Лекція 8

12. Теорія Гінзбурга-Ландау

12.1. *Вступна частина*. Ми розглянули основні положення теорії Лондонів. Ми показали, як вона застосовується у найпростіших ситуаціях. Ми розібрали декілька прикладів. Але чого ми не робили – це не враховували квантових ефектів, в усякому разі, послідовно. Теорія Гінзбурга-Ландау, як вона завжди називається, стала по суті першою спробою врахувати квантові закономірності на феноменологічному рівні. Вона була створена у 1950 р. XX-го століття, а через більше ніж півстоліття (у 2003 році) один з її авторів Віталій Лазарович Гінзбург був удостоєний за неї Нобелівської премії. Публікація, де викладена теорія Гінзбурга-Ландау, стала найцитованішою роботою серед робіт з фізики.

Як можна взагалі включити квантові ефекти до розгляду? Коли ми розглядали термодинаміку НП і записали вираз для ентропії, ми згадували, що НП стан є більш впорядкованим в порівнянні з нормальним станом і що НП перехід є переходом II-го роду. З загальної точки зору, зрозуміло, що НП стан має характеризуватись ***параметром порядку***, який відмінний від нуля лише в області $T < T_c$ і рівний нулеві при $T \geq T_c$.

З іншого боку, опис будь-якої системи в рамках квантового підходу передбачає використання хвильової функції $\Psi(\mathbf{r})$.

Гінзбург і Ландау вперше вирішили об'єднати ці два поняття, тобто несподівано для фізиків висловили ідею, що саме $\Psi(\mathbf{r})$ і може бути параметром порядку. Безумовно, це була наукова сміливість, але потрібна була і інтуїція. В основу теорії Гінзбурга-Ландау лягла теорія фазових перетворень II-го роду Ландау.

За цією теорією фазовий перехід II-го роду – це перехід, при якому стан тіла змінюється неперервно або взагалі не змінюється, а деяка симетрія – стрибком. При цьому низькотемпературна фаза виявляється менш симетричною, або, як кажуть, більш впорядкованою. До фазових переходів II-го роду відносяться всі магнітні переходи, переходи, типу порядок-безпорядок у сплавах, перехід ^{4}He у надплинний стан, нарешті, переходи в металах з нормального стану у надпровідний.

Розглянемо, як неперервна зміна стану може супроводжуватись стрибкоподібною зміною його симетрії. Найбільш наочно це можна простежити на прикладі структурного переходу типу впорядкування. Нехай атоми сортів A_1 та A_2 розташовані в ланцюжку і при достатньо високій T ймовірності заповнення вузлів цими атомами однакові (див. рис. 8.1), або в системі

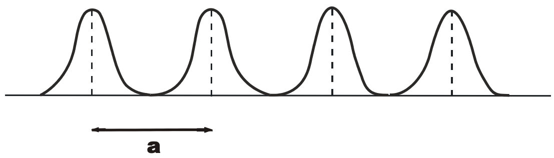


Рис. 8.1

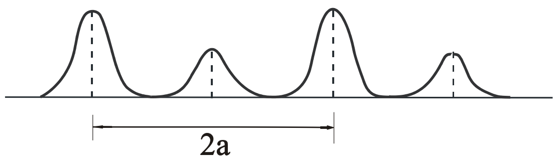


Рис. 8.2

існує повний безлад і в кожному місці можна знайти будь-який атом. А от при $T < T_c$ ймовірність заповнення атомами A_1 має інший вигляд, тобто ці атоми розташовуються “через один”. При переході через точку T_c з’являється і зростає із зниженням температури параметр порядку η, а період структури “стрибає” при $T = T_c$ від a до $2a$, або стрибкоподібно змінюється трансляційна симетрія (рис. 8.2).

Повернемося до НП. Відомо, що у своїй теорії фазових перетворень II-го роду Ландау запропонував використовувати вільну енергію системи, яка знаходиться поблизу переходу при температурі $T \approx T_c$, у вигляді розкладу по степенях параметра порядку. В таких умовах він може вважатися малим, а число членів розкладу може бути мінімальним. Тому область застосування теорії Ландау, взагалі кажучи, обмежується нерівністю $|T - T_c| << T_c$.

