Лекція 7

10. Комплексна провідність надпровідника

До сих пір ми розглядали тільки стаціонарні явища. Тепер спробуємо припустити, що на плоску поверхню НП падає електромагнітна хвиля $\mathbf{E}(t)$. При цьому будемо вважати, що довжина l_f вільного пробігу носіїв мала, тобто виконується наближення <u>нормального скін-ефекту</u>. Іншою мовою, l_f досить мала, а частоти ω не настільки великі, тому $l_f < \lambda_L$, лондонівської глибини проникнення. Частота τ_f^{-1} електронних зіткнень отримується з означення $l_f = v_F \tau_f$ і буде вважатися великою у порівнянні з ω: $1/\tau_f = v_F / l_f >> \omega$. Таке співвідношення дозволяє вважати часові, викликані хвилею, процеси повільними, а електрони такими, що знаходяться у термодинамічній рівновазі.

Знову згадаємо дворідинну модель НП, тобто вважатимемо, що всі електрони розділені на дві групи, причому $n_f = n_N + n_S$. Рівняння для НП частинок – це перше рівняння Лондонів

$$\mathbf{E}(t) = \Lambda \frac{d\mathbf{j}_S}{dt}.$$

Для нормального колективу електронів, які відчувають зіткнення, пишемо рівняння Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{fr}$, де $\mathbf{F}_{fr} \sim -\mathbf{v}$ – сила тертя, у вигляді:

$$m_f \dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}(t) - (m_f / \tau_f)\mathbf{v}.$$

Як і у випадку рівняння для $\mathbf{j}_S$, легко отримуємо:

$$\frac{m_f}{en_N}\frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{m_f}{en_N}\frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f} = e\mathbf{E}(t).$$

Згадуючи константи $\Lambda = m_f / e^2 n_S = (4\pi / c^2)\,\lambda_L^2$, перепишемо це рівняння у спосіб:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{m_f n_S}{n_N e^2 n_S}\frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{m_f n_S}{n_N e^2 n_S}\frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f} = \frac{n_S}{n_N}\Lambda(\frac{d\mathbf{j}_N}{dt} + \frac{\mathbf{j}_N}{\tau_f}).$$

Як завжди, оберемо часову залежність електричного поля у гармонічному вигляді: $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$, з чого випливає така ж залежність і всіх інших величин, що збурюються цим полем. Тоді, поклавши $\mathbf{j}_S(t) = \mathbf{j}_S \exp(i\omega t)$, з першого рівняння Лондонів маємо: $\mathbf{E}_0 = i\omega\Lambda\mathbf{j}_S$, або

$$\mathbf{j}_S = -\frac{i}{\Lambda\omega}\mathbf{E}_0.$$

Це співвідношення свідчить, що $\mathbf{j}_S \neq 0$ лише для $\omega \neq 0$. Якщо ж $\omega \to 0$, то і амплітуда $\mathbf{E}_0 \to 0$. Про таку закономірність ми вже говорили. Тепер рівняння для $\mathbf{j}_N(t) = \mathbf{j}_N \exp(i\omega t)$:

$$\mathbf{E}_0 = (\frac{n_S}{n_N}\Lambda i\omega + \frac{n_S}{n_N}\Lambda\frac{1}{\tau_f})\mathbf{j}_N,$$

звідки

$$\mathbf{j}_N = \frac{n_N}{n_S\Lambda}\frac{\tau_f}{1+i\omega\tau_f}\mathbf{E}_0 = \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda}\frac{1-i\omega\tau_f}{1+(\omega\tau_f)^2}\mathbf{E}_0.$$

Враховуючи, нарешті, що повний струм $\mathbf{j} = \mathbf{j}_N + \mathbf{j}_S$, приходимо до формул:

$$\mathbf{j} = \{\frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda}\frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} - i[\frac{n_N}{n_S}\frac{\omega\tau_f^2}{\Lambda}\frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} + \frac{1}{\Lambda\omega}]\}\mathbf{E}_0 \equiv$$

$$\equiv [\sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega)]\mathbf{E}_0,$$

де введені позначення

$$\sigma'(\omega) = \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda}\frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2}$$

і

$$\sigma''(\omega) = \frac{1}{\Lambda\omega}[\frac{n_N}{n_S}\frac{(\omega\tau_f)^2}{1+(\omega\tau_f)^2} + 1]$$

задають реальну та уявну частини комплексної провідності НП у змінному електричному полі.

