Лекція 5

Рівняння Лондонів

Ми продовжуємо вивчати рівняння Лондонів. В попередньому розділі було отримане перше з цих рівнянь.

5.2. *Друге рівняння Лондонів*. Воно задає зв'язок між надструмом і магнітним полем. Оскільки в загальному випадку магнітне поле і струм взаємозалежні, треба знайти рівняння, яке таку залежність встановлювало б для НП. В той же час, спираючись на експеримент, ми встановили, що магнітне поле у НП не проникає (ефект Мейсснера-Оксенфельда). Проте ми зазначали, що поля нема всередині НП, бо воно екранується (або компенсується) поверхневими надструмами. Тому говорити про повну відсутність поля можна лише у певному наближенні, нехтуючи поверхнею, яка, як фізичне середовище має скінчену товщину. Йдеться саме про приповерхневий шар (зазвичай він складає ~10^2–10^3 Å), який і є тим середовищем, де надструм визначається полем і навпаки.

Нехай, як і раніше, вільна енергія НП без поля є $F_S(0)$. Густину енергії електронів, що рухаються, можна представити у вигляді:

$$w_{kin} = \frac{m_f \mathbf{v}_S^2}{2} n_S = \frac{m_f e^2 \mathbf{v}_S^2}{2e^2} \frac{n_S^2}{n_S} = \frac{m_f}{2e^2 n_S} \mathbf{j}_S^2 \equiv \frac{\Lambda}{2} \mathbf{j}_S^2 .$$

Іншого току у НП нема, тому рівняння Максвела для НП приймає форму:

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S ,$$

за допомогою якої можна переписати w_{kin}. Але спочатку з'ясуємо, чому Лондони використали рівняння Максвела з надструмом, хоча повинен бути повний струм. Справа в тому, що як ми бачили з першого рівняння, в стаціонарних умовах у НП нема електричного поля, тому нормальні електрони рухатися, а значить – створювати вихорові магнітні поля неспроможні. В цьому полягає дотепність Лондонів, які записали рівняння Максвелла саме в такий спосіб, зрозумівши вирішальну роль НП колективу. Повертаючись до w_{kin}, знаходимо:

$$w_{kin} = \frac{c^2}{16\pi^2} \frac{\Lambda}{2} (rot\mathbf{H})^2 = \frac{c^2 m_f}{2 \cdot 16\pi^2 e^2 n_S} rot^2\mathbf{H} \equiv \frac{\lambda_L^2}{8\pi} rot^2\mathbf{H}$$

де введена трохи інша константа:

$$\lambda_L^2 \equiv \frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_S} = \frac{c^2}{4\pi} \Lambda .$$

Нагадаємо, що $\Lambda = m_f / e^2 n_S$.

З іншого боку, густина енергії магнітного поля є $\mathbf{H}^2 / 8\pi$, тому

$$F_S(\mathbf{H}) = F_S(0) + \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \int w_{kin} dV =$$

$$= F_S(0) + \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}^2 + \lambda_L^2 rot^2 \mathbf{H}) dV.$$

Це тільки повна вільна енергія, а її мінімум має відповідати реальному розподілу поля. Знайдемо цей мінімум, припустивши, що поле зазнає малу варіацію так, що

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \to \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \delta \mathbf{H}(\mathbf{r}).$$

Тоді

$$\delta F_S(\mathbf{H}) = \frac{1}{8\pi} \int (2\mathbf{H}\delta\mathbf{H} + 2 rot\mathbf{H} rot\delta\mathbf{H}) dV .$$

Використаємо векторну тотожність

$$div[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} rot\mathbf{a} - \mathbf{a} rot\mathbf{b},$$

що дає

$$div[rot\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] = \delta\mathbf{H} rotrot\mathbf{H} - rot\mathbf{H} rot\delta\mathbf{H},$$

звідки

$$rot\mathbf{H} rot\delta\mathbf{H} = rotrot\mathbf{H}\delta\mathbf{H} - div[rot\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}].$$

Підставимо:

$$\delta F_S(\mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} \int (H + \lambda_L^2 rotrot\mathbf{H}) \delta\mathbf{H} dV - \frac{\lambda_L^2}{4\pi} \int div[rot\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV .$$

