МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ З ФІЗИКИ.

РОЗДІЛ 'МЕХАНІКА'

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
для студентів напряму 6.040203 «Фізика»
професійного спрямування « Фізика. Комп'ютерна фізика»

екомендовано вченою радою фзико-математичного факультету

Київ
2012

Методичні вказівки та розв'зки задач з фізики. Розділ «Механіка» для студентів напряму 6.040203 «Фізика», професійного спрямування «Фізика. Комп'ютерна фізика» денної форми навчання / Уклад. О.М.Бродин, М.М.Панченко.-К.:НТУУ «КПІ», 2012.-92с.

Гриф надано вченою радою ФМФ
(*протокол № 1 від 26 січня 2012 р.)*

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ З ФІЗИКИ.
РОЗДІЛ 'МЕХАНІКА'

Методичні вказівки
до виконання самостійної роботи
для студентів напряму 6.040203 «Фізика»,
професійного спрямування « Фізика. Комп'ютерна фізика»

Укладачі: *Олександр Михайлович Бродин, д.ф-м.н, доцент*
Марія Мирославівна Панченко, ст.. викладач

Відповідальний
редактор: *Локтєв В.М, акад. НАНУ, професор*

Рецензент: *Таращенко Н.І., к.ф-м.н., доцент*

\

Зміст

Вступ

Фізика як наука про явища природи є фундаментом всього сучасного природознавства. Вивчення фізики особливо важливе для формування наукового світогляду сучасного спеціаліста, а особливо спеціаліста технічного напрямку. Адже пізнання законів фізичної картини світу формує основу для засвоєння спеціальних дисциплін.

При вивченні фізики особливо важливе місце займає самостійна робота студентів при розв'язуванні фізичних задач. Аналізуючи умову задачі, студенти осмислюють і запам'ятовують основні закони фізики та межі їх застосування, вчаться правильно застосовувати математичний апарат, поглиблюють навички чисельних розрахунків.

Даний посібник призначений допомогти студентам при виконанні ними самостійних і домашніх робіт з фізики.

Методичні вказівки

Приступаючи до розв'язування задач, потрібно повторити (або вивчити) теоретичний матеріал, користуючись конспектом і підручниками.

Рекомендується притримуватися такого порядку при розв'язуванні задач.

1. Вивчення та аналіз умови задачі:

- уважно прочитати умову задачі, приділяючи увагу мілким деталям змісту;
- якщо трапляються незнайомі терміни, треба вияснити їх значення в довіднику або підручнику;
- старатися зрозуміти суть фізичного явища і суть запитання;
- в більшості випадків бажано зробити малюнок, на якому вказати всі фізичні величини, що характеризують фізичне явище (малюнок має бути достатньо великим і охайним);

- записати скорочену умову задачі і перевести всі числові дані в систему одиниць СІ, використовуючи показникову форму запису числа;
- записати значення відомих величин, скориставшись довідником (якщо вони не задані в умові задачі).

2. Аналіз фізичних явищ та складання алгебраїчних рівнянь:

- аналізуючи умову задачі, треба чітко уявити фізичне явище, згадати фізичні закони, що його зумовили і записати їх математичний вираз;
- записати математичний вираз фізичних законів та співвідношень між фізичними величинами в символьному вигляді і отримати систему алгебраїчних рівнянь, що містять відомі і невідомі величини;
- якщо закон формулюється за допомогою векторних величин, то записати його в векторній формі (бажано перевірити, чи кількість векторів на малюнку співпадає з кількістю доданків в векторних рівняннях);
- вибрати систему відліку, виходячи з умов зручності (якщо взаємодіючі тіла рухаються в різних напрямках, то можна вибирати системи відліку для кожного тіла зокрема);
- систему векторних рівнянь записати в проекціях на осі вибраної системи відліку (найчастіше це декартова система координат);
- при розв’язуванні складної задачі доцільно розділити її на частини і розв’язувати кожну частину зокрема.

3. Розв’язок системи алгебраїчних рівнянь і знаходження шуканої величини

- приступаючи до розв’язку системи алгебраїчних рівнянь, треба перевірити, чи система рівнянь повна (кількість рівнянь має дорівнювати кількості невідомих), виключити ті невідомі, яких немає в умові задачі;
- розв’язок отримати в загальному вигляді, не підставляючи числові дані (тільки мала кількість задач вимагає підстановки числових значень в процесі розв’язку);

- перевірити розмірність отриманих величин (це зменшує можливість помилки);
- всі алгебраїчні перетворення треба записувати охайно і розбірливо, бажано писати коментарі.

4. Аналіз одержаного результату та обчислення:

- перевірити розмірність отриманої відповіді, якщо вона не очевидна (неправильна розмірність отриманої фізичної величини означає, що задача розв’язана невірно). Але може трапитися і таке, що розмірність відповіді хоча і правильна, але відповідь не має фізичного змісту – тобто є неправильною;
- виконати обчислення в системі одиниць СІ, відповідь треба округляти так, щоб не перевищувати точність вихідних даних (у відповіді залишати на одну цифру після коми більше, ніж у вихідних даних);
- за отриманим числовим значенням зробити висновок відносно правильності відповіді.

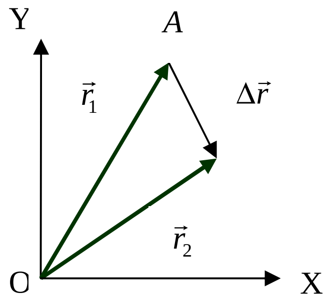
2. Кінематика

Основні формули

Радіус-вектор $\vec{r}$ точки A – це вектор, проведений в цю точку з початку відліку. Його проекції на осі прямокутної системи координат:

$$r_x = x, r_y = y, r_z = z\,,$$

де $x, y.z$ - координати точки.



Мал. 1.

Вектор переміщення:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, (\text{м})$$

де $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ - радіус-вектори точок 1 і 2.

Вектор середньої швидкості переміщення за час $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$$

Вектор миттєвої швидкості $\vec{v}$:

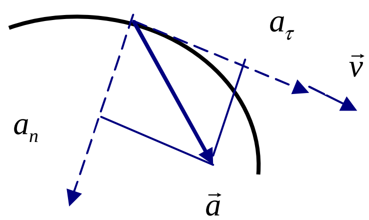
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t)$$

Середня шляхова швидкість v_c : $\quad v_c = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$

Шлях, пройдений тілом з точки 1 до точки 2. $\quad \Delta S = \int\limits_1^2 v(t)dt$

Вектор середнього прискорення: $\quad \vec{a}_c = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \left(\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$

Вектор прискорення (Мал. 2.): $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$



Мал .2.

Прискорення тіла в проекціях на дотичну і нормаль до траекторії:

-тангенціальне прискорення,

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt}$$

нормальне прискорення,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

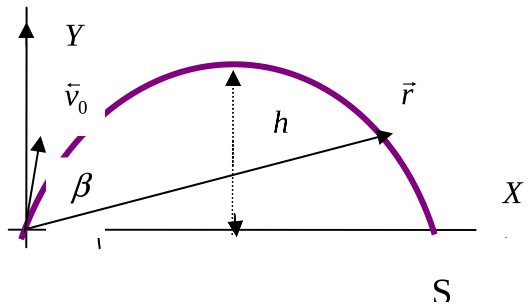
де ρ - радіус кривизни траєкторії.

Рівноприскорений рух: $\vec{a} = const$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,; \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 + \frac{\vec{a}t^2}{2}`$$

де $\vec{r}_0$ - радіус-вектор початкового положення тіла, $\vec{v}_0$ - його початкова швидкість.

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту:



Мал. 3.

Радіус – вектор тіла:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

в проекція на осі X та Y

$$x = v_0 \cos\beta * t\,,$$

$$y = v_0 \sin\beta * t - \frac{gt^2}{2}$$

(опором повітря нехтуємо, g =10м/с^2) (Мал. 3):

Вектор швидкості: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

В проекціях на осі X та Y

$v_x = v_0 \cos\beta$

$v_y = v_0 \sin\beta - gt$

Висота підйому тіла: $h = \dfrac{v_0^{\ 2} \sin^2\beta}{2g}$;

дальність польоту: $S = \dfrac{v_0^{\ 2} \sin 2\beta}{g}$

Рух тіла по колу (Мал. 4):

Вектор кутової швидкості:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Вектор кутового прискорення:

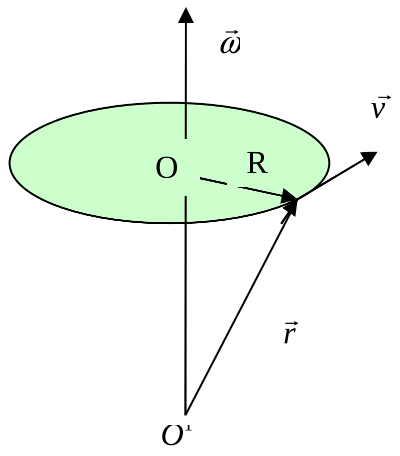
$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Зв'язок між лінійними і кутовими величинами:

$\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$, $\qquad a_n = \omega^2 R$,

$a_\tau = \beta_z R$

$\vec{r}$ - радіус-вектор відносно довільної точки на осі обертання, R - відстань до осі обертання.



Мал. 4

середня кутова швидкість: $\omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (рад/с);

середнє кутове прискорення $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (рад/с^2).

Рівномірний рух по колу (Мал. 5):

φ (рад) – кутова координата;

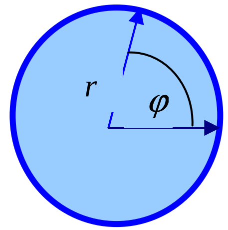
T (с) - ***період*** - час одного оберту;

ν (*1/с*)-***частота***–кількість обертів, здійснених за 1секунду;

ω (*рад/с*) - ***колова (циклічна) частота*** – кількість обертів, здійснених за 2π секунд.

При рівномірному русі:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$



Мал. 5

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

Приклади розв'язування задач

Задача 1.1. Рівняння прямолінійного руху тіла вздовж осі ОХ має вигляд: $x = 5 + 12t - 4t^2$. Знайти швидкість тіла в момент часу $t_0 = 3c$. В який момент часу після початку руху тіло змінить напрямок на протилежний? В який момент часу тіло повернеться в точку з координатою $x = 0$?

Розв'язок.

Дано: $x = 5 + 12t - 4t^2$

$t_0 = 3c$

1) v =? , 2) t_1 =?, 3) x =0, t_2 =?

Знайдемо швидкість і прискорення тіла:

$$v = \frac{dx}{dt} = 12\text{-}8t \ (\text{м/с}) \qquad (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -8 \ (\text{м/с}^2) \qquad (2)$$

В момент часу $t_0 = 3c$ швидкість $v = 12 - 8*3 = -12$ (м/с).

