

Лекція 17

24. Мікроскопічна теорія надпровідності

Як ми вже неодноразово згадували, механізм явища НП, був встановлений (спочатку по суті теоретично) лише через 46 років після відкриття самого явища, коли американські фізики Дж. Бардін, Л. Купер і Р. Шріффер опублікували свою роботу, в якій була викладена теорія, що з того часу так і називається *теорія БКШ*.

Щоб продемонструвати, з якими труднощами зіткнулись фізики, в першу чергу теоретики, достатньо привести такі оцінки. Різниця між вільними енергіями метала в його N- та S-станах, що приходить на 1см^3 , дорівнює, як ми знаємо, величині $H_{cm}^2 / 8\pi \sim 10^5 \text{ ерг/см}^3$ при звичайних значеннях $H_{cm} \sim 10^3 \text{ Ое}$. Оскільки в кубічному сантиметрі знаходиться приблизно 10^{22} електронів провідності, то це означає, що за появу НП відповідає зміна в енергії $\sim 10^5 \text{ ерг}/10^{22} \text{ електрон} \approx 10^{-17} \text{ ерг/електрон} \sim 10^{-5} \text{ eV/електрон}$. Якщо порівняти цю енергію з кулонівською енергією міжелектронної взаємодії, що складає $\sim 1 \text{ eV}$, то вона виключно мала і часто нехтування подібними величинами дозволяє прекрасно описувати ті чи інші явища. Таким чином, треба було пояснити щось таке, що відбуваєть-

ся з електронною підсистемою провідника (ми це “щось” називали *впорядкуванням*), чому відповідала енергія, на багато порядків нижча за енергію інших відомих взаємодій, і чим зазвичай нехтують.

Перший прями́й натяк на можливу природу механізму НП був отриманий після відкриття так званого *ізотопічного ефекту*, про який ми вже згадували. Він полягав у тому, що різні ізотопи одного НП металу мають різні критичні температури, причому виконується залежність

$$T_c M^\alpha = \text{const} ,$$

в якій степінь α – показник ізотоп-ефекту, як правило, близький до 1/2. Саме значення $\alpha = 1/2$ називається (або ϵ) канонічним і з ним (тобто з 1/2-ою) порівнюють всі значення, що вимірюються в експерименті. Фактично цей ефект гласить, що для ізотопів НП речовини з масами M і $M + \Delta M$ виконується рівність

$$T_c M^\alpha = (T_c + \Delta T_c)(M + \Delta M)^\alpha ,$$

з якої, враховуючи малість змін, просто впливає зсув критичної температури для більш важкого ($\Delta M > 0$) матеріалу:

$$\Delta T_c \approx -\alpha \frac{\Delta M}{M} T_c .$$

Відкриття ізотоп-ефекту однозначно вказало на активну участь ґратки, а вірніше – коливань її іонного остову, у створенні НП стану. Подальший теоретичний аналіз продемонстрував, що взаємодія між електронами та коливаннями кристалічної ґратки може викликати додаткову взаємодію вже власне між електро-

нами¹. При певних умовах остання буде мати характер притягання. Якщо воно сильніше за міжелектронне кулонівське відштовхування, то у провіднику виникає ефективне притягання між носіями, результатом якого і буде НП, або більш впорядкований стан.

24.1. *Електрон-фононна взаємодія.* Розглянемо, як же взаємодіють електрони і фонони? Заради простоти спочатку припустимо, що метал знаходиться при температурі $T=0$, коли теплових фононів нема. Їх також нема, якщо ґратку ніщо не збурює, або з нею ніщо не взаємодіє. Коли ж в ній рухається електрон, що має хвильовий вектор \mathbf{k}_1 , він може “налетіти” на нерухомий іон і завдяки процесу розсіяння перейти в інший стан з хвильовим вектором \mathbf{k}'_1 . В такому випадку кажуть, що електрон народив фонон (до розсіяння останній був відсутній). Ґратка є трансляційно інваріантною, тому в ній має виконуватись закон збереження імпульсу:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{q}.$$

Далі – цей фонон може бути поглинений другим електроном з хвильовим вектором \mathbf{k}_2 , змусивши його перейти в стан \mathbf{k}'_2 . Оскільки фонон при цьому народився і зник, повинні бути рівними спільні імпульси електронів до і після розсіяння:

¹Зауважимо, що у системах ВТНП ізотоп-ефект майже не спостерігається, що деякими дослідниками інтерпретується як свідчення на користь інших взаємодій, які призводять до появи НП конденсату при високих критичних температурах. Проте остаточно відповідне питання не з'ясоване.

