

Лекція 6

8. Квантове узагальнення рівнянь Лондонів

8.1. *Квантовий підхід.* Ми вже багато разів повторювали, що фундаментальними носіями струму у НП є пари, які називаються куперівськими. В непоганому наближенні вони виявляються бозонами, формуючи конденсат з колективу, що збирається на основному рівні. Хвильова функція конденсату в одночастинковому наближенні може бути записана у формі

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{n_s}{2}} e^{i\theta(\mathbf{r})},$$

де нормування враховує, що $n_s / 2$ – це число пар, а n_s – густина електронів, що входять до числа надпровідних.

Якщо частинка масою $2m_f$ і зарядом $2e$ рухається в магнітному полі, то її імпульс має вигляд

$$\hbar \nabla \theta = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A}.$$

Спробуємо це довести. Дійсно, без поля густина потоку частинок має вигляд:

$$\frac{i\hbar}{4m_f} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = \frac{n_s}{2} \mathbf{v}_s.$$

Тепер використаємо явний вид хвильової функції:

$$\frac{i\hbar}{4m_f} \frac{n_s}{2} \{e^{i\theta(\mathbf{r})}[-i\nabla\theta(\mathbf{r})]e^{-i\theta(\mathbf{r})} - e^{-i\theta(\mathbf{r})}[i\nabla\theta(\mathbf{r})]e^{i\theta(\mathbf{r})}\} = \frac{n_s}{2} \mathbf{v}_s,$$

звідки

$$\hbar\nabla\theta = 2m_f \mathbf{v}_s.$$

А це ні що інше, ніж імпульс частинки масою $2m_f$ в надпровідному потоці: $2m_f \mathbf{v}_s = \hbar\nabla\theta \equiv \mathbf{p}_s$. При цьому, як відомо, повний, або узагальнений, імпульс частинки – це сума імпульсу \mathbf{p}_s та $(2e/c)\mathbf{A}$. В результаті,

$$\mathbf{p}_s \rightarrow \mathbf{p}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A} = 2m_f \mathbf{v}_s + \frac{2e}{c} \mathbf{A} = \hbar\nabla\theta$$

і

$$\hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A} = 2m_f \mathbf{v}_s,$$

або саме те, що ми записали раніше. Тепер, використовуючи означення

$$\mathbf{j}_s = n_s e \mathbf{v}_s,$$

отримуємо вираз для швидкості $\mathbf{v}_s = \mathbf{j}_s / en_s$ та перепишемо вираз для імпульсу:

$$\frac{2m_f}{en_s} \mathbf{j}_s = \hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A}.$$

Це дає можливість переписати і вираз для надструму:

$$\mathbf{j}_s = \frac{\hbar en_s}{2m_f} \nabla\theta - \frac{e^2 n_s}{m_f c} \mathbf{A} = \frac{e^2 n_s}{m_f c} \left(\frac{\hbar c}{2e} \nabla\theta - \mathbf{A} \right) \equiv \frac{1}{c\Lambda} \left(\frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla\theta - \mathbf{A} \right),$$

де ми використали вже нам відомі означення: $\Lambda = m_f / e^2 n_s$ та $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$.

8.2. *Квантування магнітного потоку.* Розглянемо дуже цікавий та важливий для технічних застосувань – інтерференційних приладів, зокрема, – ефект квантування магнітного потоку в НП.

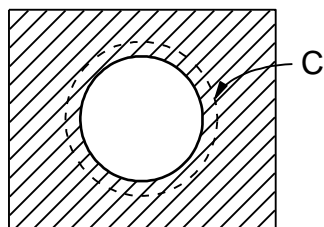


Рис. 6.1

Нехай маємо НП (рис. 6.1) з циліндричною порожниною. Нехай також зовнішнє поле \mathbf{H}_0 паралельно твірній порожнини. Якщо температуру від значень $T > T_c$ знизити до значень $T < T_c$, то виникне поверхневий струм, а в порожнині *заморожується*, як прийнято говорити, магнітний потік. Розрахуємо його.