Тіло змінює напрям руху на протилежний в момент зупинки (v=0), отже час зміни напрямку руху знайдемо з рівняння: 12 - 8t_1=0

і отримаємо: $t_1=\frac{12}{8}$=1,5 (с). Знайдемо час t_2 з умови задачі: $x=5+12t-4t^2$,

якщо x=0, то: 5+12t_2-4t_2^2 = 0.

Запишемо це рівняння в канонічному вигляді:

$$4t_2^2-12t_2-5=0 \qquad (3)$$

звідки, розв'язавши його, знайдемо: t_2=3,375 с.

Відповідь: v = - 12м/с; t_1=1,5с; t_2 = 3,375с.

Задача 1.2. Один із способів оцінки якості автомобіля ґрунтується на визначенні того, наскільки швидко він розганяється до швидкості 60км/годину. У деяких автомобілів прискорення обмежується не потужністю двигуна, а проковзуванням коліс. Хороші шини забезпечують прискорення приблизно 0,5 g. Скільки часу і який шлях потрібний для розгону автомобіля до швидкості 60км/годину?

Розв'язок.

Дано: v_0=0

$a=0{,}5g$

v=60км/годину = 16,8 м/с

t=?, x=?

Рух автомобіля рівноприскорений, початкова швидкість дорівнює нулю (v_0=0). Запишемо формулу для швидкості : $v=at$,

звідки час розгону $t=\frac{v}{a}$. Шлях, пройдений за час розгону $x=\frac{at^2}{2}$ Перевіримо

розмірність: $t=\frac{v}{a}=\frac{м*с^2}{м*с}=с$, $x=\frac{at^2}{2}=\frac{м*с^2}{с^2}=м$

Підставимо числові значення в формули (2,3):

$$t=\frac{v}{a}=\frac{16{,}8}{0{,}5*9.8}=3{,}4\,\text{с},\quad x=\frac{at^2}{2}=\frac{0{,}5*9{,}8*3{,}4^2}{2}=28{,}3\,\text{м}$$

По аналогії з цим прикладом можна визначити мінімальний час і гальмівний шлях до повної зупинки автомобіля, якщо його мінімальне прискорення $a=0{,}5g=-4{,}9$ м/с^2.

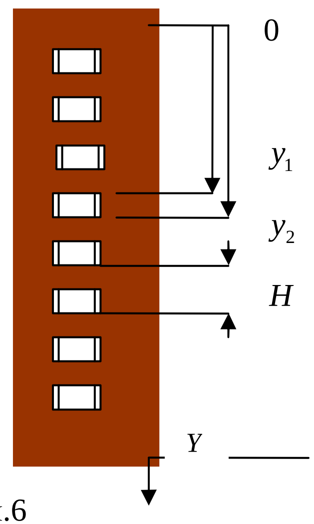
Початкова швидкість $v_0=16{,}8$ м/с^2: В момент зупинки v=0, отже час до зупинки

знайдемо з рівняння $v=v_0-at$, звідки: $t=\frac{v_0}{a}=\frac{16{,}8}{4.9}=3.4$ с.

Як і можна було сподіватися, ми отримали такий самий час, як і при розгоні. Отже, гальмівний шлях буде дорівнювати 28,3м.

Відповідь: t = 3,4с; x = 28.3м.

Задача 1.3. Людина знаходиться в кімнаті на п'ятому поверсі і бачить, як мимо її вікна пролітає зверху квітковий горщик. Відстань 2м, що дорівнює висоті вікна, горщик пролетів за 0,1с. Висота одного поверху 4м. Визначте, з якого поверху впав горщик.



Мал.6

Розв'язок.

Дано: h=2 м

Δt=0.1 с

H=4 м.

N=?

Рух горщика рівноприскорений (опором повітря нехтуємо), його початкова швидкість v_0=0. Початок координат виберемо в точці початку руху, вісь ОУ спрямуємо вниз). Координати верхньої і нижньої частин рами вікна (Мал. 6) : y_1 і y_2, причому $y_2 - y_1 = h$.Отже:

$$y_1 = \frac{gt_1^{\ 2}}{2} \qquad (1)$$

$$y_2 = \frac{gt_2^{\ 2}}{2} \qquad (2)$$

Враховуючи, що $t_2 = t_1 + \Delta t$, а $y_2 - y_1 = h$, отримаємо:

$$h = \frac{g}{2}((t_1 + \Delta t)^2 - t_1^{\ 2}) = \frac{g}{2}\Delta t(2t_1 + \Delta t) \qquad (3)$$

Знайдемо час падіння тіла до верхньої частини вікна з виразу (3):

$$t_1 = \frac{2h}{g\Delta t} - \Delta t \qquad (4)$$

Підставимо числові значення: $t_1 = \frac{2*2}{10*0{,}1} = 3{,}9c \approx 4c.$

Координата верхньої частини вікна:

$$y_1 = \frac{gt_1^{\ 2}}{2} = \frac{10*16}{2} = 80 \text{ м.} \qquad (5)$$

Висота одного поверху $H = 4$м, тому горщик пролетів $n = \frac{80}{4} = 20$ поверхів, а падав горщик з $N = n + 5 = 25$ поверху.

В цій задачі розмірність отриманого результату очевидна, тому її перевіряти не потрібно.

Відповідь: $N = 25$.

Задача 1.4. З підводного човна запускається балістична ракета, наведена на місто, яке знаходиться на відстані 3000км від човна. За який час ракета долетить до

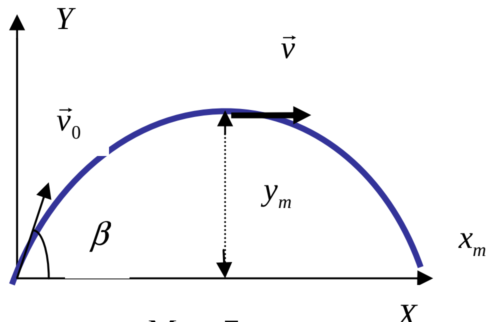
цілі і яка її стартова швидкість v_0? При цьому будемо вважати Землю плоскою, прискорення вільного падіння сталим (g =9.8 м/с^2), опором повітря і води нехтуємо.

Розв'язок.

Дано: x_m = 3*10^{6}м/с

t =?,

v_0 =?



Мал. 7

Спочатку вияснимо, під яким кутом треба запустити ракету, щоб вона досягла точки x_m на поверхні Землі. Рух ракети рівноприскорений, тому рівнянням руху є:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2} \qquad (1)$$

В проекціях на осі ОХ і ОУ: ОХ: $x = v_0 t \cos\beta$

ОУ: $y = v_0 t \sin\beta - \frac{gt^2}{2}$

Швидкість ракети змінюється за формулою: $\vec{v} = \vec{v}_0 - \vec{g}t$

В проекціях на осі ОХ і ОУ: ОХ: $v_x = v_0 \cos\beta$

ОУ: $v_y = v_0 \sin\beta - gt$

Траєкторія ракети – парабола (Мал.7). В найвищій точці траєкторії вектор швидкості паралельний осі ОХ, отже $v_y = 0$ і $v_0 \sin\beta - gt_1 = 0$. Звідси отримаємо час підйому ракети : $t_1 = \frac{v_0 \sin\beta}{g}$. (2)

Час руху ракети від запуску до цілі:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\beta}{g}. \qquad (3)$$

Підставимо t_2 в формулу для координати x і отримаємо дальність польоту:

$$x_m = \frac{v_0^{\,2} \sin 2\beta}{g} \qquad (4)$$

Максимальна дальність польоту буде досягнута, якщо ракету націлити під кутом β =45^0. Знайдемо початкову швидкість ракети: $v_0 = \sqrt{gx_m} = \sqrt{9,8*3*10^6} = 5,42$ км/с.Повний час руху ракети буде:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin 45^0}{g} = \frac{2*5,42*10^3*\sqrt{2}}{2*9,8} = 783c = 13 \text{ хвилин.}$$

З цього прикладу видно, що в випадку ракетного нападу максимальний запас часу становить приблизно 10 хвилин, що замало для евакуації міста.

Вияснимо, на яку найбільшу висоту піднімається ракета. Для цього підставимо час t_1 в формулу для y :

$$y_m = \frac{v^2{}_0 \sin^2\beta}{2g} = \frac{5,42^2*10^6*2}{2*9,8*4} = 0,749*10^6 \text{ м=749 км}$$

Відповідь: v_0 = 5,42км/с, t_2 = 13хв.

Задача 1.5. Тіло рухається по колу так, що його кутова координата змінюється з часом за формулою: $\varphi(t) = At - Bt^3$, де A =3 рад/с. а B = 5 рад/с^3. Знайти: а) залежність кутової швидкості і кутового прискорення від часу; б) час до зупинки; в) кутове прискорення в момент зупинки.

Розв'язок.

Дано: $\varphi(t) = At - Bt^3$

A =3 рад/с, B = 5 рад/с^3

а) $\omega(t)$?, б) t_3 -?, в) β_3 -?

Модуль кутової швидкості: дорівнює

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (At - Bt^3)' = t - 3Bt^2, \qquad (1)$$

а модуль кутового прискорення: $\beta = \frac{d\omega}{dt} = (t - 3Bt^2)' = 1 - 6Bt$

В момент зупинки ($t = t_3$) кутова швидкість дорівнює нулю. $t_3 - 3Bt_3^{\,2} = 0$ (3)

З формули (3) визначимо час зупинки і кутове прискорення:

$$t_3 = \frac{1}{3B} = \frac{1}{15} = 0.067 \text{ с}, \quad \beta_3 = 1 - 6Bt_3 = 1 - 6*5*0.067 = -1 \text{ рад/ с}^2$$

Відповідь: t_3 = 0,067с; β_3 = -1рад/с^2.

Задача 1.6. Колесо обертається з кутовим прискоренням 2рад/с^2. Через 0,5с після початку руху повне прискорення колеса 0,136м/с^2. Знайти радіус колеса.

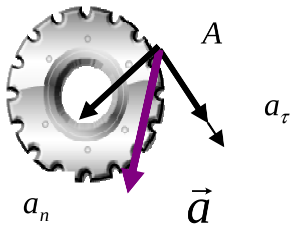
Розв'язок.

Дано: β = 2рад/с^2,

t = 0,5с,

a = 0,136м/с^2,

R -?



Мал.8.

Кутова швидкість колеса дорівнює: $\omega = \beta t$, лінійна швидкість точки A на ободі колеса (Мал.8): $v = \omega R = \beta R t$.Тангенціальне прискорення: $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \beta R$, нормальне прискорення: $a_n = \frac{v^2}{R} = \beta^2 t^2 R$. Повне прискорення точки A знайдемо за теоремою Піфагора: $a = \sqrt{a_\tau^{\,2} + a_n^{\,2}} = \sqrt{(\beta R)^2 + (\beta R)^4 R^2}$.