До другого інтегралу застосуємо теорему Стокса:

$$\int div[rot\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] dV = \int_{sur} [rot\mathbf{H}, \delta\mathbf{H}] d\mathbf{S},$$

отримавши замість об'ємного поверхневий інтеграл. Оскільки при цьому поле на поверхні – це зовнішнє поле, тобто є заданим і для нього $\delta\mathbf{H}=0$, цей інтеграл не дає внеску в мінімальне значення вільної енергії. Таким чином, умова мінімуму приймає остаточний вигляд:

$$\int(\mathbf{H}+\lambda_L^2 rotrot\,\mathbf{H})\delta\mathbf{H}dV=0\,.$$

Як завжди, варіація $\delta\mathbf{H}$ є малою, але довільною, тому друге рівняння Лондонів є наступним:

$$\mathbf{H}+\lambda_L^2 rotrot\mathbf{H}=0\,.$$

Його можна трохи спростити. По-перше, з рівняння $rot\mathbf{H}=(4\pi/c)\mathbf{j}_S$ маємо $div\mathbf{j}_S=0$. По-друге:

$$\mathbf{H}+\lambda_L^2 rot\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_S=0\,,$$

або

$$rot\mathbf{A}+(4\pi/c)\lambda_L^2 rot\mathbf{j}_S=0\,,$$

де $\mathbf{A}$ – векторний потенціал. Звідси приходимо до зв'язку:

$$\mathbf{j}_S=-(c/4\pi\lambda_L^2)\mathbf{A}\equiv-\mathbf{A}/c\Lambda\,,$$

а також $div\mathbf{j}_S=div\mathbf{A}=0$, що свідчить, що лінії надструму неперервні. (Ще раз нагадаємо позначення: $\Lambda=4\pi\lambda_L^2/c^2;\lambda_L^2=m_f c^2/4\pi e^2 n_S$.)

6. Лондонівська глибина проникнення

Дослідимо, як за допомогою рівнянь Лондонів, можна знайти, чи проникає зовнішнє магнітне поле у НП. Для цього вважатимемо, що зразок займає область простору $x > 0$. Зовнішнє поле при цьому прикладене вздовж осі z. Тоді з другого рівняння

$$\mathbf{H}(x) + \lambda_L^2 rotrot\mathbf{H}(x) = 0$$

маємо (якщо врахуємо, що $rotrot\mathbf{a} = \nabla div\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}$, а також, що $div\mathbf{H} = 0$):

$$\mathbf{H}(x) - \lambda_L^2 \Delta\mathbf{H}(x) = 0,$$

чому в обраній геометрії відповідає рівняння:

$$\frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} H_z(x) = 0 .$$

Граничні умови для нього: $H_z(0) = H_0; H_z(\infty) = 0$, що відповідає ефекту Мейсснера-Оксенфельда, за яким поля у НП нема.

Нехай розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$H_z(x) = H_z(0)\exp(x/a) .$$

Тоді

$$H_z^{'}(x) = H_z(0)\exp(\frac{x}{a})\frac{1}{a}; \qquad H_z^{''}(x) = H_z(0)\exp(\frac{x}{a})\frac{1}{a^2} .$$

З рівняння знаходимо:

$$a^2 - \lambda_L^2 = 0 ,$$

або $a = \pm\lambda_L$.

Загальний вигляд розв'язку є таким:

$$H(x) = H_z^{(+)} e^{x/\lambda_L} + H_z^{(-)} e^{-x/\lambda_L} .$$

З граничних умов визначаємо невідомі коефіцієнти:

$$H_z(0) = H_z^{(+)} + H_z^{(-)} = H_0;$$
$$H_z(\infty) = H_z^{(+)} e^{\infty/\lambda} + H_z^{(-)} e^{-\infty/\lambda} = 0.$$

Це дає

$$H_z^{(+)} + H_z^{(-)} = H_0; \qquad H_z^{(+)} = 0;$$
$$H_z^{(+)} = 0. \qquad H_z^{(-)} = H_0.$$

а отже –

$$H_z(x) = H_0 e^{-x/\lambda_L} .$$

Таким чином, ми отримали, що поле проникає у НП на глибину (див. рис. 5.1)

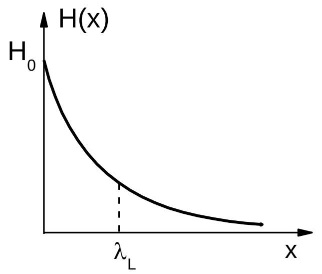

Рис.5.1

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_S}} ,$$

яка так і зветься – ***лондонівською глибиною проникнення*** магнітного поля.