Отже, вважатимемо хвильову функцію $\Psi(\mathbf{r})$ НП електронів параметром порядку. Більше того, тепер зрозуміло, як зручно обрати нормування цієї функції. Як і раніше $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ – це густина вже відомих нам в якості фізичних об’єктів куперівських пар, тобто

$$|\Psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{n_S}{2}.$$

Нехай НП у своїй нормальній фазі має вільну енергію F_N. Тоді в однорідному випадку $\Psi(\mathbf{r})$ не залежить від координати, а розклад F_S поблизу T_c може бути представлений виразом:

$$F_S(0) = F_N + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4,$$

де $F_S(0)$ – густина вільної енергії НП при $\mathbf{H} = 0$, а α і β – деякі феноменологічні коефіцієнти. Видно, що вільна енергія залежить від модуля хвильової функції, бо не може залежати від фази останньої, і крім того, ми фактично розкладаємо по густині n_S. Проте нижче ми побачимо, що не все так просто.

Знайдемо значення $|\Psi|^2$, яке відповідає мінімуму вільної енергії. Іншими словами, запишемо рівняння:

$$\frac{dF_S(0)}{d|\Psi|^2} = 0,$$

або в явному вигляді –

$$\alpha + \beta|\Psi|^2 = 0 \quad \to \quad |\Psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Підставимо знайдене значення, яке, власне, і є параметром порядку, у вільну енергію:

$$F_S(0) - F_N = -\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Але ми вже визначали різницю між вільною енергією у магнітному полі та вільною енергією нормального стану, отримавши, що (див. Лекцію 3)

$$F_S(0) - F_N(0) = -\frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi},$$

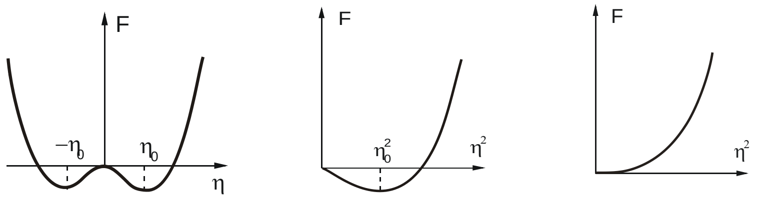
звідки

$$\frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{\mathbf{H}_{cm}^2}{8\pi}, \quad \text{або} \quad \mathbf{H}_{cm}^2 = 4\pi \frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Розглянемо, як залежать від температури коефіцієнти α і β. При $T = T_c$ параметр порядку $|\Psi|^2$ має дорівнювати нулеві, а при $T < T_c$ бути скінченим. Тоді з формули $|\Psi|^2 = -\alpha / \beta$ випливає, що, по меншій мірі, має виконуватись рівність $\alpha(T_c) = 0$, яка можлива, якщо $\alpha(T) \sim (T - T_c)^\alpha$.

При цьому очевидно, степінь повинна бути непарна, щоб забезпечити відсутність параметра порядку вище критичної температури і його скінченність нижче її. Найпростішим в такому разі є залежність $\alpha(T) \sim T - T_c$. Проте справа не тільки в простоті. Ця залежність дає абсолютно вірну температурну поведінку критичного поля $H_{cm}(T)$. Дійсно, ми знаємо, що як функція T критичне поле $H_{cm}(T) = H_{cm}(0)(1 - T^2 / T_c^2)$, що поблизу T_c дає $\sim (1 - T / T_c)$ і що ми бачимо з отриманої формули, оскільки $H_{cm} \sim |\alpha|$.