Виразимо радіус колеса: $R = \dfrac{a}{\beta\sqrt{1+\beta^2 t^4}}$,

підставимо числові значення: $R = \dfrac{0,136}{2\sqrt{1,25}}$ = 0,062м

Відповідь: R =0,06м.

Задачі для самостійної роботи

1.7 Камінь, кинутий вертикально вгору, впав на землю через 3с. Якою була початкова швидкість каменя і на яку висоту він піднімався. (15м/с; 11,25м)

1.8. Мяч, кинутий горизонтально, впав на землю через 0.5с на відстані 5м по горизонталі. З якої висоти кинуто м’яч? З якою початковою швидкістю? (1,25м; 10м/с)

1.9. Жаба масою 50г стрибає під кутом 30^0 на відстань 0,5м. Які стартова швидкість v_0 і максимальна висота стрибка? (3.16м/с; 1,25м)

1.10. Два м’ячі кинуті з однієї точки з однаковою швидкістю 10м/с під кутами 30^0 і 60^0 до горизонту. На яку висоту вони піднімуться? На якій відстані впадуть на землю? (1,25м,5м; 3,75м, 8,6м)

1.11 .Двоє хлопців кидають м’яч один одному. На яку найбільшувисоту підніметься м’яч, якщо він летить дві секунди? (5м)

1.12. Рівняння руху тіла вздовж осі ОХ має вигляд: $x = 6t - 0.125t^3$ (м). Яку середню швидкість має тіло на проміжку часу від t_1 =2с до t_2 =6с? (3м/с)

1.13. Тіло рухається в площині xy так, що координати тіла змінюються за законом: $x = \alpha t$ і $y = \alpha t(1 - \beta t)$, де α і β додатні сталі. Знайти: 1) рівняння траєкторії $y(x)$ та зобразити її графік; 2) швидкість $v(t)$ і прискорення $a(t)$ в залежності від часу.

1.14. Знайти, з якою кутовою швидкістю обертається Земля довкола своєї

осі та яку лінійну швидкість має точка на екваторі. (461м/с;)

1.15. З якою лінійною швидкістю має рухатися літак зі сходу на захід вздовж екватора, щоб пасажирам цього літака Сонце здавалось би нерухомим? (1674км/год.).

1.16. Вентилятор обертається з частотою 900об/хв. Після виключення Вентилятор зробив 75 обертів до зупинки. Скільки часу пройшло від виключення вентилятора до зупинки? (10с).

1.17. Тіло рухається по колу радіусом 2см. Залежність кута повороту від часу має такий вигляд: $\varphi(t) = At^3$, де A =0.1см*с. Знайти нормальне та тангенціальне прискорення тіла в момент часу, коли лінійна швидкість дорівнює 0,3м/с. (4,5м/с^2; 0,06м/с^2).

1.18. Знайти швидкість човна відносно берега, якщо:1) човен пливе за течією; 2) човен пливе проти течії; 3) човен рухається під кутом 90^0 до течії. Швидкість течії ріки 1м/с, швидкість човна відносно води 2м/с. (3м/с; 1м/с: 2,24м/с)

1.19. Точка починає рухатися по колу радіусом 10см із швидкістю $v = \alpha t$, де α =0,5м/с^2. Знайти її повне прискорення в момент часу t =2с. (10м/с^2).

1.20. Між двома пунктами, розташованими на березі річки на відстані 24км. рухається катер. Рухаючись за течією, катер проходить цю відстань за 2 години, а рухаючись проти течії - за 3 години. Знайти швидкість течії річки і швидкість катера відносно води.(3км/годину; 9км/годину).

1.21. Тіло, що рухається по колу радіусом 20см, зробило ¾ оберта. Визначити переміщення та шлях тіла (14,1м; 47,1м).

1.22. Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через час 2с після початку руху вектор повного прискорення точки на ободі колеса утворює кут 60^0 з вектором її лінійної швидкості. (0.45рад/с).

1.24. Знайти радіус колеса, що обертається, якщо лінійна швидкість точки А на ободі колеса в 2,5 рази більша від лінійної швидкості точки В, яка знаходиться на 5см ближче до осі колеса. (8,33см).

2. Динаміка

Методичні вказівки

Матеріальну точку називають ***вільною***, якщо її рух під дією заданих сил не обмежено ніякими наперед заданими умовами. Рух вільної матеріальної точки підпорядковується законам Ньютона. Розглядаються два типи задач: пряма і обернена. ***Пряма задача*** - за рівнянням руху тіла $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ знаходять сили, що діють на тіло. Розв'язується вона диференціюванням з врахуванням початкових умов. ***Обернена задача*** - знаючи сили, що діють на тіло, знаходять закони руху цього тіла. Розв'язується інтегруванням диференціальних рівнянь.

Розв'зувати задачі з динаміки бажано в такій послідовності:

- прочитавтши умову задачі, записати скорочену умову, задані фізичні величини записати в системі одиниць СІ;
- уяснити, з якими тілами взаємодіє дане тіло;
- побудувати малюнок, на ньому вказати стрілками ннапрям сил, що діють на кожне з тіл (Стрілки, якими позначаються сили, починаються з центрів мас тіл);
- для кожного тіла записати основне рівняння динаміки в векторному вигляді;
- вибрати систему відліку з міркувань зручності (досить часто зручно вибирати для кожного тіла свою систему відліку);
- кожне з векторних рівнянь записати в проекція на осі вибраної системи координат (найчастіше це декартова система);
- отримавши систему алгебраїчних рівнянь, перевірити, чи кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих (якщо це не так, то записати рівняння кінематичного зв'язку та виключити ті невідомі, яких немає в умові задачі);
- розв'язати систему рівнянь, перевірити розмірнність отриманої відповіді та підставити числові значення.

Основні формули

Інерціальна система відліку (ІСВ):

ІІ закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F},$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ - імпульс тіла, $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - рівнодійна всіх сил, що діють на тіло.

ІІ закон Ньютона для тіл із сталою массою ($m = const$) :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

ІІ закон Ньютона в проекціях на осі декартових координат:

$$\text{OX: } a_x = \frac{F_x}{m}, \quad \text{OY: } a_e = \frac{F_y}{m}, \quad \text{OZ: } a_z = \frac{F_z}{m}$$

ІІ закон Ньютона в проекціях на дотичну τ і нормаль n до траєкторії:

$$\tau: \ a_\tau = \frac{F_\tau}{m}` \qquad n: \ a_n = \frac{F_n}{m}$$

ІІІ закон Ньютона:

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$$

Неінерціальні системи відліку (НІСВ):

ІІ закон Ньютона в неінерціальній системі відліку (НІСВ):

$$m\vec{a} = -m\vec{a}_0 + m\omega^2\vec{R} + 2m[\vec{v}_0\omega]$$

$\vec{a}$ - прискорення тіла в НІСВ, $\vec{a}_0$ - поступальне прискорення НІСВ, $\vec{\omega}$ - кутова швидкість обертального руху НІСВ, $\vec{R}$ - радіус - вектор тіла відносно осі обертання.

Сила всесвітнього тяжіння:

$$\vec{F}_G = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$$

де m_1, m_2 - маси взаємодіючих тіл, r - відстань між ними.

Сила земного тяжіння на поверхні Землі:

$$\vec{P} = m\vec{g} \ ,$$

де m - маса тіла, $\vec{g}$ - прискорення земного тяжіння (g =9,81 м/с^2).

Сила сухого тертя: $F_m = \mu N$,

де μ - коефіцієнт тертя, N - мордуль сили нормальної реакції опори, яка чисельно дорівнює силі, з якою тіло тисне на поверхню. Сила сухого тертя є сталою, не залежить ні від координат, ні від швидкості тіла.

Сила в'язкого тертя пропорційна швидкості тіла $\vec{v}$ і дорівнює:

$$\vec{F}_{в.т} = -r\vec{v} \ ,$$

де r - коефіцієнт в'язкості.

Сила пружності:

$$\vec{F}_{пр} = -k \ \Delta\vec{x} \ ,$$

де k - коефіцієнт пружності, $\Delta\vec{x}$ - абсолютна деформація тіла**.**

Закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon$$

де $\sigma = \dfrac{F}{S}$ - напруга (відношення сили до площі поперечного перерізу), $\varepsilon = \dfrac{\Delta x}{x}$ - відносна деформація, E - модуль Юнга.

Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Тіло масою m рухається вздовж осі x за законом $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, де α і β - додатні сталі. Знайти значення сили F в момент часу $t = \tau$.

Розв'язок:

Дано: $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, де α і β - додатні сталі?

$m, t = \tau$

F = ?

Знайдемо швидкість тіла

$$v = \frac{dx}{dt} = (at^2 - \beta t^3)' = 2\alpha t - 3\beta t^2 \qquad (1)$$

та його прискорення:

$$a = \frac{dv}{dt} = (2\alpha t - 3\beta t^2)' = 2\alpha - 6\beta t \qquad (2)$$

Згідно з II законом Ньютона, сила дорівнює:

$$F = ma = m(2\alpha - 6\beta t) \qquad (3)$$

Підставимо $t = \tau$ в формулу (3) і отримаємо:

$$F = m(2\alpha - 6\beta\tau)$$

Відповідь: $F = m(2\alpha - 6\beta\tau)$

Задача 2.2. В верхній точці похилої площини з кутом нахилу до горизонту α =30^0, закріплено блок, через який перекинута невагома і нерозтяжна нитка. До кінців нитки прив'язані вантажі масами M = 1кг і m = 0,5кг. Знайти: а) силу натягу нитки; б) за який час вантаж M пройде шлях 60см від початку руху? Тертя нитки та блоку відсутнє. Коефіцієнт тертя вантажу M по похилій площині μ =0,25.

Розв'язок:

Дано: M = 1кг,

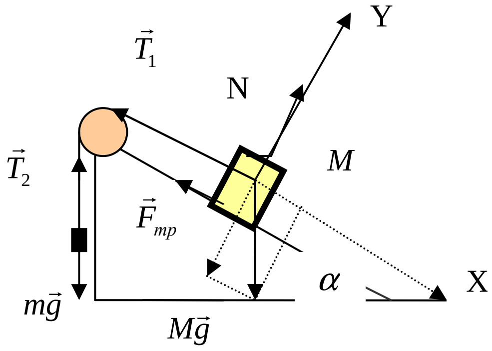
m = 0,5кг,

α =30^0,

μ =0,25

а) T -?, б) $S =$ 0,6м, t -?

