

Лекція 19

27. Метод рівнянь руху

Покажемо, як та сама задача (про знаходження енергії системи) може бути розв'язана по-іншому, більш сучасними методами. Запишемо для цього модельний оператор БКШ у вигляді:

$$H_{BCS} = \sum_{|\mathbf{k}|>0} \varepsilon(\mathbf{k}) [c^+(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) + c^+(-\mathbf{k})c(-\mathbf{k})] - V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} c^+(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k})c(-\mathbf{q})c(\mathbf{q}),$$

де значок у суми, як ми вже визначали, свідчить, що сумування ведеться в обмеженому інтервалі імпульсного простору. Тепер, враховуючи, що $c(\mathbf{k})$ – це фермі-оператори (тобто $c(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) = 0$), запишемо для них стандартні рівняння руху:

$$i\dot{c}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - c^+(-\mathbf{k})V \sum_{\mathbf{q}} c(-\mathbf{q})c(\mathbf{q});$$

$$i\dot{c}^+(-\mathbf{k}) = -\varepsilon(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) + c(\mathbf{k})V \sum_{\mathbf{q}} c^+(\mathbf{q})c^+(-\mathbf{q}).$$

Слідом за М.М. Боголюбовим введемо величини

$$B(\mathbf{k}) = \langle 0 | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | 0 \rangle = -B(-\mathbf{k});$$

$$B^*(\mathbf{k}) = \langle 0 | c^+(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) | 0 \rangle.$$

Їх треба розуміти в тому сенсі, що правильна хвильова функція основного стану НП є невизначеною відносно кількості частинок у ньому, тобто складається з функцій з різним N , а отже має місце відповідність

$$\langle 0 | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | 0 \rangle \rightarrow \langle N | c(-\mathbf{k})c(\mathbf{k}) | N+2 \rangle$$

і т.д.

Тепер, повертаючись до виписаних рівнянь, видно, що в них виникає та ж сама величина $\Delta_S(0) = V \sum_{\mathbf{q}} B(\mathbf{q})$, з використанням якої вони набувають вигляду:

$$i\dot{c}(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - \Delta_S(0)c^+(-\mathbf{k});$$

$$i\dot{c}^+(-\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})c^+(-\mathbf{k}) + \Delta_S^*(0)c(\mathbf{k})$$

і яка дозволяє при знаходженні шуканої величини енергії перетворити його на матричний

$$\begin{vmatrix} E_{\mathbf{k}} - \varepsilon(\mathbf{k}) & \Delta_S(0) \\ \Delta_S^*(0) & E_{\mathbf{k}} + \varepsilon(\mathbf{k}) \end{vmatrix} = 0; \quad E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_S(0)|^2},$$

де припущено, що $c(\mathbf{k}) \propto \exp(-iE_{\mathbf{k}}t)$. Власні вектори цієї системи рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \\ \alpha_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}) = v_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}); \\ \alpha_{\uparrow}^+(\mathbf{k}) = -v_{\mathbf{k}}c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}c_{\uparrow}(\mathbf{k}), \end{cases}$$

в яких для повноти і загальності врахована спінова змінна. Обернені співвідношення мають вигляд:

$$\begin{cases} c_{\uparrow}(\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \\ c_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}) = v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^+(-\mathbf{k}); \\ \\ c_{\downarrow}(-\mathbf{k}) = u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^+(\mathbf{k}); \\ c_{\uparrow}^+(\mathbf{k}) = -v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) + u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^+(\mathbf{k}). \end{cases}$$

Звідси видно, що якщо оператори $\alpha_{\sigma}(\mathbf{k})$, де σ – спін, відповідають **власним** (елементарним) збудженням НП, то введена вище величина

$$\begin{aligned} B(\mathbf{k}) &= \langle 0 | c_{\downarrow}(-\mathbf{k})c_{\uparrow}(\mathbf{k}) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | [u_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}(-\mathbf{k}) - v_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}^+(\mathbf{k})][u_{\mathbf{k}}\alpha_{\uparrow}(\mathbf{k}) + v_{\mathbf{k}}\alpha_{\downarrow}^+(-\mathbf{k})] | 0 \rangle = u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

виявляється скінченою лише при обох скінчених коефіцієнтах $u_{\mathbf{k}}$ і $v_{\mathbf{k}}$.