Продемонструємо, що на таку ж глибину проникає і надструм, що фактично тече по поверхні. Дійсно, як ми говорили вище,

$$\mathbf{j}_S = \frac{c}{4\pi} rot\mathbf{H} .$$

По проекціях з операції rot :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix}; \quad j_{Sx} = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z(x)}{\partial y} = 0;$$

$$j_{Sy} = \frac{c}{4\pi}[-\frac{\partial H_z(x)}{\partial x}] = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}H_0 e^{-x/\lambda_L} = \frac{cH_0}{4\pi\lambda_L}e^{-x/\lambda_L};$$

$$j_{Sz} = 0.$$

При цьому λ_L – залежить від n_S, а $n_S = n_S(T)$. Експериментально встановлена формула

$$\lambda_L(T) = [1-(T/T_c)^4]^{-1/2}.$$

Оцінимо величину глибини проникнення. При $T=0$ величина n_S повинна відповідати густині електронів в металі, так що $n_S(0) \approx 10^{22} cm^{-3}$. Решта величин – це відомі константи:

$$c = 3\cdot 10^{10} cm/s; e = 4.8\cdot 10^{-10} un.CGSE, m_f \equiv m_e = 10^{-27} g.$$

Підставимо до $\lambda_L(0) = \sqrt{m_f c/4\pi n_S(0)e^2}$, звідки

$$\lambda_L(0) = \sqrt{\frac{10^{-27}\cdot 9\cdot 10^{20}}{4\cdot 3.14\cdot 4.8^2\cdot 10^{-20}\cdot 10^{22}}} \cong \sqrt{\frac{10^{-6}}{3.14\cdot 10^4}} \cong$$

$$\cong \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} cm = \frac{1000\ \mathring{A}}{\sqrt{3}} \approx 600\ \mathring{A}.$$

Порівняємо:

	Al	Cd	Hg	In	Nb	Pb	Sn	Tl
λ_L, Å	500	1300	380-450	640	470	390	510	920

Таким чином, по порядку величини формула для $\lambda_L(T)$ правильно дає відповідь на питання про “довжину” лондонівської глибини проникнення.

7. Нелокальна електродинаміка надпровідників

До цього моменту ми розглянули такий зв’язок струму і поля, який зветься локальним. Дійсно, рівняння Лондонів $-c\Lambda\mathbf{j}_S(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ пов’язує густину надструму з векторним потенціалом в одній і тій же точці. По суті це свідчить, що розмір носія менше, ніж характерна довжина λ_L, на якій відбувається зміна магнітних величин, зокрема, векторного потенціалу. Величину глибини проникнення ми щойно оцінили. А що таке розмір носія? Якщо б носіями в НП були електрони (чи дірки), то вони, безумовно, вважалися б точковими об’єктами. Але, як ми вже говорили, у НП елементарними носіями виявляються пари, про розмір яких вже можна говорити. Прийнято розмір пар у НП називати ***кореляційною довжиною*** і позначати її $\xi_S(T)$. В звичайних НП металах ця довжина складає $\xi_S(0) \sim 10^3 \div 10^4$ Å, проте у ВТНП вона на 2-3 порядки менша.

Якщо порівняти кореляційну довжину з глибиною проникнення, то видно, що в переважній більшості випадків (практично майже завжди) $\xi_S(0) > \lambda_L(0)$ (або $\xi_S > \lambda_L$). А це вже показує, що на довжинах $\sim \xi_S$ поле змінюється суттєво і що локальний зв'язок в принципі неможливий.