Для цього розглянемо контур C на відстані $\gg \lambda_L$ від краю порожнини, де надструм $\mathbf{j}_s = 0$. Це, в свою чергу, свідчить (див. рівняння), що $[(\Phi_0 / 2\pi)\nabla\theta - \mathbf{A}] = 0$. Проінтегруємо:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} \oint_C \nabla\theta d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Але правий контурний інтеграл можна перетворити на поверхневий:

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_{sur} \text{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_{sur} \mathbf{H} d\mathbf{S} = \Phi.$$

Видно, таким чином, що $(\Phi_0/2\pi)\oint \nabla\theta d\mathbf{l}$ – це просто повний потік, який захвачується контуром C , або порожниною.

Оскільки θ є фазою хвильової функції, то скільки б ми не обходили контур, якщо $\nabla\theta \cong d\theta/d\varphi$, ми тільки нарощуємо фазу. З вимоги однозначності цієї функції відповідний приріст не може бути відмінним від $2\pi n$, де n – ціле число 0, 1, 2... Отже, ми приходимо до висновку, що захоплений потік задовольняє критерію захвату цілого числа квантів потоку:

$$\oint_C \nabla\theta d\mathbf{l} = 2\pi n,$$

або $\Phi = n\Phi_0$.

Раніше той же результат ми отримали з умови квантування орбіт частинок, що рухаються поблизу поверхні порожнини. Експеримент, що був проведений у 1961 р., блискуче підтвердив цілочисельність потоку, що захоплюється порожниною. Між іншим, Ф. Лондон також передбачив цей ефект, але “помилився” з зарядом, взявши e , а не $2e$.

8.3. *Особливі випадки квантування.* Хоча отриманий висновок абсолютно справедливий, існують випадки, коли цілочисельність захвату начебто порушується. Розглянемо одну з таких ситуацій.

Нехай маємо тонку діелектричну нитку D радіусу R (рис. 6.2), а на ній тонкий шар НП матеріалу, при-

чому товщина шару $d \ll \lambda_L$ (в принципі, це може бути і тонкий НП циліндр з повітрям всередині. Нехай

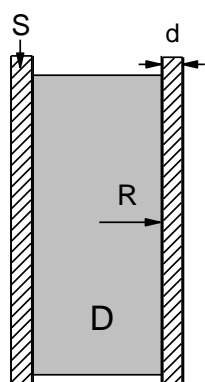


Рис. 6.2

також є магнітне поле H_0 , паралельно до осі нитки (циліндру). Тепер опустимо температуру нижче критичної. Виникає питання, а який потік захопиться НП шаром (циліндром)?

Оскільки, як зазначено, виконується нерівність $d \ll \lambda_L$, можна вважати, що з точністю до членів порядку d/λ_L струм в НП шарі (або плівці) є однорідним, тому інтегрування (див. рівняння для надструму) можна провести точно:

звідки отримуємо:

$$c\Lambda \oint_C \mathbf{j}_S d\mathbf{l} = \frac{\Phi_0}{2\pi c} \oint_C \nabla \theta d\mathbf{l} - \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} \rightarrow c\Lambda j_S \cdot 2\pi R = \Phi_0 n - \Phi,$$

$$\Phi = -2\pi R c \Lambda j_S + \Phi_0 n = -\frac{2\pi R c m_f}{e^2 n_S} j_S + \Phi_0 n.$$

З іншого боку, в цю формулу входить величина j_S , яку треба зв'язати з полем. Вони дійсно взаємозалежні:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_S.$$

Тепер, враховуючи малу товщину шару і замінюючи похідну, що визначає операцію rot , на H_0/d , отримуємо, що має місце співвідношення:

$$H_0 = \frac{4\pi}{c} j_s d,$$

і тим самим магнітний потік

$$\Phi = \pi R^2 H_0 = (4\pi^2 R^2 d / c) j_s,$$

звідки

$$j_s = \frac{c}{4\pi^2 R^2 d} \Phi.$$

Підставимо останній вираз у формулу для потоку:

$$\Phi = -\frac{2\pi R c m_f}{e^2 n_s} \frac{c}{4\pi^2 R^2 d} \Phi + \Phi_0 n \rightarrow \left(1 + \frac{m_f c^2}{2\pi e^2 n_s} \frac{1}{Rd}\right) \Phi = \Phi_0 n.$$