Нові оператори зберігають свою фермівську статистику, коли $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$, що, як ми бачили, виконується. Підставляючи їх у рівняння руху і зважаючи на те, що ці змінні вже незалежні, приходимо до рівняння

$$E_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} = \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}} + \Delta_S(0)v_{\mathbf{k}}$$

для uv -коефіцієнтів, яке необхідно розв'язати при тій же умові $u_{\mathbf{k}}^2 + v_{\mathbf{k}}^2 = 1$. Це легко зробити, якщо взяти від нього квадрат; дійсно

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{k}}^2u_{\mathbf{k}}^2 &= \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^2 + 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_S(0)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} + \Delta_S^2(0)v_{\mathbf{k}}^2; \\ [\varepsilon^2(\mathbf{k}) + \Delta_S^2(0)]u_{\mathbf{k}}^2 &= \varepsilon(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}^2 + 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_S(0)u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} + \Delta_S^2(0)v_{\mathbf{k}}^2; \end{aligned}$$

$$\Delta_S^2(0)(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) = 2\varepsilon(\mathbf{k})\Delta_S^2(0)u_{\mathbf{k}}^2v_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow \frac{u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}}{1-2v_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\Delta_S(0)}{2\varepsilon(\mathbf{k})},$$

а останнє рівняння ми щойно аналізували. Таким чином, обидва підходи дають один і той же результат.

28. Енергія основного стану

28.1. *Надпровідна щілина.* Як ми вже могли впевнитись, вираз

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right]$$

мінімізує енергію, яку спробуємо обчислити. Для цього спочатку знайдемо величину $\Delta_S(0)$, яка отримала назву *надпровідної щілини*. Згідно її визначенню, приходимо до виразу

$$\begin{aligned} |\Delta_S(0)| &= V \sum_{\mathbf{q}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{q})}{E_{\mathbf{q}}} \right] \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon(\mathbf{q})}{E_{\mathbf{q}}} \right] \right\}^{1/2} = \\ &= \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} \cdot \sqrt{\frac{E_{\mathbf{q}}^2 - \varepsilon^2(\mathbf{q})}{E_{\mathbf{q}}^2}} = \frac{V |\Delta_S(0)|}{2} \sum_{\mathbf{q}} \cdot \frac{1}{E_{\mathbf{q}}}, \end{aligned}$$

де явно використане введене означення $E_{\mathbf{q}}^2 = \varepsilon^2(\mathbf{q}) + |\Delta_S(0)|^2$. Саме останнє розкриває смисл назви *щілина*: спектр елементарних збуджень НП визначається дисперсією віток $E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_S(0)|^2}$, і видно, що їх енергія на

відміну від енергії $\varepsilon(\mathbf{k})$ нормальної фази ніде не дорівнює нулеві. Більше того, на Фермі-поверхні, де $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$ і $\varepsilon(\mathbf{k}_F) = 0$, виникає розщеплення $2|\Delta_S(0)|$, яке і визначає щілину між вітками $\pm E_{\mathbf{k}}$. Припускаючи, що вона скінчена, $\Delta_S(0) \neq 0$, приходимо до остаточного рівняння

$$1 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{q}) + |\Delta_S(0)|^2}}$$

для знаходження її шуканої величини, яке, взагалі кажучи, відрізняється від рівняння (див. Лекцію 18)

$$1 = V \int_{2\varepsilon_F}^{2\varepsilon_{\max}} dv \frac{\rho(v)}{v - \lambda},$$

отриманого нами при знаходженні енергії зв'язаного двоелектронного стану куперівської задачі. Різниця особливо чітко виявляється, коли від сумування перейти до інтегрування, а саме:

$$\sum_{\mathbf{q}} \dots \rightarrow \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \rho(v) \dots,$$