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2.$$

В той же час прийнято вважати, що таке розсіяння відповідає електрон-електронному процесу, або, іншою мовою, електрон-електронній взаємодії, яка може бути охарактеризована діаграмою (рис. 17.1):

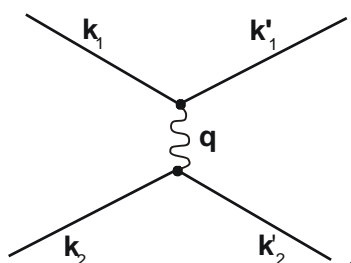


Рис. 17.1

Який же знак цієї взаємодії?

В момент, коли електрон переходить з стану \mathbf{k}_1 у стан \mathbf{k}'_1 виникає коливання електронної густини з частотою

$$\omega = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}'_1)}{\hbar},$$

де $\varepsilon(\mathbf{k}_1)$ і $\varepsilon(\mathbf{k}'_1)$ – енергії початкового і кінцевого станів електрона.

Припустимо, що в результаті такого коливання густини електронів у деякому місці відбулося локальне зростання їх кількості. Тоді й позитивні іони ґратки відчують на собі тимчасовий потенціал притягання, що таким чином виник в цьому місці. З цієї причини вони почнуть рухатися до нього і, маючи відносно ве-

лику масу, будуть по інерції продовжувати свій рух навіть після компенсації локального збільшення від'ємного заряду, що, в свою чергу, призведе до лишку позитивного заряду в цьому ж місці. Тепер воно стає центром притягання для електронів, куди вони намагатимуться перетекти з оточуючих областей. Все це дозволяє характеризувати таку динамічну картину як виникнення ефективної міжелектронної взаємодії притягального характеру.

Необхідно, проте, зауважити, що притягання за описаною схемою з'являється лише у тому випадку, коли коливання ґратки є вимушеними та відбуваються у фазі з силою, що їх викликала (тобто у фазі з коливаннями, частота яких наведена вище і які відповідають коливаннями електронної густини). Цій умові можна задовольнити, якщо частота вимушуючої сили менше за власну частоту іонної підсистеми. Для останньої характерною є так звана частота Дебая Ω_D , що визначає максимальну частоту ґраткових коливань (їй відповідає мінімальна довжина хвилі, що дорівнює двом періодам ґратки). Нагадаю, що у континуальній моделі (тобто моделі суцільного середовища) величина Ω_D вводиться з умови нормування, або задання числа осциляторів, що знаходяться в одиниці об'єму. Повертаючись до ефективної міжелектронної взаємодії, приходимо до висновку, що вона виникає для усіх частот, що задовольняють нерівності $\omega < \Omega_D$.

Розглянемо простий осцилятор з масою M та власною частотою Ω_0 , який знаходиться під дією вимушуючої сили $F \exp(i\omega t)$. Розв'язок рівняння руху

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F}{M} e^{i\omega t},$$

має вигляд $x(t) = x_0 \exp(i\omega t)$, де

$$x_0 = \frac{F/M}{\Omega_0^2 - \omega^2}$$

– амплітуда вимушених коливань осцилятора. Видно, що поки виконується нерівність $\omega < \Omega_0$, знак амплітуди, або фаза цих коливань, співпадає із знаком (тобто фазою) сили F . Коли ж, навпаки, $\omega > \Omega_0$, то знак амплітуди коливань осцилятора стає протилежним знаку сили (як кажуть, коливання відбуваються у протифазі до вимушуючої сили).