В результаті, магнітний потік, що захоплюється, є

$$\Phi = \frac{\Phi_0 n}{(1 + 2\lambda_L^2 / Rd)}, \quad \lambda_L^2 \equiv \frac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_s}.$$

Видно, що якщо $Rd \gg \lambda_L^2$, то $\Phi \rightarrow \Phi_0 n$, тобто захоплення в циліндрі, навіть залишаючись цілочисельним, відбувається так, начебто квант ефективно зменшується. Можна також відзначити, що цей ефективний квант не є фундаментальною величиною, бо залежить не тільки від параметрів типу R або d , але й (через глибину λ_L) від температури.

9. Розподіл поля у найпростіших конфігураціях надпровідників

9.1. *Пластинка у паралельному полі.* Почнемо з випадку, коли нескінчена пластинка товщиною d розташована у зовнішньому однорідному магнітному полі \mathbf{H}_0 , паралельному поверхні пластини (рис. 6.3). Нехай площина $x=0$ проходить по центру пластини, а поверхні співпадають з площинами $\pm d/2$. Магнітне поле виберемо направленим вздовж осі z .

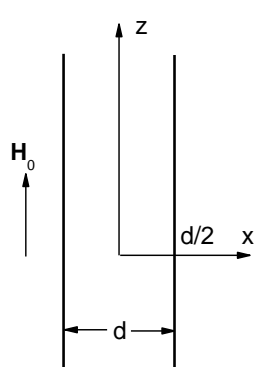


Рис. 6.3

Як ми вже знаємо, розподіл поля задовольняє другому рівнянню Лондонів:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} + \lambda_L^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \mathbf{H} - \lambda_L^2 \Delta \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Симетрія задачі така, що $\mathbf{H} \parallel z$ і не залежить від координати y . Тому останнє рівняння для єдиної z -ої проекції є одновимірним:

$$\frac{d^2 H_z(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} H_z(x) = 0.$$

Це рівняння для напівпростору ми розв'язували під час попередньої лекції. Змінюються лише граничні умови, які тепер мають вигляд:

$$H_z\left(\pm \frac{d}{2}\right) = H_0.$$

Сам загальний вигляд розв'язку той же:

$$H_z(x) = H_z(0)e^{x/a},$$

де $H_z(0)$ невідома константа. Знову після підстановки отримуємо $a = \pm\lambda_L$, що дає:

$$H_z(x) = H_z^{(+)}e^{x/a} + H_z^{(-)}e^{-x/a}.$$

Використовуючи граничні умови, маємо неоднорідну систему:

$$\begin{aligned} H_z^{(+)}e^{d/2\lambda_L} + H_z^{(-)}e^{-d/2\lambda_L} &= H_0; \\ H_z^{(+)}e^{-d/2\lambda_L} + H_z^{(-)}e^{d/2\lambda_L} &= H_0, \end{aligned}$$

детермінант якої

$$\det = \exp(d/\lambda_L) - \exp(-d/\lambda_L) = 2sh \frac{d}{\lambda_L}.$$

З його допомогою знаходимо сталі:

$$H_z^{(+)} = H_z^{(-)} = \frac{H_0 e^{d/2\lambda_L} - H_0 e^{-d/2\lambda_L}}{2sh(d/\lambda_L)} = H_0 \frac{sh(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)}$$

і, таким чином, приходимо до остаточного розв'язку:

$$\begin{aligned} H_z(x) &= \frac{sh(x/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)} ch(x/\lambda_L) = \\ &= 2H_0 \frac{sh(d/2\lambda_L)}{2sh(d/2\lambda_L)ch(d/2\lambda_L)} ch \frac{x}{\lambda_L} = H_0 \frac{ch(x/\lambda_L)}{ch(d/2\lambda_L)}, \end{aligned}$$

який описує поведінку поля в НП пластині.

Знову згадаємо рівняння Лондонів $rot\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}_s$, яке дає змогу визначити також розподіл надструму.