де в обох випадках $\rho(v)$ – густина електронних станів. Отже, маємо

$$1 = \frac{V}{2} \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \frac{\rho(v)}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} \approx \frac{\rho_F V}{2} \int_{-\hbar\Omega_D}^{\hbar\Omega_D} dv \frac{1}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} =$$

$$= \rho_F V \int_0^{\hbar\Omega_D} dv \frac{1}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}}$$

і ми знову поклали, що $\rho(v) \rightarrow \rho(\varepsilon_F) \equiv \rho_F$ – густина фермівських станів. Останній інтеграл табличний, тому отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_F V} &= \text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} &= sh \frac{1}{\rho_F V} = \frac{1}{2} (e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}). \end{aligned}$$

Як і вище, можемо навести відповіді для двох випадків – слабкого ($\rho_F V \ll 1$) і сильного ($\rho_F V \gg 1$) зв'язків. У першому НП щілина

$$|\Delta_S(0)| = 2\hbar\Omega_D e^{-1/\rho_F V},$$

а у другому –

$$|\Delta_S(0)| = \hbar\Omega_D \rho_F V.$$

Іншими словами, за своїм змістом ці результати нагадують ті, що ми мали для задачі Купера, але тут ми розглянули метал з притяганням між електронами, а не два окремих електрони у морі інших. Цікаво зробити оцінки: покладаючи $\hbar\Omega_D \approx 10^2$ К і, скажімо, $\rho_F V \approx 0.3$, знаходимо, що НП щілина $|\Delta_S(0)| \approx 4$ К, де всі величини виявляються такими, як це і є насправді.

28.2. Зсув енергії надпровідного стану. Знаючи величину щілини $\Delta_S(0)$ та коефіцієнти uv -перетворення, обчислимо енергію основного НП стану, яка має бути нижчою за енергію основного стану нормальної фази. Для цього запишемо загальний вираз

$$E_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{kq}} v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}},$$

який ми вже обговорювали. Коли притягання немає і система знаходиться у N -стані, її енергія визначається сумою

$$E_N = 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}),$$

оскільки при $T = 0$ всі електрони займають стани до самого рівня Фермі, а двійка показує, що враховуються пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Якщо енергію НП відраховувати від енергії нормального стану, то це означає, що треба розрахувати положення E_S відносно E_N , або знайти зсув

$$\begin{aligned} E_S - E_N \equiv \Delta E &= 2 \left(\sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} + \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \right) \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} V_{\mathbf{kq}} v_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{q}} - 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) = \\ &= 2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) (v_{\mathbf{k}}^2 - 1) + 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} = \\ &= -2 \sum_{|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|} |\varepsilon(\mathbf{k})| \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{|\varepsilon(\mathbf{k})|}{E_{\mathbf{k}}} \right] - 1 \right\} + \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right] - \Delta_S^*(0) \frac{\Delta_S(0)}{V}.$$

де ми явно врахували, що всередині Фермі-сфери, $|\mathbf{k}| \leq |\mathbf{k}_F|$, енергія $\varepsilon(\mathbf{k}) = -|\varepsilon(\mathbf{k})|$, оскільки ε від'ємною, а також означення $\Delta_S(0)$. Зробивши, на-решті, просте скорочення і перевизначивши (що тепер можна зробити) сумування, приходимо до наступного виразу

$$\Delta E = 2 \sum_{|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|} \varepsilon(\mathbf{k}) \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} \right] - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V},$$

в якому також зручно перейти до інтегрування:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2 \int_0^{\hbar\Omega_D} dv \rho(v) \left(v - \frac{v^2}{\sqrt{v^2 + |\Delta_S(0)|^2}} \right) - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V} = \\ &= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \int_0^{\hbar\Omega_D/|\Delta_S(0)|} dx \left(x - \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}. \end{aligned}$$

Перший інтеграл елементарно береться, а у другому і третьому зробимо заміну $x = \text{sh}t$; тоді $\sqrt{x^2 + 1} = \text{ch}t$ і $dx = \text{ch}t dt$, після чого маємо:

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \int_0^{\text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|}} dt (\text{ch}2t + 1) + \text{Arsh} \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right\} - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V} = \end{aligned}$$

$$= 2\rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{1}{4} sh2t \Big|_0^{Arsh \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} Arsh \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} + Arsh \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right] - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}.$$

Згадаємо, що $sh2t = 2shtcht = 2sht\sqrt{sh^2 + 1}$ і що $shArsha = a$, а також скористаємось рівнянням на щілину, з якого випливає, що $V^{-1} = \rho_F Arsh \hbar\Omega_D / |\Delta_S(0)|$. Отже, для шуканої різниці отримуємо

$$\Delta E = \rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \left[1 + \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + Arsh \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right\} - \rho_F |\Delta_S(0)|^2 Arsh \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} = \\ = \rho_F |\Delta_S(0)|^2 \left\{ \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 - \frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \left[1 + \left(\frac{\hbar\Omega_D}{|\Delta_S(0)|} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = \\ = \rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \left\{ 1 - \left[1 + \frac{|\Delta_S(0)|^2}{(\hbar\Omega_D)^2} \right]^{1/2} \right\} < 0,$$

оскільки другий доданок завжди переважає перший. Граничні випадки легко перевірити, якщо врахувати, що $sh(1/\rho_F V) = \Omega_D / |\Delta_S(0)|$; дійсно

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \{1 - [1 + sh^{-2} \dots]^{1/2}\} = \rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \left(1 - \frac{ch \dots}{sh \dots}\right) = \\
&= \rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \frac{e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V} - e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}}{e^{1/\rho_F V} - e^{-1/\rho_F V}} = \\
&= -2\rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \frac{1}{e^{2/\rho_F V} - 1} = \\
&= \begin{cases} -2\rho_F (\hbar\Omega_D)^2 e^{-2/\rho_F V} = -2\rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \left(\frac{|\Delta_S(0)|}{2\hbar\Omega_D}\right)^2 = \\ = -\frac{1}{2} \rho_F |\Delta_S(0)|^2, & \rho_F V \ll 1; \\ -2\rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \frac{\rho_F V}{2} = -\rho_F (\hbar\Omega_D)^2 \frac{|\Delta_S(0)|}{\hbar\Omega_D} = \\ = -\rho_F \hbar\Omega_D |\Delta_S(0)| = -\frac{|\Delta_S(0)|^2}{V}, & \rho_F V \gg 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

З цих результатів випливає: внаслідок того, що завдяки щілині НП стан завжди енергетично вигідніший за нормальний, металічна система при певних температурах завжди обере тільки його.

Закінчимо цей розділ тим, що згадаємо, що у феноменологічній теорії різниця вільних енергій нормального і НП станів при $T < T_c$ дорівнює $H_{cm}^2(T)/8\pi$, де $H_{cm}(T)$ – критичне термодинамічне магнітне поле руйнування НП. Це, в свою чергу, означає, що для нульової критичної температури і найбільш цікавого з точки зору реальних надпровідників випадку слабого зв'язку має виконуватися співвідношення

$$\frac{H_{cm}^2(0)}{8\pi} = \frac{1}{2} \rho_F |\Delta_S(0)|^2,$$

з якого прямо знаходимо співвідношення

$$H_{cm}(0) = \sqrt{4\pi\rho_F} |\Delta_S(0)|.$$

Іншою мовою, поле критичне термодинамічне поле безпосередньо зв'язане з НП щілиною, а отже залежить від параметрів електронної системи, а також її взаємодії з фононами.

Зробимо прості оцінки: як правило, 1 см^3 металу вміщує $\approx 10^{22}$ електронів, а ширина зони провідності стандартного металу складає приблизно $10 \text{ eV} \approx 10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ ерг}$, тобто на поверхні Фермі $\rho_F \approx 10^{22}/10 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12} \approx 10^{33} \text{ ерг}^{-1}\text{см}^{-3}$. В результаті, припускаючи, що $|\Delta_S(0)| \approx 10 \text{ К} \approx 10^{-15} \text{ ерг}$, знаходимо, що $H_{cm}(0) \approx 10^{15} (10^{34})^{1/2} \approx 10^2 \text{ ерстед}$, або вельми розумну величину.