Коефіцієнт β є додатнім і від T залежить слабо. Це, зокрема, випливає з того, що при $T < T_c$ коефіцієнт



$T < T_c$ $T < T_c$ $T > T_c$

Рис. 8.3

α теж від'ємний, і $|\Psi|^2 > 0$, лише якщо $\beta > 0$. З іншого боку, знову ж таки $\beta > 0$ і вище T_c, де $\alpha > 0$ і $F_S(0)$ досягає мінімуму $|\Psi|^2 = 0$, тобто НП при цьому відсутня. Таким чином, в обох областях треба прийняти позитивність β, тому в першому порядку по $T - T_c$ можна вважати, що $\beta = const > 0$.

В загальному випадку можна зобразити вільну енергію як функцію параметра порядку (див. рис. 8.3):

$$F = \alpha_0 (T - T_c)\eta^2 + \frac{1}{2}\beta\eta^4,$$

з якої випливають усі якісно різні ситуації.

13. Рівняння теорії Гінзбурга-Ландау

13.1. *Густина вільної енергії*. Тепер почнемо розгляд теорії Гінзбурга-Ландау в повному обсязі. Це значить, що крім однорідних, треба взяти до уваги і неоднорідні стани. Для цього запишемо вільну енергію, яка враховує присутність зовнішнього магнітного поля $\mathbf{H}_0$ (термодинамічний потенціал Гельмгольца

$G_S(\mathbf{H}))$. Нагадаю, що ми це розбирали і прийшли до висновку, в цьому випадку від вільної енергії Гіббса віднімається член $\mathbf{HH}_0/4\pi$, де $\mathbf{H}$ – точне мікроскопічне поле.

Отже, в околі T_c можна згідно підходу Гінзбурга і Ландау записати:

$$G_S(\mathbf{H}) = G_N + \alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 +$$

$$+\frac{1}{4m_f}|(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{HH}_0}{4\pi},$$

де доданок з градієнтом – це густина кінетичної енергії НП електронів системи. Розберемо цей доданок більш детально.

Густина кінетичної енергії частинки з масою m_f в квантовій механіці записується у вигляді:

$$\frac{1}{2m_f}|-i\hbar\nabla\psi|^2, \quad -i\hbar\nabla = \mathbf{p}.$$

Як ми вже говорили, при русі частинки у зовнішньому полі у виразі для густини кінетичної енергії оператор $\mathbf{p}$ заміняється на:

$$-i\hbar\nabla \to -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} = m_f\mathbf{v},$$

тому $\mathbf{v} = -\frac{i\hbar}{m_f}\nabla - \frac{e}{m_f c}\mathbf{A}$.

Оскільки до виразу для густини кінетичної енергії входить саме швидкість $\mathbf{v}$ частинки, стає зрозумілим розклад для $G_S(\mathbf{H})$. При запису ми врахували, що явище НП пов'язане з куперівськими парами, тому зразу внесли правки $e \to 2e$ і $m_f \to 2m_f$, які, між іншим, у Гінзбурга і Ландау були відсутніми.

13.2. *Рівняння Гінзбурга-Ландау*. Вище записане густина енергії, а повна енергія має вигляд:

$$G_S(\mathbf{H}) = G_N + \int [\alpha |\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta |\Psi|^4 +$$

$$+\frac{1}{4m_f}|(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + \frac{(rot\mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{rot\mathbf{A}\mathbf{H}_0}{4\pi}]dV .$$

Наша мета – знайти такі значення $\Psi(\mathbf{r})$ та $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, які будучи підставленими у $G_S(\mathbf{H})$, мінімізували цей термодинамічний потенціал. При цьому треба враховувати, що хвильова функція є комплексною величиною і можна мінімізувати потенціал $G_S(\mathbf{H})$ за реальною і уявною частинах цієї функції, а можна – за $\Psi(\mathbf{r})$ і $\Psi^*(\mathbf{r})$. Будемо йти другим шляхом і проваріюємо за $\Psi^*(\mathbf{r})$, розв'язавши варіаційну задачу:

$$\delta_{\Psi^*} G_S(\mathbf{H}) = 0 .$$

Тоді маємо:

$$\delta_{\Psi^*} G_S(\mathbf{H}) = \delta_{\Psi^*}\{G_N + \int [\alpha\Psi^*\Psi + \frac{\beta}{2}\Psi^*\Psi^*\Psi\Psi +$$