б) $S =$ 0,6м, t -?



Мал. 9.

Будуємо рисунок, вказуючи стрілками сили, які діють на кожне з тіл. Сили прикладаються до центрів мас тіл (мал. 9).Виходячи з умови задачі, вводимо обмеження:

а) нитка невагома і нерозтяжна, тому прискорення обох тіл по модулю однакові;

б) тертя між ниткою і блоком відсутнє, тому модулі сил натягу нитки справа і зліва від блоку будуть однакові ($T_1 = T_2$).

Так як m менше M , то можна очікувати, що система тіл буде рухатися по годинниковій стрілці. В цьому випадку напрям сил, що діють на тіло, показано на малюнку, де $\vec{F}_{тр}$ - сила тертя ковзання, $\vec{N}$ - сила реакції опори, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ - сили натягу нитки, $M\vec{g}$ і $m\vec{g}$ - сили земного тяжіння.

Запишемо II закон Ньютона для кожного з тіл:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} \qquad (1)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad (2)$$

Виберемо систему відліку: для більшого тіла вісь OX спрямуємо паралельно до поверхні похилої площини, а вісь OY – перпендикулярно до неї. Менше тіло може рухатися тільки по вертикалі, тому для нього вісь OY паралельна напрямку руху.

Запишемо рівняння (1) в проекціях на осі OX і OY :

$$OX: \quad Ma = Mg\sin\alpha - F_{тр} - T \qquad (1а)$$

$$OY: \quad 0 = -Mg\cos\alpha + N \qquad (1б)$$

а рівняння (2) – в проекції на вісь OY :

$$OY: \quad ma = -mg\cos\alpha + T \qquad (2а)$$

Знаходимо прискорення тіл, розв’язуючи систему рівнянь (1а-2а). З рівняння (2а) визначимо силу опори N : $N = Mg\cos\alpha$, а потім силу тертя: $F_{тр} = \mu \ Mg\cos\alpha$, підставимо в рівняння (1а) і отримаємо систему рівнянь:

$$Ma = Mg\sin\alpha - \mu \ Mg\cos\alpha - T$$

$$ma = -mg\cos\alpha + T \qquad (3)$$

Додавши рівняння системи (3), визначимо прискорення тіл:

$$a = \frac{g((M\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m\cos\alpha)}{M+m} \qquad (4)$$

Підставимо числові значення в формулу (4):

$$a = \frac{10((1*0,5 - 0,25*0,87) - 0,1*0,87)}{1+0,1} = 3,37 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо силу натягу нитки, підставивши числове значення прискорення в формулу (2а): T = 1,20Н.

Рух тіл рівноприскорений, тому шлях, пройдений від початку руху за час t буде дорівнювати $S = \frac{at^2}{2}$, звідки отримаємо час руху тіла: $t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$

Перевівримо розмірність: $t = \sqrt{\frac{м*с^2}{м}} = с$

Підставимо числові значення $t = \sqrt{\frac{2*0,6}{3,37}}$ =0,35с

Відповідь: a = 3,37 м/с^2, T =1,20Н, t =0,35с.

Задача 2.3. Кулька масою 5г, що може без тертя ковзати по горизонтальному стержню, зв'язана невагомою пружиною (коефіцієнт пружності $k=50$Н/м) з стінкою, куди вбито стержень. В момент часу t =0 кульку змістили вліво на відстань x =5мм і відпустили. Знайти залежність від часу координати $x(t)$, швидкості $v(t)$ і прискорення $a(t)$ кульки, а також їх амплітудні значення.

Розв'язок:

Дано: m =50г=50*10^{-3}кг.

k =50Н/м

x =5мм=5*10^{-3}м.

$x(t)$ -?, $v(t)$ -?, $a(t)$ -?

x_0 -?, v_0 -?, a_0 -?

Запишемо II закон Ньютона для кульки в той момент, коли кулька зміщена від положення рівноваги (початку координат O) на відстань x, сила пружності завжди спрямована в протилежну сторону від зміщення, тому перед kx взято знак ' - '.

$$ma=-kx\,, \qquad (1)$$

Запишемо прискорення як другу похідну від координати по часу:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad (2)$$

Поділимо рівняння (2) на m і отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x \qquad (3)$$

Розв'язком рівняння (3) є функція

$$x(t)=x_0\sin\omega t\,, \qquad (4)$$

що описує гармонічні коливання, x_0 - амплітуда коливань, $\omega=\frac{k}{m}$ - циклічна частота коливань.

Взявши похідну від $x(t)$ по часу, отримаємо вираз для швидкості кульки:

$$v=\frac{dx}{dt}=x_0\omega\cos\omega t=v_0\cos\omega t\,, \qquad (5)$$

де $v_0=x_0\omega$ - амплітуда швидкості.

Прискорення кульки - це похідна від швидкості по часу:

$$a=\frac{dv}{dt}=-x_0\omega^2\sin\omega t=a_0\sin\omega t\,, \qquad (6)$$

де $a_0=x_0\omega^2$ - амплітуда прискорення кульки.

Обчислимо частоту коливань: $\omega=\frac{k}{m}=\frac{50}{50*10^{-3}}$=1000рад/с.

Підставимо числові значення:

x_0 = 5*10^{-2}м, v_0 = 5*10^{-2}*1000=50м/с, a_0 = 5*10^{4}м/с^2.

Відповідь: x_0 = 5*10^{-2}м, v_0 = 5*10^{-2}*1000=50м/с, a_0 = 5*10^{4}м/с^2

Задача 2.4. Круглий стальний брус діаметром 2мм і довжиною 16см розтягують силою 36кН. Знайти видовження бруса і напругу в ньому, якщо модуль пружності бруса 2*10^{10} кг/см^2.

Розв'язок:

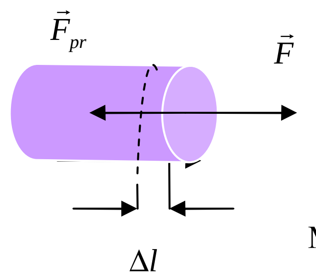
Дано: d =2*10^{-3} *м,*

l =*0.6м*

F =*36*10^3 Н*

E =*2*10^{10} кг/м^2*

1) Δl *=?, 2)* σ *=?*



Мал. 10

Площа поперечного перетину бруса (Мал. 10): $S=\frac{\pi d^2}{4}$.

Видовження бруса визначимо з закону Гука: $\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l}$ і отримаємо:

$$\Delta l=\frac{4Fl}{\pi d^2 E}=\frac{36*10^3*0.16*4}{3.14*4*10^{-6}*2*10^{10}}=9.17\text{см.}$$

Відповідь: Δl =9.17см.

Задача 2.5. Розрахувати модуль пружності кісткової тканини, якщо навантаження на зуб становить 50кг, площа поперечного перетину зуба 1см^2, довжина зуба 2см, видовження 0,01.

Розв'язок:

Дано: m =*50 кг;* S =*10^{-4}м^2*

l =*2*10^{-2}м;* Δl =*10^{-3}м*

E =?

Модуль пружності визначимо з закону Гука:

$$\frac{F}{S}=E\frac{\Delta l}{l} \qquad (1)$$

Сила, що діє на зуб, дорівнює:

$$F=mg\,, \qquad (2)$$

Підставивши вираз (2) в формулу (1), виразимо модуль пружності:

$$E=\frac{mgl}{S\Delta l}=\frac{50*10*2*10^{-2}}{10^{-4}*10^{-3}}=10^8\text{Па.}$$

Відповідь: E =10^{8}Па.

Задача 2.6. Катер масою m = 500кг рухається по озеру прямолінійно зі швидкістю v_0 =5м/с. В момент часу t =0 виключили двигун. Вважаючи силу опору води пропорційною швидкості катера $F=-rv$ (r =*0,5кг/с*), знайти: 1) час руху катера до зупинки: 2) шлях, пройдений катером до зупинки.

Розв'язок:

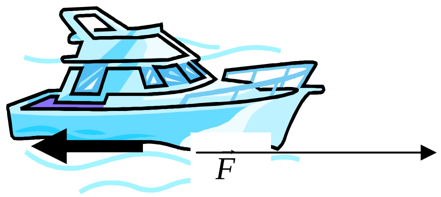
Дано: v_0 =*5м/с.*

m = *500кг*

$F=-rv$

r = *0,5кг/с*

1). $t_з$ =? , 2) S =?



Мал. 11.

Запишемо II закон Ньютона (в проекції на напрям руху (Мал. 11)):

$$m\frac{dv}{dt}=-rv\,. \qquad (1)$$

Рівняння (1) -це диференціальне рівняння з розділеними змінними. Помноживши обидві сторони рівняння (1) на $\frac{dt}{mv}$, отримаємо:

$$\frac{dv}{v}=-\frac{r}{m}dt \qquad (2)$$

Проінтегруємо ліву частину рівняння (2) по dv, праву- по dt

$$\int\frac{dv}{v}=-\frac{r}{m}\int dt \qquad (3)$$

і отримаємо:

$$\ln v=-\frac{r}{m}t+C \qquad (4)$$

Сталу інтегрування C знайдемо з початкових умов: при: $t=0$ швидкість $v=v_0$, звідки $C=\ln v_0$. Підставимо в (4) і отримаємо: $\ln v=-\frac{r}{m}t+\ln v_0$,або $\ln\frac{v}{v_0}=-\frac{r}{m}t$. Залежність швидкості від часу: має вигляд:

$$v=v_0\exp(-\frac{r}{m}t) \qquad (5)$$

Катер зупиниться (його швидкість буде дорівнювати нулю ($v = 0$)), якщо час $t = \infty$.

Шлях, пройдений катером до зупинки, знайдемо, проінтегрувавши вираз (5) по часу:

$$S = \int_0^{\infty} v_0 \, e^{\frac{-rt}{m}} \, dt = -\frac{mv_0}{r} e^{\frac{-rt}{m}}$$

Підставимо межі інтегрування від 0 до ∞, отримаємо шлях:

$$S = \frac{mv_0}{r}.$$

Перевіримо розмірність: $S = \dfrac{кг * м * с}{с * кг} = м$

Підставимо числові значення: $S = \dfrac{500*5}{0,5}$ =5км

Відповідь: S = 5км.

Задача 2.7. Знайти силу, з якою притягаються один до одного: а) Земля і Сонце; б) Земля і Місяць. Порівняти ці сили. Знайти прискорення, яке надає Сонце Землі, якщо вважати, що Земля рухається по коловій орбіті. (Маса Сонця M =1,97*10^{30}кг, маса Землі m =5,96*10^{24}кг, маса Місяця m_1 =7г.35*10^{22}кг. Середня відстань від Сонця до Землі R =1,496*10^{11}м, від Землі до Місяця R_1 =3,84*10^{8}м, середній радіус: Сонця r = 6,96*10^{8}м, Землі r_1 = 6,37*10^{6}м).