29. Спектр елементарних збуджень надпровідника

29.1. *Фізичні наслідки появи надпровідної щілини.*
У попередньому розділі ми ввели поняття про одну з найважливіших характеристик НП – надпровідну щілину, передбачену теорією БКШ. Її (щілини) наступне експериментальне відкриття стало тріумфом теорії. НП щілина, що з'являється в електронному спектрі металів, які зазнають НП перехід, виявилась настільки важливою для розуміння явища НП в цілому, що нижче ми продовжимо вивчення її основних наслідків.

Спочатку з'ясуємо питання про елементарні збудження НП та їх енергію. Для цього виберемо стан пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ в імпульсному просторі, вважаючи, що сам НП знаходиться у своєму основному стані. Який внесок робить саме ця пара у загальну енергію системи? Позначаючи цей внесок $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$, знайдемо його із повної енергії E_S :

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} = 2\varepsilon(\mathbf{k})v_{\mathbf{k}}^2 - 2Vu_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}v_{\mathbf{q}},$$

де коефіцієнт 2 відображає симетрію суми відносно заміни $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{q}$. Перший доданок при цьому – це кінетична енергія пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$, а другий – поправка за рахунок процесів взаємодії з рештою усіх інших пар, коли вибрана пара переходить у стан $\{\mathbf{q}, -\mathbf{q}\}$, і навпаки, коли всі пари можуть породити пару саме в стані $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$. Підставимо у $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$ явний вираз для коефіцієнтів uv -перетворення:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} &= 2\varepsilon(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}}\right] - 2 \left\{ \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\varepsilon^2(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}^2}\right] \right\}^{1/2} |\Delta_S(0)| = \\ &= \varepsilon(\mathbf{k}) - \frac{\varepsilon^2(\mathbf{k})}{E_{\mathbf{k}}} - \frac{|\Delta_S(0)|^2}{E_{\mathbf{k}}} = \varepsilon(\mathbf{k}) - E_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Це внесок окремої пари, яким ми скористуємось, щоб визначити внесок її “складової” – одного електрону. Припустимо для цього, що у НП пара станів $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ є пустою, і помістимо у один із цих станів надлишковий електрон. Яка ж тепер буде енергія НП з надлишковим, тобто неспареним, електроном? Оскі-

льки електрон лише один, відповідна пара не може приймати участь у процесах електрон-електронного розсіяння, які, як ми знаємо, можуть знижувати енергію E_S НП. Внесок пари $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$ ми знайшли, а енергія системи з одним електроном буде визначатися співвідношенням

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(1)} = E_S - \Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)} + \varepsilon(\mathbf{k}).$$

Фактично ця проста, але глибока формула свідчить, що ми забрали пару, після чого добавили вільний електрон з енергією $\varepsilon(\mathbf{k})$, який прийнято називати *елементарним (квазічастинковим) збудженням* НП, або просто *квазічастинкою*. Використовуючи в останній формулі отриманий вираз для $\Delta E_{\mathbf{k}}^{(2)}$, маємо

$$\Delta E_{\mathbf{k}}^{(1)} = E_S - \varepsilon(\mathbf{k}) + E_{\mathbf{k}} + \varepsilon(\mathbf{k}) = E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon^2(\mathbf{k}) + |\Delta_S(0)|^2}.$$

Тим самим ми приходимо до важливого висновку: додаючи в систему один електрон, ми підвищуємо її енергію на величину $E_{\mathbf{k}}$, яка і визначає енергію квазічастинки у НП. При цьому її мінімальна енергія, або енергія фермівського елементарного збудження з $\mathbf{k} = \mathbf{k}_F$ (внаслідок того, що $\varepsilon(\mathbf{k}_F) = 0$), дорівнює як раз величині НП щілини $|\Delta_S(T)|$, максимальне значення якої відповідає $T = 0$. Це, в свою чергу, і означає, що основний стан НП відокремлений від усіх інших *щілиною*. На сучасній мові, кажуть, що при переході у НП стан *безмасові* квазічастинки металу стають *масивними*, тобто завдяки врахованій міжелектронній кореляції та її наслідку – щілині відбувається *генерація маси*.