$$+\frac{1}{4m_f}(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^*) +$$

$$+\frac{(rot\mathbf{A})^2}{8\pi} - \frac{\mathbf{H}_0 rot\mathbf{A}}{4\pi}]dV\} = \int [\alpha\delta\Psi^*\Psi + \beta\delta\Psi^* |\Psi|^2 \Psi +$$

$$+\frac{1}{4m_f}(-i\hbar\nabla\Psi-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)(i\hbar\nabla\,\delta\Psi^*-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\delta\Psi^*)]dV=\bullet$$

Винести $\delta\Psi^*$ за квадратні дужки неможливо, бо варіація стоїть під операцією похідної. Перетворимо цей вираз, позначивши

$$-i\hbar\nabla\Psi-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi=\boldsymbol{\varphi},$$

і проведемо подальші розрахунки:

$$\bullet=\int[\alpha\delta\Psi^*\Psi+\beta\delta\Psi^*\,|\,\Psi\,|^2\;\Psi+$$

$$+\frac{1}{4m_f}(i\hbar\nabla\,\delta\Psi^*)\boldsymbol{\varphi}-\frac{1}{4m_f}\frac{2e}{c}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}\delta\Psi^*]dV=$$

$$=\int[\alpha\delta\Psi^*\Psi+\beta\delta\Psi^*\,|\,\Psi\,|^2\;\Psi+\frac{1}{4m_f}i\hbar\nabla(\delta\Psi^*\boldsymbol{\varphi})-$$

$$-\frac{1}{4m_f}i\hbar\nabla\boldsymbol{\varphi}\delta\Psi^*-\frac{1}{4m_f}\frac{2e}{c}\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}\delta\Psi^*]dV=$$

$$=\int[\alpha\delta\Psi^*\Psi+\beta\delta\Psi^*\,|\,\Psi\,|^2\;\Psi+\frac{\delta\Psi^*}{4m_f}(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A})\boldsymbol{\varphi}]dV+$$

$$+\frac{1}{4m_f}\int div(\delta\Psi^*\boldsymbol{\varphi})dV=\int\delta\Psi^*[\alpha\Psi+\beta\,|\,\Psi\,|^2\;\Psi+$$

$$+\frac{1}{4m_f}(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A})(-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi]dV+$$

$$+\frac{1}{4m_f}\oint\limits_{sur}(-i\hbar\nabla\Psi-\frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)d\mathbf{S}\delta\Psi^*.$$

Знову-таки ми повинні вважати, що варіація довільна, тому цей вираз дорівнює нулеві, лише якщо обидва доданки самі дорівнюють нулю. Таким чином, приходимо до 1-го рівняння теорії Гінзбурга-Ландау

$$\alpha\Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{4m_f}(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A})^2\Psi = 0$$

та граничної умови до нього у вигляді

$$(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)\mathbf{n} = 0\,,$$

де $\mathbf{n}$ – одиничний вектор, нормальний до поверхні в кожній її точці. Неважко перевірити, що мінімізація вільної енергії по функції Ψ приведе до рівняння, комплексно спряженого до отриманого.

Друге рівняння виводиться подібним чином, але мінімізацією за векторним потенціалом $\mathbf{A}$. Зробимо це:

$$\delta_{\mathbf{A}} G_S(\mathbf{H}) = \int [\frac{1}{4m_f}(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\Psi^*)(-i\hbar\nabla\Psi - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi)] +$$

$$+\frac{1}{4m_f}(i\hbar\nabla\Psi^* - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi^*)(-\frac{2e}{c}\delta\mathbf{A}\Psi) +$$

$$+\frac{rot\mathbf{A}rot\delta\mathbf{A}}{4\pi} - \frac{\mathbf{H}_0 rot\delta\mathbf{A}}{4\pi}]dV\,.$$