11. Скін-ефект

11.1. *Нормальний скін-ефект*. Розглянемо, як проникає електромагнітна хвиля у НП. Відомо, що хвиля, яка падає на НП, проникає в нього лише на скінчену глибину – так звану <u>глибину скін-шару</u>.

Нехай на поверхню НП падає хвиля у напрямку x (рис. 7.1). Рівняння, що описують електромагнітні процеси – це рівняння Максвелла:

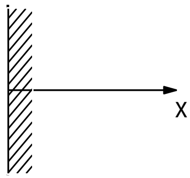

Рис. 7.1

$$rot\mathbf{H} = (4\pi / c)\mathbf{j} = (4\pi / c)\sigma\mathbf{E};$$
$$rot\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t\,.$$

Подієમо операцією rot на перше рівняння:

$$rotrot\mathbf{H} = \nabla div\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} rot\mathbf{E}\,,$$

або (внаслідок $div\mathbf{H} = 0$)

$$-\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) \;\to\; \Delta\mathbf{H} - \frac{4\pi}{c^2}\dot{\mathbf{H}} = 0\,.$$

Нехай $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 \exp(-iqx + i\omega t)$. Тоді з останнього рівняння отримуємо:

$$-q^2 - \frac{4\pi}{c^2}\sigma i\omega = 0 \;\to\; q^2 = -i\frac{4\pi}{c^2}\omega\sigma \;\to\; q^2 = \frac{e^{-i\pi/2}}{\dfrac{c^2}{4\pi\omega\sigma}}\,,$$

звідки

$$q = \frac{e^{-i\pi/4}}{\left(\dfrac{c^2}{4\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)}{\left(\dfrac{c^2}{4\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} = \frac{1-i}{\left(\dfrac{c^2}{2\pi\omega\sigma}\right)^{1/2}} \equiv \frac{1-i}{\delta}\,,$$

$$\delta \equiv \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}}\,.$$

В принципі, задача розв'язана, бо знайдений комплексний хвильовий вектор. Але щоб відчути відповідь, зробимо деяку деталізацію. Припустимо, що $T << T_c$, тобто нормальна густина настільки мала, що $n_N / n_S << 1$, крім того, частоти низькі і $\omega\tau_f << 1$, що дає $(n_N / n_S)(\omega\tau_f)^2 << 1$. Тоді з загальних виразів:

$$\sigma'(\omega) = \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda}\frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} \approx \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda};$$

$$\sigma''(\omega) = \frac{1}{\Lambda\omega}[\frac{n_N}{n_S}\frac{(\omega\tau_f)^2}{1+(\omega\tau_f)^2}+1] \approx \frac{1}{\Lambda\omega}.$$

Отже, в цьому наближенні

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) - i\sigma''(\omega) \approx \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda} - i\frac{1}{\Lambda\omega}, \ \Lambda = \frac{4\pi}{c^2}\lambda_L^2.$$

Це дає змогу зробити наступні перетворення, а точніше – спрощення:

$$\delta^2 = \frac{c^2}{2\pi\omega}\frac{1}{\sigma(\omega)} = \frac{c^2}{2\pi\omega}\frac{1}{\frac{n_N}{n_S}\frac{\omega\tau_f}{\Lambda\omega} - i\frac{1}{\Lambda\omega}} = \frac{\Lambda c^2}{2\pi(\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f - i)} =$$

$$= \frac{2\lambda_L^2}{(\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f - i)},$$

звідки

$$\delta = \frac{\sqrt{2}\lambda_L}{\sqrt{\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f - i}}.$$

Для малих частот $\omega\tau_f <<1$ і досить низьких температур, коли $n_N << n_S$,

$$\delta \approx \sqrt{2}\frac{\lambda_L}{\sqrt{-i}} = \sqrt{2i}\lambda_L = \sqrt{2}\lambda_L\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \lambda_L(1+i)\,.$$

Звідси

$$q = \frac{1-i}{\delta} = \frac{1-i}{1+i}\frac{1}{\lambda_L} = -\frac{i}{\lambda_L};$$

$$H(x) \sim e^{-iqx} = e^{-i(-\frac{i}{\lambda_L}x)} = e^{-x/\lambda_L}\,.$$

Іншою мовою, низькочастотне поле проникає у НП на ту ж глибину λ_L, що і поле стаціонарне. У загальному ж випадку треба користуватись отриманими формулами для q і δ.