Якщо повернутися до електронів, то видно, що для того, щоб електрон міг перейти до стану \mathbf{k}'_1 з вихідного стану \mathbf{k}_1 , перше, насамперед, має бути вільним (принцип Паулі). Таке можливо, як відомо, лише поблизу поверхні (або в околі енергії) Фермі ε_F , яку ми зобразимо у вигляді сфери радіусу k_F у \mathbf{k} -просторі. Тоді неважко сформулювати правило взаємодії електронів через фонони (або із залученням фононів, або, нарешті, через взаємодію з ними), яке лежить в основі теорії БКШ: електрони, енергії яких відрізняються від енергії фермівських електронів не більше, ніж на величину $\hbar\Omega_D$, притягуються один до одного. Енергія цього ефективного притягання позначається $-V$. Усі інші електрони продовжують відштовхуватися (чи цим відштовхуванням можна знехтувати).

Запишемо сформульоване правило у такий спосіб:
матричний елемент взаємодії різних електронів

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \begin{cases} -V, & \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_F \leq \hbar\Omega_D, \quad \varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon_F \leq \hbar\Omega_D; \\ 0, & \varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_F \geq \hbar\Omega_D, \quad \varepsilon(\mathbf{k}') - \varepsilon_F \geq \hbar\Omega_D. \end{cases}$$

Іншою мовою, взаємне притягання відчують лише ті електрони, стани яких лежать у вузькому сферичному шарі, навколо фермівської енергії; його товщина $2\Delta k$ (рис. 17.2) відповідає енергії $2\hbar\Omega_D$:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F + \Delta\mathbf{k})^2}{2m} - \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_F - \Delta\mathbf{k})^2}{2m} \approx \\ & \approx \frac{4\hbar^2\mathbf{k}_F\Delta\mathbf{k}}{2m} \approx \frac{4\hbar^2k_F\Delta k}{2m} = 2\hbar\omega_D, \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{2\Delta k}{k_F} = \frac{\hbar\Omega_D}{\varepsilon_F}.$$

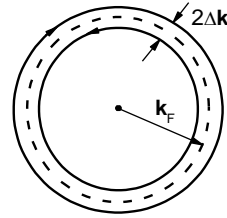


Рис. 17.2

На більш сучасній мові вихідним для отримання ефективної взаємодії є гамільтоніан (або оператор), що відповідає взаємодії електрона з деформацією, яку він викликав у ґратці. Запишемо енергію електрона у найпростішому вигляді:

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m},$$

де m – насправді, ефективна маса. Нехай у кубічному кристалі відбулася деформація, що описується тензором u_{jk} ; тоді

$$\varepsilon(\mathbf{k}) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{k}) + C_{jk}u_{jk} + O(\mathbf{k}).$$

У найпростішому випадку обраного нами кубічного кристалу енергія не має зсувних ($j \neq k$) компонент деформаційного тензору, а діагональні є рівними між собою, що дозволяє представити енергію електрона у деформованому кристалі у вигляді

$$\varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = \varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph}\Delta v,$$

де Δv – відносна зміна об'єму.

Якщо деформація неоднорідна, то просте узагальнення дає

$$\varepsilon(\mathbf{k}) + g_{el-ph}\Delta v(\mathbf{r}).$$

У представленні вторинного квантування оператор електрон-граткової взаємодії

$$\begin{aligned} H_{int} &= \int d\mathbf{r} \Psi^+(\mathbf{r}) g_{el-ph} \Delta v(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = \\ &= g_{el-ph} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} c^+(\mathbf{k}_2) c(\mathbf{k}_1) \langle \mathbf{k}_2 | \Delta v(\mathbf{r}) | \mathbf{k}_1 \rangle, \end{aligned}$$

де $|\mathbf{k}\rangle = (1/\sqrt{N})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – блохівські функції з $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ – періодичними функціями. Як відомо

$$\Delta v(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\sqrt{2MN\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}| [e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} a(\mathbf{q}) - e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} a^+(\mathbf{q})],$$

де $a^+(\mathbf{q})$ – оператор народження фонона з хвильовим вектором \mathbf{q} та частотою $\Omega(\mathbf{q})$. Це дає:

$$H_{int} = i \frac{g_{el-ph}}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{1}{\sqrt{2MN\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}| \int d\mathbf{r} [u_{\mathbf{k}_2}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q})\mathbf{r}} -$$

$$-h.c.]c^+(\mathbf{k}_2)c(\mathbf{k}_1),$$

причому $\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})c(\mathbf{k})$. Враховуючи тепер лише нормальні процеси, тобто такі, для яких $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{q} = 0$, знайдемо, що

$$H_{\text{int}} = i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} D(\mathbf{k}, \mathbf{q}) c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})],$$