Розв’язок:

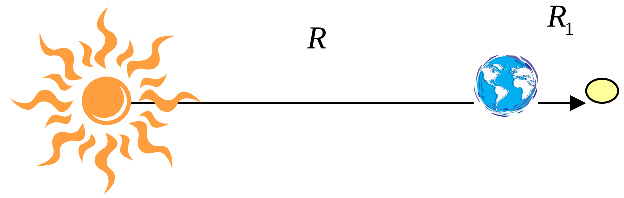
Дано: M =1,97*10^{30}кг,

r =6,96*10^{8}м, r_1 =6,37*10^{6}м,

m =5,96*10^{24}кг, m_1 =7,35*10^{22}кг

R =1,496*10^{11}, R_1 =3,84*10^{8}м.

а) $F_1 - ?$, б) $F_2 - ?$, a -?



Мал. 12.

Космічні тіла - Сонце, планети (Мал. 12) можна розглядати як матеріальні точки, тому що відстань між ними набагато більша, ніж їх розміри (відстань R між Сонцем і Землею набагато більша, ніж їх розміри, а саме:

$$\frac{R}{r} = \frac{1,496*10^{11}}{6,96*10^{8}} = 215.$$

Згідно з законом Всесвітнього тяжіння, на тіло масою m з боку Сонця діє сила $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, де m і M - маси тіл, r - відстань між ними, G =6,672*10^{-11}м^3/(кг*с^2) - гравітаційна стала (початок відліку помістимо в центрі Сонця).

Знайдемо силу притягання Землі до Сонця:

$$F_1 = G\frac{mM}{R^2} = 6,67*10^{-11}\frac{1,97*10^{33}*5,96*10^{24}}{(1,496*10^{11})^2} = 35,27*10^{24}\ H$$

Знайдемо силу притягання Місяця до Землі:

$$F_2 = G\frac{m_1 m}{R_1^{\ 2}} = 6,67*10^{-11}\frac{7,35*10^{22}*5,96*10^{24}}{(3,84*10^{8})^2} = 19,8*10^{19}\ H$$

Порівняємо

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{35,27*10^{24}}{19,8*10^{19}} = 1,78*10^{5}.$$

Щоб знайти прискорення, надане Сонцем Землі, запишемо II закон Ньютона: $ma = G\dfrac{mM}{R^2}$, звідки отримаємо прискорення Землі: $a = G\dfrac{M}{R^2}$.

Підставимо числові значення: $a = 6{,}67*10^{-11}\dfrac{1{,}97*10^{30}}{(1{,}496*10^{11})^2} = 5{,}87*10^{-3}\,м/с^2$.

Якщо вважати, що Земля рухається по колу з доцентровим прискоренням: $a = \dfrac{v^2}{R}$, то можна визначити лінійну швидкість Землі:

$$v = \sqrt{aR} = \sqrt{5{,}87*10^{-3}*1{,}496*10^{11}} = 2{,}96*10^4\ м/с = 29{,}6 км/с.$$

Відповідь: $F_1 = 35{,}27*10^{24}\ H$; $F_2 = 19{,}8*10^{19}\ H$; $\dfrac{F_1}{F_2} = 1{,}78*10^5$;

$$a = 5{,}87*10^{-3}\,м/с^2;\ v = 29{,}6 км/с.$$

Задача 2.8. На горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя μ лежить тіло з масою m. В момент часу $t = 0$ до нього приклали горизонтальну силу, що залежить від часу $\vec{F} = \vec{b}t$, де $\vec{b}$ - сталий вектор. Знайти шлях, пройдений тілом за перші t секунд руху.

Розв'язок:

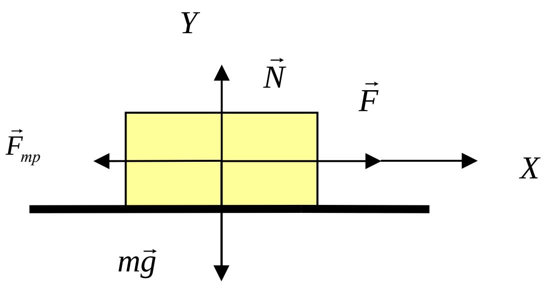
Дано: m,

μ,

$\vec{F} = \vec{b}t$,

$де\ \vec{b}$ - $const$

S - ?



Мал. 13.

Запишемо II закон Ньютона (Мал. 13):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} \qquad (1)$$

В прорекціях на осі:

$$X:\quad ma = F - F_{тр} \qquad (2)$$

$$Y:\quad 0 = mg - N \qquad (3)$$

З рівняння (3) виразимо $N = mg$ і визначимо силу тертя: $F_{тр} = \mu mg$, підставимо її в рівняння (2), врахувавши, що $F = bt$:

$$ma = bt - \mu mg \qquad (4)$$

і визначимо прискорення:

$$a = \frac{b}{m}t - \mu g \qquad (5)$$

Знайдемо швидкість, проінтегрувавши вираз (5) по часу:

$$v = \int\left(\frac{b}{m}t - \mu g\right)dt = \frac{bt^2}{2m} - \mu gt \qquad (6)$$

Тіло починає рухатися в момент часу t_0, коли сила тертя ковзання дорівнює прикладеній силі, тобто виконується умова: $F_{тр} = bt_0$, звідки $t_0 = \dfrac{F_{тр}}{b} = \dfrac{\mu g}{b}$

Знайдемо шлях, пройдений тілом за час від t_0 до t:

$$S = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{bt^2}{2m} - \mu gt\right) = \left(\frac{bt^3}{6m} - \frac{\mu gt^2}{2}\right)\Bigg|_{t_0}^{t} = \frac{b}{6m}(t - t_0)^3,$$

де $t_0 = \dfrac{\mu g}{b}$ - момент часу, з якого почався рух. Якщо $t \prec t_0$, то тіло не рухається, і тому шлях $S = 0$.

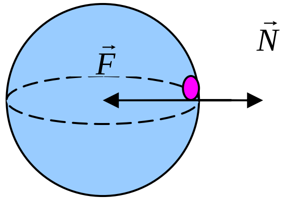
Відповідь: $S == \dfrac{b}{6m}(t - t_0)^3$, де $t_0 = \dfrac{\mu g}{b}$.

Задача 2.9. Якої тривалості мала би бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі стали невагомими?

Розв'язок:

Дано: R =6.4*10^6*м;*

t =?



Мал. 14.

На тіло, що знаходиться на поверхні Землі (Мал. 14), діють: сила всесвітнього тяжіння $F = \dfrac{GmM}{R^2}$ та сила реакції опори $\vec{N}$. Але Земля обертається і тіло рухається по колу з доцентровим прискоренням: $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Запишемо II закон Ньютона в проекції на напрямок до центру Землі:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} - N \qquad (1)$$

За умовою задачі, тіло маси m невагоме, отже сила реакції опори дорівнює нулю (N = 0).

З формули (1) отримаємо швидкість тіла:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,. \qquad (2)$$

За один оберт тіло на екваторі проходить шлях $S = 2\pi R$.

Знайдемо час одного оберту Землі, це і буде тривалість земної доби:

$$t = \frac{S}{v} = \frac{2\pi R\sqrt{R}}{\sqrt{GM}} \qquad (3)$$

Підставимо числові значення:

$$t = \frac{2*3{,}14*\sqrt{6{,}4*10^6}}{\sqrt{6{,}67*10^{-11}*6*10^{24}}} *6{,}4*10^6 = 1{,}41 \text{ години.}$$

Відповідь: t =1.41години.

Задача 2.10. Літак виконує 'мертву петлю' - описує коло радіуса R = 500м в вертикальній площині зі швидкістю $v = 360$км/годину. Знайти вагу льотчика масою $m = 70$кг в нижній і верхній точках траєкторії.

Розв'язок:

Дано: v *= 360км/год*

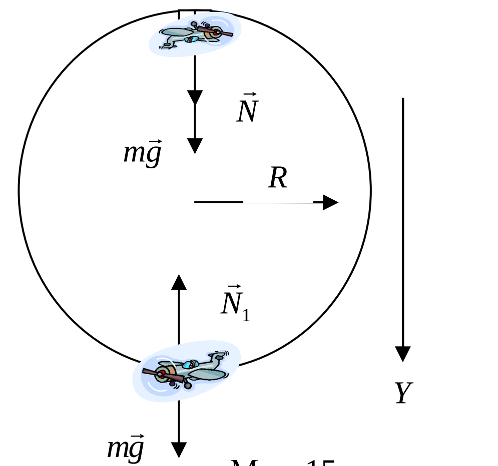
=100м/с

R *=500м*

m *= 70кг*

P_A -?,

P_B -?



Мал. 15.

Запишемо II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad (1)$$

Якщо літак знаходиться в верхній точці траєкторії (Мал. 15), то в проекції на вісь Y рівняння (1) буде мати вигляд:

$$Y:\ ma = mg + N \qquad (2)$$

З рівняння (2) виразимо силу реакції опори:

$$N = m(a - g)\,.$$

Прискорення літака доцентрове і дорівнює $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Вага льотчика в верхній точці за модулем дорівнює силі реакції опори:

$$P_a = m(a-g) \quad = m(\frac{v^2}{R} - g) \qquad (3)$$

Якщо літак знаходиться в нижній точці траєкторії, то рівняння (1) в проекції на вісь Y буде мати такий вигляд:

$$Y: -ma = mg - N_1 \qquad (4)$$

Визначимо силу реакції опори N_1:

$$N_1 = m(a+g) \; = \; m(\frac{v^2}{R} + g) \qquad (5)$$

Вага льотчика в нижній точці траєкторії:

$$P_B = \quad m(\frac{v^2}{R} + g) \qquad (6)$$

Перевіримо розмірність отриманого результату:

$$P_B = m(\frac{v^2}{R} + g) = кг(\frac{м^2}{с^2 * м} + \frac{м}{с^2}) = \frac{кг * м}{с^2} = H$$

Підставимо в формули (3) і (6) числові значення.

$$P_A = 70 * (\frac{10^4}{500} - 10) = \quad 700H = 0{,}7кH\,,$$

$$P_B = 70 * (\frac{10^4}{500} + 10) = 1200H = 1{,}2кH$$

Відповідь: $P_A = 0{,}7кH, P_B = 1{,}2кH$.ї

Задача 2.11. Велосипедист рухається по колу радіусом $R = 200м$ зі швидкістю $v = 40км / годину$. На який кут нахиляється велосипедист до площини дороги?