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z(x) \end{vmatrix}; \quad j_s = j_y(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z(x)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{c}{4\pi} H_0 \frac{1}{ch \frac{d}{2\lambda_L}} \frac{1}{\lambda_L} sh \frac{x}{\lambda_L} = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda_L} \frac{sh \frac{x}{\lambda_L}}{ch \frac{d}{2\lambda_L}}.$$

З отриманих формул чітко видно, що і поле, і струм проникають в глибину пластини на відстань $\sim \lambda_L$, лише у випадку досить товстої ($d \gg \lambda_L$) пластини. Якщо ж вона тонка і $d \ll \lambda_L$ або хоча б $d < \lambda_L$, можна розкласти гіперболічні функції по параметрах x/λ_L і $d/2\lambda_L$, знайшовши:

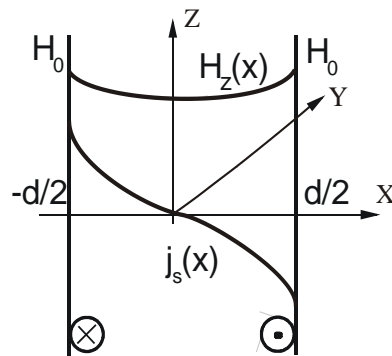


Рис. 6.4

Останні формули демонструють, що магнітне поле повністю проникає в тонку пластину (плівку), а густина надструму є лінійною функцією координати. При цьому струми течуть так (див. рис. 6.4), щоб компенсувати зовнішнє поле в глибині пластини.

$$H_z(x) = H_0;$$

$$j_s = -\frac{cH_0}{4\pi\lambda_L^2} x.$$

Останні формули демонструють, що магнітне поле повністю проникає в тонку пластину (плівку), а густина надструму є лінійною функцією координати. При цьому струми течуть так (див. рис. 6.4), щоб компенсувати зовнішнє поле в глибині пластини.

Останні формули демонструють, що магнітне поле повністю проникає в тонку пластину (плівку), а густина надструму є лінійною функцією координати. При цьому струми течуть так (див. рис. 6.4), щоб компенсувати зовнішнє поле в глибині пластини.

9.2. *Пластина з струмом.* Розв'яжемо “протилежну” задачу, а саме: припустимо, в пластині тієї ж геометрії вздовж осі y те-

че надструм, густина якого не залежить від координати z . Нехай сила струму I_s . На поверхні пластини він створює поле \mathbf{H}_1 , причому $H_z(\pm d/2) = \mp H_{I_s}$, що впливає з рис. 6.5.

Щоб встановити граничні умови, використаємо рівняння

$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$, яке треба помножити на елемент $d\mathbf{S} \parallel y$ і проінтегрувати:

$$\int \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}_s d\mathbf{S},$$

звідки для лівої частини маємо

$$\int \text{rot}\mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_l l_{12} - H_l l_{34} = 2H_l l_{12},$$

а для правої –

$$\frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j}_s d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} j_s l_{12} d.$$

Прирівнюючи обидві частини, знаходимо:

$$2H_{I_s} l_{12} = \frac{4\pi}{c} j_s l_{12} d,$$

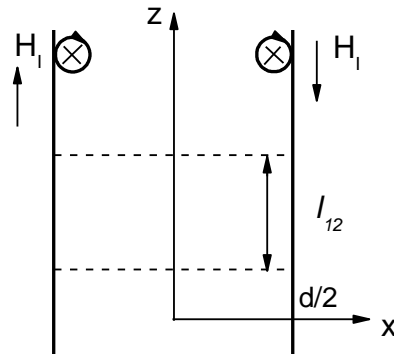


Рис. 6.5

або $H_{I_s} = (2\pi d / c) j_s$.