де використане позначення

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = g_{el-ph} \frac{u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^* u_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2M\Omega(\mathbf{q})}} |\mathbf{q}|$$

із середніми по комірни значеннями функцій $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \approx u_{\mathbf{k}}$. З отриманого оператора збурення випливає, що стан електрона з даним \mathbf{k} не є стаціонарним і що електрон постійно перерозсіюється внаслідок незупинних зіткнень з квантами поля деформацій. А оскільки актуальними для НП виявляються електронні стани, які мають бути такими, що $|\mathbf{k}| \approx |\mathbf{k} + \mathbf{q}| \approx k_F$, оператор взаємодії прийнято спрощувати до вигляду:

$$H_{\text{int}} = i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q}) c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})],$$

тому що при цьому спрацьовують також лише вектори $|\mathbf{q}| \rightarrow 2\pi/a$ (тобто брилюєнівські). Тоді остаточно оператор Гамільтона для НП приймає форму:

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

де

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) c^+(\mathbf{k}) c(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{q}} \Omega(\mathbf{q}) a^+(\mathbf{q}) a(\mathbf{q}).$$

Його подальше перетворення здійснюється за допомогою канонічного унітарного оператора \mathcal{S} згідно формальному розкладу:

$$\tilde{H} = H_0 + [\eta H_{\text{int}}, \mathcal{S}] + \frac{1}{2} [[H_0, \mathcal{S}] \mathcal{S}] + \dots = H_0 + \frac{\eta}{2} [H_{\text{int}}, \mathcal{S}].$$

Так, у випадку, коли

$$H = H_0 + \eta H_{\text{int}}; \quad [H_0, \mathcal{S}] = -\eta H_{\text{int}},$$

унітарний оператор \mathcal{S} вибирається з умови компенсації збурення першого порядку по малому параметру $\eta \ll 1$, або

$$[H_0, \mathcal{S}] + \eta H_{\text{int}} = 0.$$

Якщо врахувати, що незбурений оператор (або оператор нульового порядку) H_0 є діагональним по своїх квантових числах, то з останнього співвідношення легко отримуємо:

$$\langle n | \mathcal{S} | m \rangle = \eta \frac{\langle n | H_{\text{int}} | m \rangle}{E_m - E_n}.$$

Це дає можливість записати

$$H \rightarrow \tilde{H} \equiv e^{-\mathcal{S}} H e^{\mathcal{S}} = H + [H, \mathcal{S}] + \frac{1}{2} [[H, \mathcal{S}] \mathcal{S}] + \dots.$$

Щоб виявити ефективний зв'язок між електронами, зручно обчислювати матричні елементи для фононних операторів, залишаючи електронні у явному вигляді (повторю, що наша мета – отримання ефективного гамільтоніану електронів, що не вміщує електрон-фононної взаємодії, тільки міжелектронну).

Вважатимемо, що система фононів знаходиться при температурі $T = 0$, що означає рівність одного з індексів n або m нулеві (тобто вакуумному індексу). Отже, маємо:

$$\begin{aligned} \langle 1_q | \mathcal{S} | vac \rangle &= -i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} c^+(\mathbf{k}-\mathbf{q})c(\mathbf{k}) \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}-\mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})}; \\ \langle vac | \mathcal{S} | 1_q \rangle &= i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} c^+(\mathbf{k}+\mathbf{q})c(\mathbf{k}) \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})}. \end{aligned}$$

В результаті, можна записати:

$$\begin{aligned} \tilde{H} \equiv H_{eff} &= H_0 + \frac{1}{2} (H_{int} \mathcal{S} - \mathcal{S} H_{int}) \rightarrow \\ &\rightarrow H_0 + \frac{1}{2} (\langle vac | H_{int} \mathcal{S} | vac \rangle - \langle vac | \mathcal{S} H_{int} | vac \rangle), \end{aligned}$$