Нелокальне узагальнення теорії Лондонів було запропоноване англійським фізиком А. Піппардом (між іншим, вчителем Джозефсона) у 1953 р. Він припустив, що зв'язок між полем і струмом має інтегральний вигляд, а саме:

$$\mathbf{j}_S(\mathbf{r}) = \int \hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')A(\mathbf{r}')d\mathbf{r}',$$

де $\hat{Q}$ – оператор, що діє на вектор $\mathbf{A}$. Радіус такої дії оператора $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ обирається порядку ξ_S, тобто $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ є відмінним від нуля, лише коли $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \le \xi_S$. Так відбувається усереднення при створенні магнітним полем надструму в точці $\mathbf{r}$ завдяки існуванню векторного потенціалу в скінченій області радіуса $\sim \xi_S$, або, що те ж саме, враховується розмір (також $\sim \xi_S$) носія і усереднення його (або відповідного надструму) нелокального зв'язку з магнітним полем. Якщо ж $\xi_S \to 0$, то необхідно вважати, що $\hat{Q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \to \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Піппард обрав ядро інтегрального зв'язку в такому вигляді:

$$\hat{Q}\mathbf{A} = -\frac{3}{4\pi}\frac{n_S e^2}{m_f c \xi_S}\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^4}(\mathbf{A}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \mathbf{r} - \mathbf{r}')e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\xi_S}}.$$

В деякому наближенні ця формула нагадує таку, що можна отримати з закону Біо-Савара-Лапласа. Піппард також показав, що закон проникнення поля в НП відрізняється від експоненти. Проте глибина проникнення вводиться і в цьому випадку у відповідності до означення:

$$\lambda_P = \frac{1}{H_0}\int_0^\infty H(x)dx,$$

яке переходить у тотожність $\lambda_P \equiv \lambda_L$, коли $H(x) \sim \exp(-x/\lambda_L)$, що може легко перевірити кожний студент.

Нелокальні задачі досить складні, і в нас немає наміру їх детально розбирати, проте на якісному рівні продемонструємо, як можна отримувати правильні відповіді. Припустимо для цього, що закон проникнення можна апроксимувати експонентою з піппардівською глибиною λ_P. Отже, нехай маємо заряджену частинку з розміром ξ_S. За умовою $\xi_S > \lambda_P$, так що поле проникає в глибину лише на частину її розміру, тобто тільки доля $\sim \lambda_P/\xi_S$ цієї частинки відчуває присутність векторного потенціалу $\mathbf{A}$. Відповідно, і густина струму має бути у таке ж число λ_P/ξ_S раз меншою. Тоді можна записати

$$\mathbf{j}_S = -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2}\frac{\lambda_P}{\xi_S}\mathbf{A} \equiv -\frac{c}{4\pi\lambda_P^2}\mathbf{A},$$

звідки знаходимо:

$$\frac{\lambda_P}{\lambda_L^2\xi_S} = \frac{1}{\lambda_P^2},$$

що дає $\lambda_P \cong \sqrt[3]{\lambda_L^2 \xi_S}$, причому лондонівська глибина λ_L залишається такою ж. Тоді з умови $\lambda_L << \xi_S$ отримуємо цікаве співвідношення:

$$\lambda_L << \lambda_P << \xi_S .$$

Іншою мовою, введена ефективна глибина проникнення λ_P збільшується (тобто поле проникає глибше), але при цьому можна користуватися локальними рівняннями. Виписана умова досить жорстка і виконується лише по порядку величини. Її важко обґрунтувати в рамках більш строгого розгляду. З іншого боку, при збільшенні температури зростає і $\lambda_L(T)$, тому завжди знайдеться область значень T , де локальний зв'язок відновлюється і всі локальні співвідношення стають справедливими.

Крім того, практично всі НП – це сплави, де довжина вільного пробігу носіїв $l_f << \xi_S$. При цьому внаслідок процесів розсіяння з розвалом пар їх кількість та їх розмір стають динамічними змінними, а роль характерної довжини грає l_f (брудні метали). Квантова теорія показує, що в цьому випадку $\lambda_L \to \lambda_L \sqrt{\xi_S / l_f} >> \lambda_L$, бо $\xi_S >> l_f$. Локальні співвідношення знову стають справедливими, а НП – лондонівськими з точки зору їх адекватного опису. Зазначимо, нарешті, що ВТНП сполуки є саме такими.