11.2. *Поверхневий імпеданс*. Його визначення широко відомо

$$Z = \frac{4\pi}{c}\frac{E}{H}$$

і має зрозумілий фізичний зміст. Дійсно, якщо на поверхні металу існують змінні електричне $\mathbf{E}(t)$ і магнітне $\mathbf{H}(t)$ поля, причому обидва лежать на поверхні та ортогональні одне до одного, то, як ми вже не раз писали, $(c/4\pi)H = j_{sur}$ і тоді записана величина

$$Z = \frac{4\pi}{c}\frac{E}{H} = \frac{E}{(c/4\pi)H} = \frac{E}{j_{sur}}$$

є ні що інше, ніж поверхневий опір, або ***поверхневий імпеданс***.

Знову запишемо рівняння

$$rot\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E}$$

і представимо, що хвиля з $\mathbf{k} \parallel x$, $\mathbf{E} \parallel y$ та $\mathbf{H} \parallel z$ подає на поверхню, яка задана координатами y і z. Крім того, нехай ненульові проекції пропорційні тій же гармоніці $\exp(-iqx + i\omega t)$. Тоді з рівняння прямо отримуємо:

$$rot = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}; \quad \rightarrow \quad iqH = \frac{4\pi}{c}\sigma E\,,$$

тобто $Z = \frac{iq}{\sigma}$. Використаємо знайдене раніше $q = \frac{1-i}{\delta}$, що дає для імпедансу вираз $Z = \frac{i(1-i)}{\delta\sigma} = \frac{1+i}{\delta\sigma}$. Проаналізуємо його знову ж таки для важливого випадку досить повільних полів (малі частоти). Тоді треба врахувати, що $\delta \equiv \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}} \approx \lambda_L(1+i)$ і $\sigma(\omega) = \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda} - i\frac{1}{\Lambda\omega}$. Це дозволяє записати $Z = Z' + iZ'' \equiv R + iX_L$, де R – опір, або втрати на нагрів, а X_L – індуктивний опір, зробивши низку перетворені і згадавши, що $\Lambda = (4\pi / c^2)\lambda_L^2$:

$$Z=\frac{1+i}{\delta\sigma}=\frac{1}{\lambda_L}\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\lambda_L}\frac{1}{\frac{1}{\Lambda}(\frac{n_N\tau_f}{n_S}-i\frac{1}{\omega})}=$$

$$=\frac{1}{\lambda_L}\frac{1}{\frac{c^2}{4\pi\lambda_L^2}(\frac{n_N\tau_f}{n_S}-i\frac{1}{\omega})}=\frac{4\pi\lambda_L^2\omega}{c^2}\frac{1}{(\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f-i)}=$$

$$=\frac{4\pi\lambda_L\omega}{c^2}\frac{\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f+i}{(\frac{n_N}{n_S}\omega\tau_f)^2+1},$$

звідки

$$R=\frac{4\pi\lambda_L\omega^2}{c^2}\frac{n_N}{n_S}\tau_f;\qquad X_L=\frac{4\pi\lambda_L\omega^2}{c^2}.$$

З'ясуємо, як ці активний і індуктивний опори залежать від температури. Для цього ще раз наведемо емпіричну залежність:

$$\lambda_L(T)=\frac{\lambda_L(0)}{\sqrt{1-(\frac{T}{T_c})^4}}.$$

Звідси легко отримуємо:

$$\lambda_L^2(T)=\frac{\lambda_L(0)}{1-(T/T_c)^4}=\frac{m_f c^4}{4\pi e^2 n_S(T)},$$