або у явному виразі –

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}+\mathbf{q})c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})] \mathcal{S} - \\ &- \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \mathcal{S} c^+(\mathbf{k}+\mathbf{q})c(\mathbf{k}) [a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q})] = \\ &= \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}+\mathbf{q})c(\mathbf{k}) \langle vac | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | 1_q \rangle \langle 1_q | \mathcal{S} | vac \rangle - \\ &- \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \langle vac | \mathcal{S} | 1_{-q} \rangle c^+(\mathbf{k}+\mathbf{q})c(\mathbf{k}) \langle 1_{-q} | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | vac \rangle. \end{aligned}$$

Легко бачити, що

$$\langle vac | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | 1_q \rangle = - \langle 1_{-q} | a(\mathbf{q}) - a^+(-\mathbf{q}) | vac \rangle = 1,$$

тому можна продовжити:

$$\begin{aligned}
 H_{eff} &= H_0 + \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[-i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q})c(\mathbf{k})c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} \right] + \\
 &+ \frac{i}{2} \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[i \frac{D}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q})c(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})} \right] = \\
 &= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \frac{c^+(\mathbf{k} + \mathbf{q})c(\mathbf{k})c^+(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} - \\
 &\quad - \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} \frac{c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}_1) - \varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})}.
 \end{aligned}$$

Тепер, якщо у першому доданку поміняти $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}_1$, а у другому $-\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$, то приходимо до остаточного виразу:

$$\begin{aligned}
 H_{eff} &= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}) \times \\
 &\times \left[\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q}) - \Omega(\mathbf{q})} - \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \Omega(\mathbf{q})} \right] = \\
 &= H_0 + \frac{D^2}{2N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}) \times \\
 &\quad \times \frac{\Omega(\mathbf{q})}{[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 - \Omega^2(\mathbf{q})}.
 \end{aligned}$$

Остання дріб свідчить, що коли її знаменник $[\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 < \Omega^2(\mathbf{q})$, то ефективна взаємодія, яка

визначається отриманою поправкою другого порядку, виявляється від'ємною, або такою, що відповідає притяганню. В цьому випадку дійсно, можна записати:

$$H_{eff} = H_0 + V_{eff},$$

де

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c(\mathbf{k}_1)c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c(\mathbf{k}),$$

при умові, що $V \approx D^2 / \Omega_D > 0$ і відповідає притяганню тільки фермівських електронів (вірніше, як ми казали, в околі енергії Фермі). Виведений оператор взаємодії прийнято називати модельним гамільтоніаном БКШ, або, що теж справедливо, БКШ-Боголюбова (радянський фізик-теоретик М.М. Боголюбов отримав для цього гамільтоніану низку важливих результатів).

Запишемо ефективну взаємодію у канонічному вигляді, для чого введемо спільний $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{k}_1$ та відносний $\mathbf{p} = (1/2)(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$ імпульси електронів пари:

$$\begin{aligned} V_{eff} &= -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} c^+(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q})c^+(\mathbf{k} - \mathbf{q})c^+(\mathbf{k})c(\mathbf{k}_1) = \\ &= -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{K}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} c^+(\frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{p} + \mathbf{q})c^+(\frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{p} - \mathbf{q})c(\frac{\mathbf{K}}{2} + \mathbf{p})c(\frac{\mathbf{K}}{2} - \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Зазвичай обмежуються розглядом пар з $\mathbf{K} = 0$ (нерухомий конденсат); тоді приходимо до оператора

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} c^+(-\mathbf{p} + \mathbf{q})c^+(\mathbf{p} - \mathbf{q})c(\mathbf{p})c(-\mathbf{p}),$$

що тотожно дорівнює

$$V_{eff} = -\frac{V}{N} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} c_{\uparrow}^+(\mathbf{k}_1) c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}_1) c_{\downarrow}(-\mathbf{k}_2) c_{\uparrow}(\mathbf{k}_2),$$

де ми для повноти врахували спін електронів і те, що пари утворюються у синглетному стані з спіном $S_{pair} = 0$. Додамо, що існують НП, в яких пари несуть і скінчений спін, $S_{pair} = 1$, але ми такі системи не розглядатимемо.