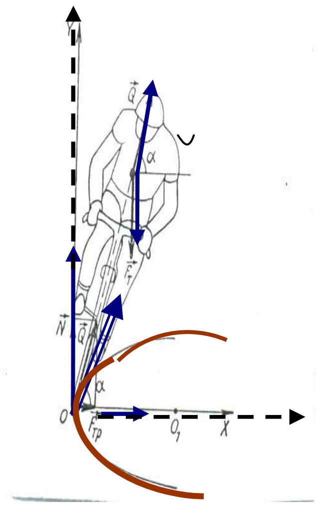
Розв'язок:

Дано: $R = 200м$

$v = 40км / годину = 11{,}1м / с$

$\alpha = ?$

На велосипедиста діють такі сили (мал. 16): $\vec{F}_{тр}$ - сила тертя, $\vec{N}$ - сила реакції дороги, $\vec{F}_T$ - сила тяжіння Рівнодійною сили реакції дороги і сили тертя є сила $\vec{Q}$:



Мал. 16.

$$\vec{Q} = \vec{F}_{тр} + \vec{N}$$

Ця сила проходить через центр ваги системи тіл, що складається з велосипедиста і велосипеда. Крім того, на систему тіл ще діє сила тяжіння $\vec{F}_T$, яка спрямована вертикально вниз. Застосуємо ІІ закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_T \qquad (2)$$

Запишемо рівняння (3) в проекціях на осі X і Y:

$$X: \; ma_X = Q_X + F_{тр,X} \qquad (3)$$

$$Y: \; 0 = Q_y + F_{тр,X} \qquad (4)$$

Враховуючи, що проекція прискорення велосипедиста на вісь X - це доцентрове прискорення, отримаємо:

$$m\frac{v^2}{R} = Q\cos\alpha \qquad (5)$$

$$mg = Q\sin\alpha\,. \qquad (6)$$

Поділимо рівняння (6) на рівняння (5), отримаємо вираз $tg\alpha = \frac{gR}{v^2}$, звідки кут $\alpha = arctg(\frac{gR}{v^2})$. Підставимо числові значення: $\alpha = arctg(\frac{10*200}{11{,}1^2})$ =86^0

Відповідь: $\alpha = 86^0$.

Задача 2.12. Естакада шляхопроводу має радіус кривизни 1000м. З якою силою тисне на естакаду в її найвищій точці автомобіль, маса якого 500кг і швидкість 120км/год?

Розв'язок:

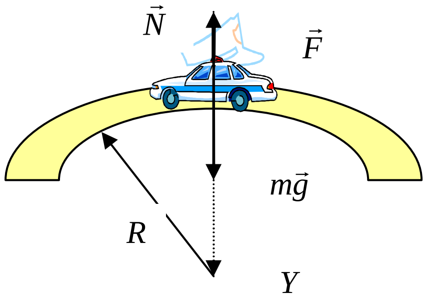
Дано: R =1000 *м* ,

$m = 500кг$

$v = 120км/год$ =33,3 *м* / *с*

F =?

На автомобіль діють: сила тяжіння $m\vec{g}$ і сила реакції опори $\vec{N}$ (мал.17).



Мал. 17

Запишемо II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad (1)$$

В проекції на вісь Y, врахувавши, що прискорення автомобіля доцентрове:

$$\frac{mv^2}{R} = mg - N \qquad (2)$$

З рівняння (2) виразимо силу реакції опори і отримаємо силу, з якою автомобіль тисне на естакаду: $F = m(g - \frac{v^2}{R})$

Підставимо числові значення: F = 500(10-(33.3^2/1000))=4450 H =4,45 $кH$

Відповідь: F =4,45 $кH$.

Задача 2.13. Призму, на якій знаходиться брусок, штовхнули вліво, надавши прискорення a_0. При якому максимальному значенні цього прискорення брусок буде залишатися нерухомим відносно призми, якщо коефіцієнт тертя між бруском і призмою $\mu \langle ctg\alpha$.

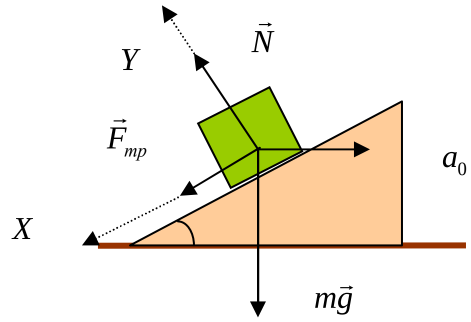
Розв'язок:

Дано: a_0

$\mu \langle ctg\alpha$

a_{max} - ?

Запишемо рівняння II закону Ньютона, врахувавши, що брусок знаходиться в неінерціальній системі відліку:



Мал. 18

$$m\vec{a} = -m\vec{a}_0 + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} \qquad 1)$$

Запишемо рівняння (1) в проекціях на осі (Мал. 18):

$$X : ma = mg\sin\alpha - ma_0\cos\alpha + F_{тр} \qquad (2)$$

$$Y : 0 = -mg\cos\alpha + N - ma_0\sin\alpha \qquad (3)$$

З формули (3) знайдемо силу тертя: $F_{тр} = \mu m(g\cos\alpha - a_0\sin\alpha)$ (4)

Врахувавши, що за умовою задачі брусок нерухомий ($a = 0$) та підставивши силу тертя в рівняння (3), визначимо прискорення призми:

$$a_{max} = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{g(1 + \mu ctg\alpha)}{ctg\alpha - \mu}$$

Відповідь: $a_0 = \dfrac{g(1+\mu ctg\alpha)}{ctg\alpha - \mu}$.

Задача 2.14. Поїзд масою 2000т рухається по північній широті 60^0 Визначити модуль і напрямок сили бічного тиску поїзда на рейки, якщо поїзд їде: а) вздовж меридіану зі швидкістю 54км/год; б) вздовж паралелі. Розв'язок:

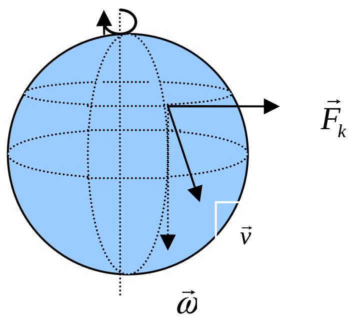
Дано: $m = 2*10^6 кг$

$v = 54км/год = 15м/с$

$\varphi = 60^0$

а) F_k -? ,

б) F_k' -?



Мал. 19

Визначимо кутову швидкість обертання Землі довкола своєї осі:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2*3{,}14}{24*3600} = 0{,}072*10^{-3} рад/с \qquad (1)$$

Система відліку 'Земля' є неінерціальною і на всі тіла, в тому числі і на поїзд, які рухаються в такій системі, діє сила Коріоліса (мал. 19):

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}\,\vec{\omega}] = 2mv\omega\sin\varphi \qquad (2)$$

(Кут φ - це кут між вектором кутової швидкості Землі і вектором швидкості поїзда). Підставимо числові значення: F_k = 2*2*10^6*15*0,072*10^{-3}* 0,85 =3,74$кН$

Сила тиску поїзда на рейки (сила Коріоліса) буде спрямована на праву по ходу поїзда рейку. Якщо поїзд їде по паралелі, то: $\varphi = 0^0$ і сила Коріоліса дорівнює:

$$F_k' = 2mv\omega = 4{,}4кН$$

Відповідь: F_k =3,74$кН$, на праву по ходу поїзда рейку, F_k' =4,4$кН$.в

Задачі для самостійної роботи

2.15. Аеростат масою 1600кг (разом з баластом) рівномірно опускається. Підйомна сила аеростата 1200Н. Якої маси баласт треба скинути з аеростата, щоб він почав рівномірно підніматися з такою ж швидкістю? (800кг)

2/16. Поїзд масою 500т, рухаючись рівносповільнено, за час $t = 1хв$ зменшив швидкість від $v_1 = 40км/годину$ до $м_2 = 28км/годину$. Знайти силу гальмування. (27,7кН)

2.17. Тіло масою $m = 0{,}5кг$ рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху S від часу t задається рівнянням: $S = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C = 5м/с$, $D = 1м/с$. Знайти силу, що діє на тіло в кінці першої секунди. (2Н)

2.18. На автомобіль масою 1т під час руху діє сила тертя $F_{тр}$, що орівнює 0,1 діючій на нього силі тяжіння. Яка повинна бути сила тяги, щоб автомобіль рухався: а) рівномірно, б) з прискоренням $a = 2м/с$.(1кН; 3кН)

2.18. Тіло ковзає по похилій площині з кутом нахилу до горизонту становить $\alpha = 45^0$. Пройшовши шлях $S = 36{,}4см$, тіло отримало швидкість $v = 2м/с$. Знайти коефіцієнт тертя. (0,2)

2.20. Дві гирі масами $m = 1кг$ і $M = 2кг$ з'єднані ниткою і перекинуті через невагомий блок. Знайти прискорення, з яким рухаються гирі та силу натягу нитки (тертям в блоку знехтувати). (3,27м/с^2; 13Н)

2.21. Санчата штовхнули вгору по льодяній гірці, яка утворює кут $\alpha = 30^0$ горизонтом. Санчата в'їхали на деяку висоту і з'їхали назад. Час спуску в $n = 1{,}2$ рази менший, ніж час піднімання. Чому дорівнює коефіцієнт тертя? (0.18)

2.22. Тіло зісковзує з похилої площини без початкової швидкості. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30^0$, довжина похилої площини $l = 2м$, коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}3$. Знайти прискорення та час руху тіла. (2,4м/с^2; 1,3с)

2.23. На нерухоме тіло масою m в момент часу t почала діяти сила $\vec{F} = \vec{b}t(\tau - t)$, де $\vec{b}$ - сталий вектор, а τ - час, протягом якого діє сила.Знайти а) імпульс тіла після закінчення дії сили; б) шлях, пройдений тілом за час дії сили. $(\frac{b\tau^3}{6}, \frac{b\tau^4}{12m})$

2.24. Знайти силу тяги, яку розвиває двигун автомобіля, який їде вгору з прискоренням 1м/с^2. Вага автомобіля 10т, коефіцієнт тертя дорівнює 0,1, нахил гори становить 1м на кожні 25м шляху.(2,4кН)

2.25. Відро з водою масою 5кг, прив'язане до шнурка довжиною 60см, рівномірно обертають в вертикальній площині. Знайти найменшу швидкість обертання відра, при якій вода не виливається в найвищій точці.(2,5м/с)

2.26. Байкер їде по горизонтальній дорозі зі швидкістю 150км/год, роблячи поворот радіусом 100м. На який кут він нахиляється. (30^0)