Хоча викладені міркування формально правильні, виконати цей процес неможливо, бо у реальності ніхто внести у НП окремих електронів неможливо. Припустимо, що один з електронів пари $\{\mathbf{k}, -\mathbf{k}\}$ перейшов у стан з хвильовим вектором \mathbf{q} . Це означає, що з'явиться не один, а два неспарених вільних електронів у окремих станах \mathbf{q} і $-\mathbf{q}$, що у відповідності до наших аргументів вимагає енергії $\approx 2|\Delta_S(T)|$.

Пари знаходяться (як це називають, *сконденсовані*) на основному рівні, і надлишкові електрони там

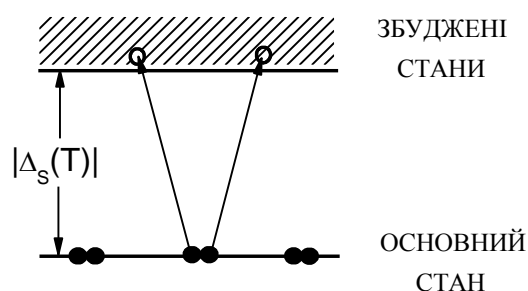


Рис. 19.1

з'явитися не можуть, оскільки це, образно кажучи, не їх місце. Розрив пари (див. рис. 19.1) супроводжується тим, що обидва електрони пари піднімуться на свої одночастинкові рівні, а відповідна щілина, що відокремлює основний стан НП від таким чином створеного, складає ту ж, наведену вище, величину $\approx 2|\Delta_S(T)|$ (відповідно по $\approx |\Delta_S(T)|$ на кожний неспарений електрон).

29.2. *Густина станів у НП.* При відомій енергії елементарних збуджень неважко розрахувати густину станів енергетичного спектру НП. Для цього, насамперед, треба записати енергію квазічастинок НП у явному вигляді (див. також рис. 19.2):

$$\begin{aligned}
 E_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F^2}{2m}\right)^2 + |\Delta_S(T)|^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{\hbar^4 \mathbf{k}_F^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2}{m^2} + |\Delta_S(T)|^2} \approx \\
 &\approx |\Delta_S(T)| \sqrt{1 + \frac{\hbar^4 \mathbf{k}_F^2}{m |\Delta_S(T)|^2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2} \approx \\
 &\approx |\Delta_S(T)| + \frac{\varepsilon_F}{|\Delta_S(T)|} \frac{\hbar^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)^2}{m}.
 \end{aligned}$$

Згідно визначенню густина квазічастинкових станів у кристалах в загальному випадку має наступний (з

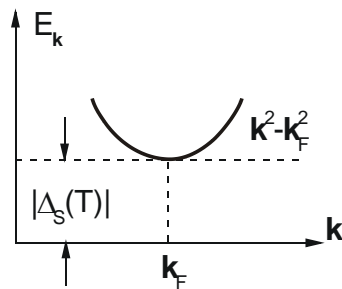


Рис. 19.2

точністю до несуттєвих коефіцієнтів) вигляд:

$$\rho(\nu) \propto \int \delta(\nu - E_{\mathbf{k}}) k^{D_{space}-1} dk,$$

де $\delta(\dots)$ – дельта-функція Дірака, а літерою D_{space} позначено можливо різну просторову розмірність системи.

