі (тут – довжини) має вигляд

$$E(\mathbf{H}) = \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d.$$

В цілому енергія, що запасена у переході довжиною L , є сумою цих двох:

$$E = E_J + E(\mathbf{H}) = \int_0^L \left[\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} d + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi_J) \right] dx.$$

Останній вираз легко перетворюється, якщо використати вже відоме нам співвідношення $H = -\frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx}$ шляхом підстановки:

$$E = \int_0^L \left[\left(\frac{\Phi_0}{2\pi d} \right)^2 \left(\frac{d\varphi_J}{dx} \right)^2 + \frac{\hbar}{2e} j_c (1 - \cos \varphi_J) \right] dx \equiv T_{kin} + U_{pot}.$$

Тоді отриману функцію можна мінімізувати щодо φ_J , що дає значення фази, яке відповідає мінімуму E . Але якщо треба знайти рівняння, яке описує поведінку фази, то треба мінімізувати функцію Лагранжа, яка за означенням є різницею кінетичної T_{kin} і потенціальної U_{pot} енергій, а саме: $T_{kin} - U_{pot}$. В такому випадку маємо:

$$\frac{d}{dx} \frac{\delta E}{\delta \frac{d\varphi_J}{dx}} - \frac{\delta E}{\delta \varphi_J} = 2 \frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - \frac{\hbar}{2e} j_c \sin \varphi_J = 0.$$

Згадуючи тепер, що квант потоку $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$, або $\hbar / e = \Phi_0 / \pi c$, отримуємо:

$$2 \frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - \frac{\Phi_0}{2\pi c} j_c \sin \varphi_J = 0;$$

$$\frac{\Phi_0}{8\pi^2 d} \frac{d^2 \varphi_J}{dx^2} - j_c \sin \varphi_J = 0,$$

тобто те ж рівняння Феррела-Прейнджа. Ми, однак, цікавимося значенням енергії E , коли, як ми знаємо, $\varphi_J = 4 \arctg[\exp(x/\lambda_J)]$. Тоді для першого доданку маємо:

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_J}{dx} &= 4 \frac{e^{x/\lambda_J} \frac{1}{\lambda_J}}{1+e^{2x/\lambda_J}} = \frac{4}{\lambda_J} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1+e^{2x/\lambda_J}} \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\frac{d\varphi_J}{dx}\right)^2 = \frac{16}{\lambda_J^2} \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2},\end{aligned}$$

а для другого –

$$\begin{aligned}1 - \cos \varphi_J &= 2 \sin^2 \frac{\varphi_J}{2} = 8 \sin^2 \frac{\varphi_J}{2} \cos^2 \frac{\varphi_J}{2} = \\ &= 8 \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_J}{4})^2} = 8 \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1 + e^{2x/\lambda_J})^2},\end{aligned}$$

оскільки $\operatorname{tg}(\varphi_J/4) = \exp(x/\lambda_J)$. Таким чином, підставляючи в E , отримуємо:

$$\begin{aligned}E &= \int_0^L \left(\frac{\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{16}{\lambda_J^2} + 8 \frac{\hbar}{2e} j_c \right) \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2} dx = \\ &= \left(\frac{16\Phi_0^2}{32\pi^3 d} \frac{8\pi^2 j_c d}{c\Phi_0} + \frac{8\Phi_0 j_c}{2\pi c} \right) \int_0^L \frac{\lambda_J}{2} \frac{e^{2x/\lambda_J}}{(1+e^{2x/\lambda_J})^2} d\left(\frac{2x}{\lambda_J}\right) = \\ &= \left(\frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} + \frac{4\Phi_0 j_c}{\pi c} \right) \frac{\lambda_J}{2} \int_0^{2L/\lambda_J} \frac{e^y dy}{(1+e^y)^2} = \\ &= \frac{4\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \left(-\frac{1}{1+e^y} \right) \Big|_0^{2L/\lambda_J} = \frac{4\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{2L/\lambda_J}} \right) = \\ &= \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \frac{e^{2L/\lambda_J} - 1}{e^{2L/\lambda_J} + 1} = \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} \operatorname{th} \frac{L}{\lambda_J},\end{aligned}$$

де ми скористалися явним виразом $\lambda_J^2 = (c\Phi_0/8\pi^2 j_c d)$.

Видно, що якщо вихор поодинокий, тобто $L \gg \lambda_J$, то $E_{vor}^{(1)} = \frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c}$. Це і є вільна енергія (бо за припущенням $T = 0$ і $F = E$) поодинокого джозефсо-нівського вихору. Проте, коли система знаходиться у зовнішньому магнітному полі \mathbf{H}_0 , то, як ми вже відмічали, треба користуватися вільною енергією Гіббса $E - \mathbf{V}\mathbf{H}_0 / 4\pi$, де \mathbf{V} – магнітна індукція всередині тіла. Густина цієї енергії на одиницю площі S_{sq} “під вихором” в переході має вигляд

$$G_{vor}^{(1)}(\mathbf{H}_0) = E_{vor}^{(1)} - \frac{\Phi_0 \mathbf{H}_0}{4\pi},$$

де ми поклали $\mathbf{V} = \Phi_0$, внаслідок того, що для $S_{sq} = 1$ потік $\Phi = \mathbf{B}S_{sq} = \Phi_0$. Видно, що поки поле мале, тобто поки зберігається нерівність $G_{vor}^{(1)}(\mathbf{H}_0) > 0$, утворення в переході вихрового збудження є не вигідним. Але ж коли величина зовнішнього поля досягає значення $H_0 = H_{c1}$, так що $G_{vor}^{(1)}(H_{c1}) = 0$, поява вихору стає енергетично вигідною, і ми для критичного струму отримуємо:

$$\frac{2\Phi_0 \lambda_J j_c}{\pi c} = \frac{\Phi_0 H_{c1}}{4\pi}; \quad H_{c1} = \frac{8\lambda_J j_c}{c} = \frac{8}{c} \frac{c\Phi_0 \lambda_J}{8\pi^2 \lambda_J^2 d} = \frac{\Phi_0}{\pi^2 \lambda_J d},$$

де ми виразили j_c через λ_J : $\lambda_J^2 = c\Phi_0 / 8\pi^2 j_c d$.

Нарешті, оскільки ми писали для поля, що

$$H(x) = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{d\varphi_J}{dx} = \frac{\Phi_0}{2\pi d} \frac{4}{\lambda_J} \frac{e^{x/\lambda_J}}{1 + e^{2x/\lambda_J}},$$

то в центрі вихору $H(0) = \Phi_0 / \pi \lambda_J d$, або $H(0) = \pi H_{c1}$.