Як і вище варіацію (тепер $\delta\mathbf{A}$) неможливо винести за дужки через присутність цієї величини під операцією $rot\delta\mathbf{A}$. Тому згадаємо векторну тотожність

$$div[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{b}rot\mathbf{a} - \mathbf{a}rot\mathbf{b}\,,$$

яка дає змогу переписати попередній вираз наступним чином:

$$\frac{1}{4\pi}\int(rot\mathbf{A}-\mathbf{H}_0)rot\delta\mathbf{A}dV=\frac{1}{4\pi}\int rot(rot\mathbf{A}-\mathbf{H}_0)\delta\mathbf{A}dV-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int div[rot\mathbf{A}-\mathbf{H}_0,\delta\mathbf{A}]dV=$$

$$=\int\delta\mathbf{A}rotrot\mathbf{A}dV-\frac{1}{4\pi}\oint_{sur}[rot\mathbf{A}-\mathbf{H}_0,\delta\mathbf{A}]d\mathbf{S}.$$

Поверхневий інтеграл дорівнює нулеві, бо магнітне поле на поверхні НП має бути заданим, а отже $\delta\mathbf{A}|_{sur}=0$. В результаті, можемо записати:

$$\delta_{\mathbf{A}}G_S(\mathbf{H})=\int\delta\mathbf{A}\frac{1}{4\pi}[i\hbar\Psi^*\nabla\Psi-\frac{2e}{c}i\hbar\Psi\nabla\Psi^*+\frac{4e^2}{c^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A}+$$

$$+\frac{4e^2}{c^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A}+\frac{1}{4\pi}rotrot\mathbf{A}]dV=$$

$$=\int[\frac{i\hbar e}{2m_fc}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{2e^2}{m_fc^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}rotrot\mathbf{A}]\delta\mathbf{A}dV=0.$$

Тепер очевидно, що вираз під інтегралом має дорівнювати у НП нулю, щоб інтеграл давав нуль при будь-якій варіації. Згадаємо також, що згідно з другим рівнянням Лондонів $rot\mathbf{H}=(4\pi/c)\mathbf{j}_S$, і, з іншого боку, $rot\mathbf{H}=rotrot\mathbf{A}$. Ці два співвідношення дозволяють отримати

$$i\frac{\hbar e}{2m_fc}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{2e^2}{m_fc^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A}+\frac{1}{c}\mathbf{j}_S=0,$$

або

$$\mathbf{j}_S = -i\frac{\hbar e}{2m_f}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m_f c}|\Psi|^2\,\mathbf{A},$$

де внаслідок того, що $2e/4m_f = e/2m_f$, перший доданок має звичайний вигляд.

В теорії НП рівняння Гінзбурга-Ландау прийнято використовувати у безрозмірних змінних. Скористуємося ними, для чого позначимо:

$$\psi \equiv \frac{\Psi}{|\Psi_0|},$$

де

$$|\Psi_0|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}.$$

Тоді перепишемо перше рівняння Гінзбурга-Ландау:

$$\frac{1}{4m_f}(i\hbar\nabla + \frac{2e}{c})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\,\Psi = 0;$$

$$\frac{\hbar^2}{4m_f}(i\nabla + \frac{2e}{\hbar c}\mathbf{A})^2\Psi - |\alpha|\Psi + \beta|\Psi|^2\,\Psi = 0;$$

$$\frac{\hbar^2}{4m_f|\alpha|}(i\nabla + \frac{2\pi e}{\pi\hbar c}\mathbf{A})^2\frac{\Psi}{|\Psi_0|} - \frac{\Psi}{|\Psi_0|} + \frac{\beta}{|\alpha|}|\Psi|^2\frac{\Psi}{|\Psi_0|} = 0;$$

$$\xi_S^2(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})^2\psi - \psi + |\psi|^2\,\psi = 0\ ,$$

де ми скористалися позначенням кванта потоку $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ і ввели величину ξ_S розмірності довжини:

$$\xi_S^2 = \frac{\hbar^2}{4m_f|\alpha|},$$

зміст якої з'ясуємо трохи пізніше. Гранична умова також переписується:

$$(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})\mathbf{n}\psi = 0\,.$$