тобто $n_S(T)\sim 1-(T/T_c)^4$, що з умови $n_N(T)+n_S(T)=n_f$ безпосередньо дає температурну поведінку кожної складової колективу носіїв:

$$n_S(T) = n_f[1-(T/T_c)^4]; \quad n_N(T) = n_f(T/T_c)^4.$$

Ці формули можна підставити у вирази для величин R та X_L:

$$R = \frac{4\pi\lambda_L\omega^2}{c^2}\frac{n_N}{n_S}\tau_f \cong \frac{1}{\sqrt{1-(T/T_c)^4}}\frac{(T/T_c)^4}{1-(T/T_c)^4} =$$

$$= \frac{(T/T_c)^4}{[1-(T/T_c)^4]^{3/2}};$$

$$X_L = \frac{1}{\sqrt{1-(T/T_c)^4}},$$

отримавши їх температурну поведінку в усьому діапазоні $T \le T_c$ (рис. 7.2). Може, здається дивним, але ці формулу якісно правильно описують температурні зміни обох цих величин, правда, окрім околу $T \to T_c$. Справа в тому, що ми вважали, що частоти малі і добуток $(n_N/n_S)(\omega\tau_f)^2 << 1$. Але при будь-яких малих частотах, наступає момент по T, коли $n_S \to 0$ і ця нерівність стає невиконуваною. Щоб запобігти розбіжності, використаємо вихідну формулу:

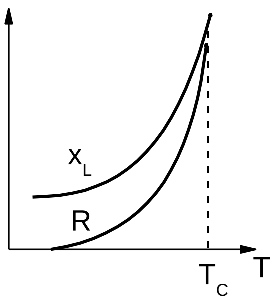

Рис. 7.2

$$\sigma(\omega) = \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda}\frac{1}{1+(\omega\tau_f)^2} - \frac{i}{\Lambda\omega}[1+\frac{n_N}{n_S}\frac{(\omega\tau_f)^2}{1+(\omega\tau_f)^2}] \approx \frac{n_N}{n_S}\frac{\tau_f}{\Lambda},$$

де ми нехтуємо уявною частиною $\sigma(\omega)$, бо в околі T_c реактивна складова менш важлива. Тоді

$$Z = \frac{iq}{\sigma} = \frac{i(1-i)}{\delta\sigma} = \frac{1+i}{\sqrt{\dfrac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}\sigma} = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi\omega}}{c}\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = \bullet$$

Оскільки в цьому наближенні $\sqrt{\sigma(\omega)} = (c/\sqrt{4\pi}\lambda_L)\sqrt{n_N\tau_f/n_S}$, то підставимо і продовжимо:

$$\bullet = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi\omega}}{c}\frac{\sqrt{4\pi}}{c}\lambda_L\sqrt{\frac{n_S}{n_N\tau_f}} = (1+i)\frac{2\pi}{c^2}\lambda_L\sqrt{2\omega\frac{n_S}{n_N\tau_f}} =$$

$$= \frac{2\pi}{c^2}\sqrt{2\omega\tau_f\frac{n_S}{n_N}}\frac{\lambda_L}{\tau_f}(1+i) = \frac{2\pi}{c^2}(2\omega\tau_f\frac{1}{n_N})^{1/2}\frac{\cancel{n_S}^{1/2}}{\tau_f}\sqrt{\frac{m_f c^2}{4\pi e^2\cancel{n_S}}}(1+i) \cong$$

$$\cong \frac{\sqrt{2\pi}}{ce\tau_f}(\frac{m_f}{n_f}\omega\tau_f)^{1/2}(1+i),$$

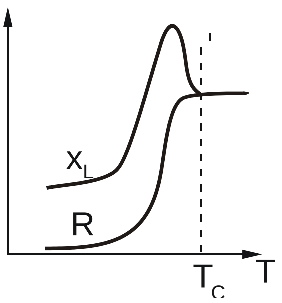

Рис. 7.3

і видно, що n_S скорочується, а $n_N \to n_f$. При цьому поблизу T_c величини R і X_L стають рівними між собою. На рис. 7.3 приведена їх справжня, тобто спостережувана, температурна поведінка.