2.27. Призму, на якій знаходиться брусок масою 2кг, штовхнули вліво, надавши прискорення 0,5м/с. Коефіцієнт тертя між бруском і призмою 0,1, кут нахилу поверхні до горизонту становить 30^0. Знайти прискорення бруска. (7,2м/с^2)

2.28. Поїзд масою 2000т рухається по північній широті 60^0. Визначити модуль та напрямок сили бічного тиску поїзда на рейки, якщо поїзд їде вздовж меридіану зі швидкістю 100км/год. Якою буде величина цієї сили, якщо поїзд буде їхати вздовж паралелі? (6,8кН)

3. Динаміка твердого тіла

Методичні вказівки

В цьому розділі розглядаються такі рухи твердого тіла: ***поступальний рух, обертальний рух відносно нерухомої точки***, ***обертальний рух навколо нерухомої осі*** а також ***плоский рух***. ***Плоским*** називається такий рух, при якому всі точки тіла переміщуються в паралельних площинах (наприклад, кочення колеса по дорозі). Плоский рух можна представити як суму двох рухів: поступального руху центра мас (C) тіла зі швидкістю $\vec{v}_C$ і обертального руху відносно осі, що проходить через центр мас з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

При розв'язуванні задач рекомендується притримуватись таких вказівок:

- прочитавши і зрозумівши умову задачі, намалювати схематичний малюнок, на якому зобразити діючі сили і можливий напрямок руху тіла;
- якщо розглядається рух з'єднаних між собою декількох тіл, то потрібно зобразити всі сили, які діють на кожне тіло;
- записати II закон Ньютона для кожного тіла зокрема в векторному вигляді і перевірити, чи всі зображені сили присутні в цих рівняннях;
- якщо тверде тіло здійснює плоский рух, то записати рівняння II закону Ньютона для центру мас тіла та для його обертального руху відносно нерухомої осі, що проходить через його центр мас;
- вибрати систему відліку так, щоб побудова проекцій сил була найпростішою (іноді для зручності можна вибирати систему відліку для кожного тіла зокрема);
- записати рівняння II закону Ньютона для кожного тіла в проекціях на осі вибраних систем відліку;
- якщо невідомих величин більше, ніж рівнянь в системі, то додати рівняння кінематичного зв'язку між лінійними та кутовими величинами;
- розв'язати отриману систему алгебраїчних рівнянь; перевірити розмірність отриманих величин; підставити,числові значення в системі одиниць СІ.

Основні формули

Абсолютно твердим тілом називається таке тіло. яке не можна деформувати. Його можна уявити як сукупність матеріальних точок, відстань між якими незмінна.

Момент інерції I -це міра інертності твердого тіла, скалярна фізична величина, яка дорівнює сумі добутків елементарних мас на квадрати їх відстані від деякої осі:

$I = \sum_i m_i r_i^2$ - для дискретно розподілених елементарних мас,

$I = \int r^2 dm$ - для неперервно розподілених елементарних мас.

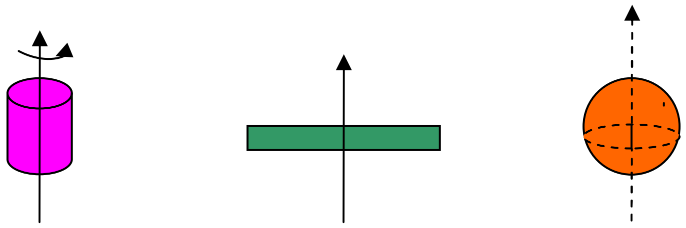
Тут m_i (dm) – елементарна маса, r_i (r) - відстань від елементарної маси до осі обертання.

. ***Теорема Гюйгенса - Штайнера***: ’Момент інерції I відносно довільної осі дорівнює сумі моментів інерції I_C відносно осі, паралельній даній і яка проходить через центр мас тіла та добутку маси тіла на квадрат відстані між осями:

$$I = I_C + ma^2 .$$

Розмірність моменту інерції: $[I] = кгм^2$

Моменти інерції деяких однорідних тіл правильної геометричної форми (Мал.20):

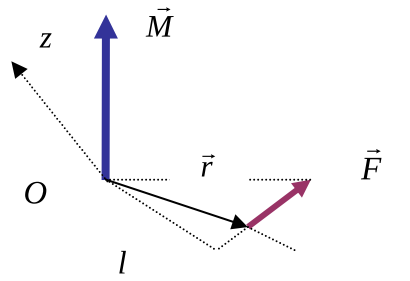


$I = \frac{1}{2} mR^2$ $\quad$ $I = \frac{1}{12} ml^2$ $\quad$ $I = \frac{2}{5} mR^2$

R -радіус циліндра і кулі, l -довжина тонкого стержня.

Мал. 20

Моментом сили $\vec{F}$ ***відносно точки*** O, з якої проводиться радіус-вектор $\vec{r}$ до точки прикладання сили, називається псевдовектор (Мал. 21): $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$



Мал. 21

Модуль моменту сили дорівнює:

$$M = rF \sin\alpha = Fl ,$$

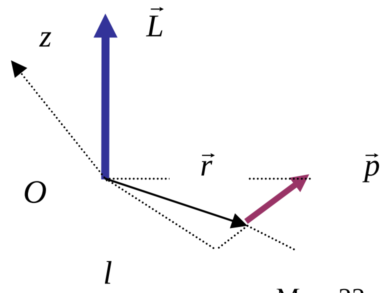
де $l = r\sin\alpha$ - плече сили, напрям вектора $\vec{M}$ знаходимо за правилом свердлика.

Розмірність моменту сили: $[M] = Нм$.

Моментом сили відносно осі Z, що проходить через точку O, називається проекція вектора моменту сили на цю вісь:

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z$$

Моментом імпульсу твердого тіла відносно точки O є псевдовектор $\vec{L}$ (Мал. 22):



Мал. 22

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i]$$

В загальному випадку напрям вектора $\vec{L}$ не співпадає з напрямом осі обертання Z і повертається разом з тілом довкола цієї осі. Для однорідного тіла, симетричного відносно осі обертання, напрямок моменту імпульсу відносно точки O співпадає з напрямком вектора кутової швидкості : $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла C, то значення моменту імпульсу $\vec{L}$ не залежить від положення точки O на осі обертання. Розмірність моменту імпульсу: $[L] = \frac{кгм^2}{c}$

Центром мас називається така точка C, радіус – вектор $\vec{r}_C$, якої визначається за формулою: $r_C = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$,

де m - маса твердого тіла. m_i - елементарна маса, $\vec{r}_i$ - радіус - вектор елементарної маси відносно початку відліку. В однорідному полі сили тяжіння центр мас співпадає з центром тяжіння.

Рівняння руху центра мас: $m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_{зовн}$

Основний закон динаміки обертального руху: $I\vec{\beta} = \vec{M}$,

де $\vec{\beta}$ -кутове прискорення, $\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ - сума моментів всіх зовнішніх сил.іло.

Рівняння моментів: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$.

Умови рівноваги твердого тіла: $\sum_i \vec{F}_i = 0$, $\sum_i \vec{M}_i = 0$

Приклади розв'язування задач

Задача 3.1. Знайти момент інерції тонкого однорідного дротяного кільця радіусом R =0,5 $м$ і масою m =1 $кг$ відносно осі: 1) яка співпадає з його діаметром, 2) яка паралельна до діаметра і проходить через край кільця.

Розв'язок:

Дано: R =0,5 $м$

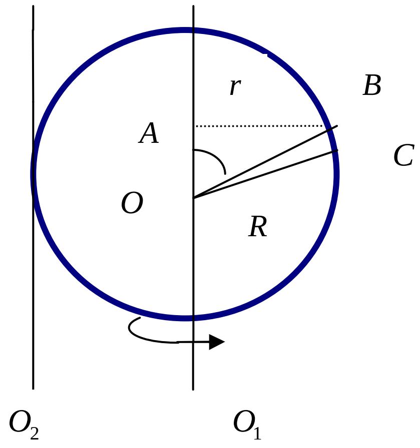
m =1 $кг$

I -?, I_1-?

Знайдемо момент інерції кільця відносно осі O_1 (Мал. 23), скориставшись формулою:

$$I = \int r^2 dm . \qquad (1) \qquad (1)$$

Кут $AOB = \alpha$, мала зміна кута: $BOC = d\alpha$. За умовою задачі, кільце тонке і однорідне, його лінійна густина



Мал. 23

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R} \qquad (1)$$

а маса малої частини кільця - елементарна маса:

$$dm = \lambda dl \text{, де } dl = Rd\alpha \qquad (2)$$

Відстань елементарної маси до осі обертання:

$$r = R\sin\alpha . \qquad (3)$$

Підставимо вирази (2) і (3) в формулу (1) і отримаємо момент інерції кільця відносно осі O_1:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{mR^2}{2\pi}\sin^2\alpha d\alpha = \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)d\alpha = \frac{mR^2}{2} \qquad (4)$$

Знайдемо момент інерції кільця відносно осі O_2, використавши теорему Гюйгенса - Штайнера:

$$I_1 = I + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \qquad (5)$$

Підставимо в формули (4, 5) числові значення:

$$I = \frac{1*0,25}{2} = 0,125\,кгм^2, \quad I_1 = 0,187\,кгм^2$$

Відповідь: $I = \dfrac{1*0,25}{2} = 0,125\,кгм^2$, $I_1 = 0,187\,кгм^2$

Задача 3.2. Дві кулі з однаковими радіусами $R = 0,05\,м$ і масами $m = 1кг$ закріплені на кінцях стержня довжиною $L = 0,5м$ і вагою $M = 2кг$. Знайти момент інерції системи відносно осі, що проходить через середину стержня перпендикулярно до нього. Оцінити відносну похибку, яка допускається, якщо кулі вважати матеріальними точками.

Розв'язок:

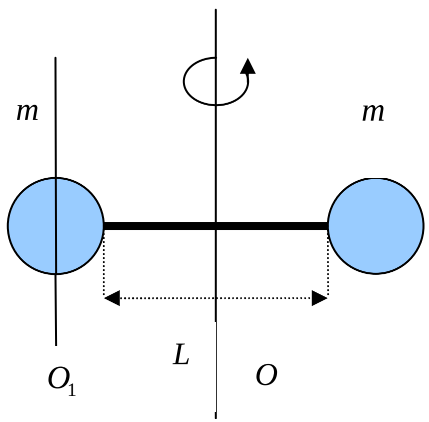
Дано: $R = 0,05\,м$.

$m = 1кг$

$L = 0,5м$

I -?,

δ -?



Мал. 24

Момент інерції системи тіл (Мал. 24) дорівнює сумі моментів інерції кожного тіла зокрема.

Момент інерції стержня I_1 масою M і довжиною L відносно осі O дорівнює: $I_1 = \dfrac{ML^2}{12}$.