Розв'язуючи те ж саме рівняння і використовуючи той самий загальний розв'язок, запишемо граничні умови для даного випадку:

$$\begin{aligned} H_z^{(+)} e^{d/2\lambda} + H_z^{(-)} e^{-d/2\lambda} &= -H_{I_s}; \\ H_z^{(+)} e^{-d/2\lambda} + H_z^{(-)} e^{d/2\lambda} &= H_{I_s}, \end{aligned} \quad \det = 2sh \frac{d}{\lambda_L}.$$

З цієї системи легко знайти:

$$H_z^{(+)} = -H_z^{(-)} = -\frac{H_{I_s} e^{d/2\lambda_L} + H_{I_s} e^{-d/2\lambda_L}}{2sh(d/\lambda_L)} = -H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)};$$

$$\begin{aligned} H_z(x) &= -2H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{sh(d/\lambda_L)} sh \frac{x}{\lambda_L} = \\ &= -2H_{I_s} \frac{ch(d/2\lambda_L)}{2sh(d/2\lambda_L)ch(d/2\lambda_L)} sh \frac{x}{\lambda_L} = \\ &= -H_{I_s} \frac{sh \frac{x}{\lambda_L}}{sh(d/2\lambda_L)}. \end{aligned}$$

І знов-таки, використовуючи зв'язок $rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s$,

маємо:

$$j_s = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_z(x)}{dx} = \frac{c}{4\pi\lambda_L} H_{I_s} \frac{ch(x/\lambda_L)}{sh(d/2\lambda_L)}.$$

З формул випливає і видно з рис. 6.6, що для товстої ($d \gg \lambda_L$) пластини поле і струм існують в приповерхневому шарі товщиною $\sim \lambda_L$. В протилежному ($d \ll \lambda_L$) випадку можемо розкласти по відношенням d/λ_L та x/λ_L :

$$j_s = \frac{c}{4\pi\lambda_L} H_{I_s} \frac{2\lambda_L}{d} = \frac{c}{2\pi d} H_{I_s};$$

$$H_z(x) = -\frac{2H_{I_s}}{d} x.$$

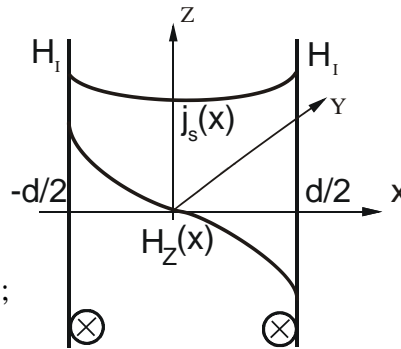


Рис. 6.6

Видно, що тут, навпаки, струм однорідний, а поле змінює знак свого напрямку на обох краях пластини.

9.3. *Пластина з струмом у однорідному полі* $\mathbf{H}_0 \perp \mathbf{j}_s$. Ця задача важлива для практичних застосувань. Дійсно, нехай пластина знаходиться у зовнішньому полі $\mathbf{H}_0 \parallel z$, як це було раніше, і по ній тече надструм $\mathbf{j}_s \parallel y$ (див. рис. 6.7). Як зазначалося, цей струм породжує на краях пластини поле $\mp H_{I_s}$. Ситуація така, що тепер обидва випадки “накладаються”, а оскільки усі рівняння лінійні, повний розв’язок має бути суперпозицією тих, що щойно розібрані.

Розглянемо спочатку випадок, коли $H_0 = H_{I_s}$. Це означає, що зовнішнє поле буде повністю компенсуватись на одній стороні пластини і подвоюватись на протилежній.

З іншого боку, можна добитися, щоб струм тік лише по одній стороні пластини. Таке реалізується, коли зовнішнє поле створюється другою пластиною з

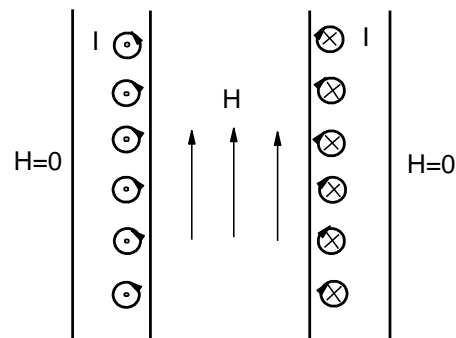


Рис. 6.7

таким же струмом, що, однак, тече в протилежному напрямку. Тоді (див. рис. 6.7) поле в просторі між пластинами подвоюється, тому що створюється двома пластинами. В той же час аналогічні міркування доводять,

що поле зовні пластин взаємно компенсується і дорівнює нулеві. Таким чином, виникає “конденсатор” магнітного поля, коли всередині поле є, а зовні воно відсутнє.