Фактично вона забезпечує відсутність НП струму через границю (поверхню) зразка, або рівність $\mathbf{j}_S\mathbf{n} = 0$. Проте це справедливо лише у ситуації, коли НП граничить з вакуумом. Якщо ж НП стикається з нормальним металом або напівпровідником, то в феноменологічному підході відповідна гранична умова, що дозволяє $\mathbf{j}_S \neq 0$ через границю, має вигляд:

$$(i\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A})\mathbf{n}\psi = i\frac{1}{b}\psi\,,$$

де b – деяка константа.

Перетворимо друге рівняння теорії Гінзбурга-Ландау:

$$\frac{1}{4\pi} rotrot\mathbf{A} = -i\frac{\hbar e}{2m_f c}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{m_f c^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A};$$

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{2\pi\hbar e}{m_f c}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{8\pi e^2}{m_f c^2}|\Psi|^2\,\mathbf{A};$$

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{2\pi\hbar e^2 c}{m_f c^2 e}|\Psi_0|^2\,(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{8\pi e^2}{m_f c^2}|\Psi_0|^2|\psi|^2\,\mathbf{A};$$

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{2e^2\Phi_0}{m_f c^2 e}\frac{n_S}{2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{8\pi e^2}{m_f c^2}\frac{n_S}{2}|\psi|^2\,\mathbf{A};$$

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{\cancel{2}e^{\cancel{2}}\Phi_0}{m_f c^2 \cancel{e}}\frac{n_S}{\cancel{2}}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{4\cancel{8}\pi e^2}{m_f c^2}\frac{n_S}{\cancel{2}}|\psi|^2\,\mathbf{A};$$

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{\Phi_0}{\dfrac{4\pi m_f c^2}{4\pi e^2 n_S}}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{1}{\dfrac{m_f c^2}{4\pi e^2 n_S}}|\psi|^2\,\mathbf{A},$$

звідки, враховуючи, що $\lambda_L^2 \equiv m_f c^2/4\pi e^2 n_S$, отримуємо:

$$rotrot\mathbf{A} = -i\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L^2}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2}\mathbf{A}.$$

Це і є шукане друге рівняння Гінзбурга-Ландау . Воно спрощується, коли зробити заміну $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|\,e^{i\theta(\mathbf{r})}$, яку ми вже робили, отримавши:

$$\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^* = |\psi|\,e^{-i\theta}\nabla|\psi|\,e^{i\theta} + |\psi|^2\,e^{-i\theta}e^{i\theta}i\nabla\theta -$$

$$-|\psi|\,e^{i\theta}\nabla|\psi|\,e^{-i\theta} - |\psi|^2\,e^{i\theta}e^{-i\theta}(-i\nabla\theta) = 2i|\psi|^2\,\nabla\theta,$$

що дає

$$rotrot\mathbf{A} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}|\psi|^2\,\nabla\theta - \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2}\mathbf{A} = \frac{|\psi|^2}{\lambda_L^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right).$$

Фактично – це друге рівняння Лондонів ($\lambda_L^2 = c^2\Lambda/4\pi$):

$$rotrot\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_S = \frac{4\pi}{c^2\Lambda}|\psi|^2\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right),$$

або

$$\mathbf{j}_S = \frac{|\psi|^2}{c\Lambda}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right).$$

Різниця – у присутності $|\psi|^2$, що свідчить про залежність НП струму не тільки від фази та векторного потенціалу, але й від густини частинок. Нагадаємо, що в класичному підході друге рівняння Лондонів має вигляд (див. Лекцію 5)

$$\mathbf{j}_S = -(1/c\Lambda)\mathbf{A},$$

а його квантова узагальнення (див. Лекцію 6) –

$$\mathbf{j}_S = -\frac{1}{c\Lambda}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\theta - \mathbf{A}\right).$$

Отже, в теорії Гінзбурга-Ландау рівняння для НП струму набуває свого остаточного вигляду, який прямо враховує квантову природу явища.