У нашому випадку для тривимірної системи ($D_{space} = 3$) маємо інтеграл

$$\rho(\nu) \propto \int k^2 dk \delta[\nu - |\Delta_S(T)| + a^2(k - k_F)^2];$$

$$a^2 \equiv \hbar^2 \varepsilon_F / |\Delta_S(T)| m,$$

в якому можна зробити просту заміну змінних: $x = a^2(k - k_F)^2$; вона дає змогу записати

$$\rho(\nu) \propto \int \frac{dx}{x^{1/2}} \left(k_F + \frac{x^{1/2}}{a}\right)^2 \delta[\nu - |\Delta_S(T)| - x] \propto \frac{k_F^2}{\sqrt{\nu - |\Delta_S(T)|}},$$

де ми залишили лише головний доданок.

Таким чином, при всіх температурах $T < T_c$ поблизу НП щільності густини станів має різке збільшення (див. рис. 19.3). Цей же результат можна отримати у інший спосіб. Дійсно густина станів, або кількість рівнів на одиничний інтервал енергій в об'ємі 1 см^3 матеріалу $\rho(E) = dN_{level} / dE$, де dN_{level} – число власних рівнів в інтервалі dE біля енергії E . Для вихідного спектру поблизу

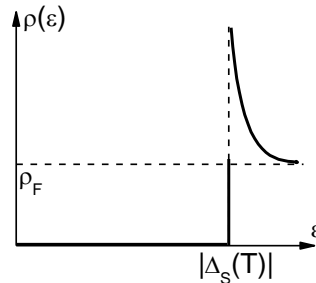


Рис. 19.3

ε_F є справедливою рівність $\rho(\varepsilon) = dN_{level} / d\varepsilon|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \rho_F$, тому в цілому для перебудованого внаслідок НП переходу спектра прямо маємо ту ж залежність для густини його станів:

$$\begin{aligned}\rho(E) &= \frac{dN_{level}}{dE} = \frac{dN_{level}}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dE} \approx \rho_F \frac{d}{dE} \sqrt{E^2 - |\Delta_S|^2} = \\ &= \rho_F \frac{E}{\sqrt{E^2 - |\Delta_S|^2}}; \quad (E^2 > |\Delta_S|^2).\end{aligned}$$

29.3. *Довжина когерентності.* Розрахуємо, нарешті, **довжину когерентності** з квантового підходу БКШ. Для цього згадаємо формулу для коефіцієнта для $v_{\mathbf{k}}^2$, який визначає розподіл спарених електронів у \mathbf{k} -просторі. Оскільки поблизу імпульсу Фермі функція

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F (\mathbf{k} - \mathbf{k}_F)}{m |\Delta_S(T)|} \right] \equiv \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F \Delta \mathbf{k}}{m |\Delta_S(T)|} \right]$$

веде себе досить плавно, область її зміни можна оцінити за співвідношенням (див. рис. 18.1) $\hbar^2 k_F \Delta k / m \approx 2 |\Delta_S(T)|$, звідки $\Delta k \sim 2 |\Delta_S(T)| m / \hbar^2 k_F \approx \approx k_F (|\Delta_S(T)| / \varepsilon_F)$. З іншого боку, співвідношення Гайзенберга, $|\Delta x| |\Delta p| \approx \hbar$ в якому

$$\begin{aligned}|\Delta x| &\sim \frac{1}{|\Delta k|} \sim \frac{\varepsilon_F}{|\Delta_S(T)| k_F} \approx \frac{\hbar^2 k_F^2}{2 m k_F |\Delta_S(T)|} \sim \\ &\sim \frac{\hbar p_F}{2 m |\Delta_S(T)|} = \frac{\hbar v_F}{2 |\Delta_S(T)|} = \xi_S(T) \equiv \xi_S\end{aligned}$$

– область простору, де суттєво змінюється параметр порядку у теорії Гінзбурга-Ландау, якому відповідає ψ -функція НП частинок. Тобто ми отримали повне співпадіння.

Якщо для оцінки знову покласти $|\Delta_S(0)| \sim 1$ К, $v_F \sim 10^8$ см/сек, то $\xi_S \sim 10^{-4}$ см, що також в повній мірі відповідає характерним експериментальним даним.