Момент інерції кулі відносно осі O_1: $I_2 = \dfrac{2mR^2}{5}$.

Визначимо момент інерції кулі відносно осі O, скориставшись теоремою Гюйгенса – Штайнера:

$$I_3 = I_2 + m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 = \frac{2mR^2}{5} + m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 \qquad (1)$$

Момент інерції всієї системи буде дорівнювати:

$$I = I_1 + 2I_3 = \frac{ML^2}{12} + \frac{4mR^2}{5} + 2m\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 \qquad (2)$$

Якщо вважати стержень невагомим, а кулі – точковими масами, то момент інерції системи тіл буде таким: $I_0 = 2m\left(R^2 + \left(\frac{L}{2} + R\right)^2\right)$ (3)

Підставивши числові значення в формули (2) і (5), отримаємо:

$$I = 0,224кгм^2, \; I_0 = 0,185кгм^2.$$

Відносна похибка: $\delta = \dfrac{I - I_0}{I} = \dfrac{0,224 - 0,185}{0.224} = 0,174$

Відповідь: $I = 0,224кгм^2$, $I_0 = 0,185кгм^2$, $\delta = 0,174$.

Задача 3.3. В верхній точці похилої площини, з кутом нахилу до горизонту $\alpha = 30^0$, закріплено блок, радіус якого $r = 0,2м$ і маса $M_0 = 1\,кг$, через який перекинута невагома і нерозтяжна нитка. До кінців нитки прив'язані вантажі масами $M = 2кг$ і $m = 0,5кг$. Знайти за який час вантаж M пройде шлях 60см від початку руху? Тертя нитки та блоку відсутнє. Коефіцієнт тертя вантажу M по похилій площині $\mu = 0,25$.

Розв'язок:

Дано: $M =$ 1кг,

m = 0,5кг,

$\alpha = 30^0$,

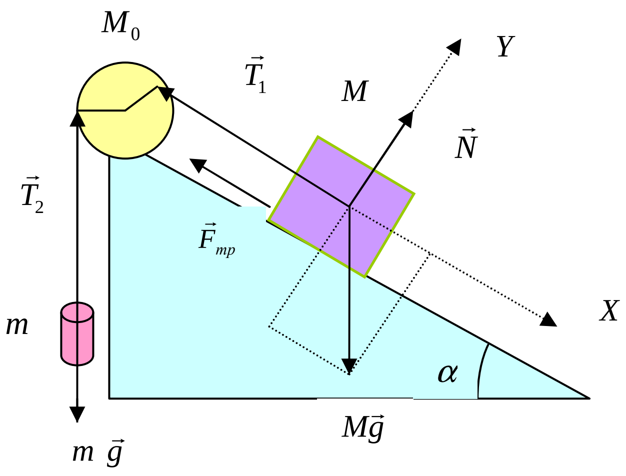
μ = 0,25,

$r = 0{,}2 м$

$M_0 = 2 кг$,

$S = 60 см$

t -?



Мал. 25

На малюнку (Мал.25) зображаємо сили, які діють на кожне з тіл (Сили прикладаються до центрів мас тіл). Виходячи з умови задачі, вводимо обмеження:
а) нитка невагома і нерозтяжна, тому прискорення обох тіл по модулю однакові;
б) тертя між ниткою і блоком відсутнє, також нехтуємо тертям в осі блока, в) блок закріплений на вершині похилої площини, вага блока урівноважується силою опору його осі, тому на малюнку вони відсутні.

Так як m менше M, то розумно очікувати, що система тіл буде рухатися по годинниковій стрілці. В цьому випадку напрям сил, що діють на тіла, показано на малюнку, де $\vec{F}_{тр}$ - це сила тертя ковзання, $\vec{N}$ - сила реакції опори, $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ - сили натягу нитки, $M\vec{g}$ і $m\vec{g}$ - сили земного тяжіння.

Запишемо II закон Ньютона для кожного з тіл і для блока:

$$M\vec{a} = M\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N} \qquad (1)$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad (2)$$

$$I\vec{\beta} = \vec{M} \qquad (3)$$

В рівнянні (3) $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{T}_1\right] + \left[\vec{r}\vec{T}_2\right]$, - векторна сума моментів сил натягу ниток, $\vec{\beta}$ - кутове прискорення блока. $I = \dfrac{M_0 r^2}{2}$ - момент інерції блока

Виберемо систему відліку: для більшого тіла вісь X спрямуємо паралельно до поверхні похилої площини, а вісь Y – перпендикулярно до неї. Менше тіло може рухатися тільки по вертикалі, тому для нього вісь Y паралельна напрямку руху, вісь Z перпендикулярна до площини малюнка і проходить через вісь блока.

Запишемо рівняння (1) в проекціях на осі X і Y:

$$X: \ Ma = Mg\sin\alpha - F_{тр} - T \qquad (1а)$$

$$Y: \ 0 = -Mg\cos\alpha + N \qquad (1б)$$

а рівняння (2) - в проекійї на вісь Y:

$$Y: \ ma = -mg\cos\alpha + T \qquad (2а)$$

Рівняння (3) запишемо в проекції на вісь Z:

$$Z: \ \frac{M_0 r^2}{2}\beta = -rT_1 + rT_2 \qquad (3а)$$

За умовою задачі, немає проковзування нитки по поверхні блоку, тому можна скористатися кінематичним зв'язком між кутовим і лінійним прискоренням: $a = \beta r$. Виразимо кутову швидкість через лінійну і отримаємо замкнуту систему алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати. З рівняння (2а) визначимо силу реакції опори: $N = Mg\cos\alpha$ та силу тертя $F_{тр} = \mu\ Mg\cos\alpha$, Підставимо їх в рівняння (1а) і отримаємо систему рівнянь:

$$Ma = Mg\sin\alpha - \mu\ Mg\cos\alpha - T_1$$

$$ma = -mg\cos\alpha + T_2$$

$$\frac{M_0 r^2}{2}\frac{a}{r} = rT_1 - rT_2$$

Додавши ці рівняння, визначимо прискорення тіл:

$$a = \frac{g}{(\frac{M_0}{2} + M + m)}(M \sin\alpha - \cos\alpha(\mu M + m)$$

Підставимо числові значення: $a = \frac{10}{2}(1*0,5 - 0,87*0,75) = 0,68 м/с^2$.

Рух тіл рівноприскорений, тому шлях, пройдений від початку руху за час t, буде дорівнювати $S = \frac{at^2}{2}$, час руху тіла: $t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2*0,6}{0,68}}$ =1,33$с$.

Відповідь: $a = 0,68 м/с^2$, t=1,33$с$.

Задача 3.4. На однорідний суцільний циліндр масою $M = 9кг$ радіусом $R = 0,2м$ намотано шнур, до якого прив'язано вантаж масою $m = 2кг$. Знайти прискорення вантажу. Тертям нехтуємо.

Розв'язок:

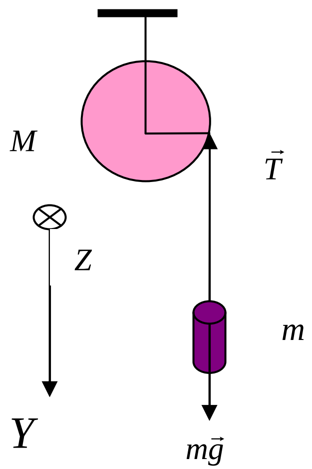
Дано: $M = 9кг$

$R = 0,2м$

$m = 2кг$

a -?

Сила ваги циліндра врівноважується силою натягу тросу, яким закріплений циліндр (Мал. 26), тому на малюнку ці сили не зображені. Нехтуємо силами тертя в осі циліндра, шнур вважаємо невагомим. Запишемо рівняння II закону Ньютона для вантажа і для циліндра:



Мал. 26

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \quad (1)$$

$$I\vec{\beta} = \vec{M} \quad (2)$$

Виберемо систему відліку так: вісь Y спрямована вниз, а вісь Z перпендикулярно до площини малюнка. Запишемо рівняння (1) і (2) в проекціях на осі, врахувавши, що момент інерції циліндра дорівнює $I = \frac{MR^2}{2}$ і виконується рівняння кінематичного зв'язку між кутовим і лінійним прискореннями: $\beta = \frac{a}{R}$ і відсутнє проковзування нитки по блоку:

:

$$Y: \quad ma = mg - T \quad (3)$$

$$Z: \quad \frac{MR^2}{2} \times \frac{a}{R} = TR \quad (4)$$

Розв'язавши систему рівнянь (3-4), отримаємо прискорення вантажу:

$$a = \frac{2mg}{M + 2m} \quad (5)$$

В цій задачі розмірність отриманого результату очевидна.

Підставимо числові значення: $a = (2*2*10)/(9+4) = 3м/с^2$

Відповідь: $a = 3м/с^2$

Задача 3.5. Невагома і нерозтяжна нитка перекинута через блок, що являє собою однорідний диск масою $M = 0,1кг$. До кінців нитки прив'язані вантажі масами $m_1 = 0,2кг$ і $m_2 = 0,3кг$. З яким прискоренням будуть рухатися вантажі при умові, що нитка не ковзає по блоку?

Розв'язок:

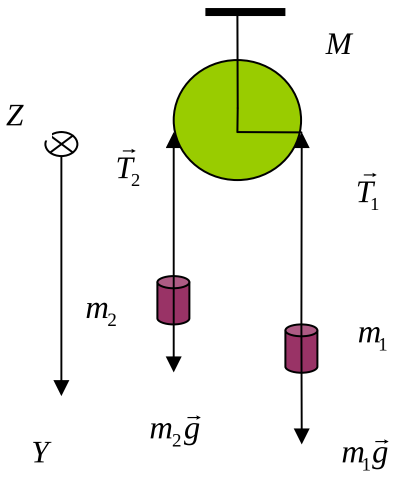
Дано: $M = 0{,}1 кг$

$m_1 = 0{,}2 кг$

$m_2 = 0{,}3 кг$

a -?

На малюнку (Мал. 28) зображені сили, що діють на тіла. Блок закріплений, модулі сил опори блока компенсують одна одну і, крім того, не створюють моменту відносно центра мас блока



Мал. 28

діють на тіла. Блок закріплений, модулі сил опори блока компенсують одна одну і, крім того, не створюють моменту відносно центра мас блока (плечі цих сил дорівнюють нулю, тому вони не зображені на малюнку). Вважаємо, що нитка нерозтяжна ($a_1 = a_2 = a$.) і немає проковзування нитки по блоку, тому $\beta = \dfrac{a}{R}$, де β - кутове прискорення блока, R - радіус блока.

Запишемо рівняння динаміки для кожного з тіл в векторній формі:

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + T_1 \qquad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \qquad (2)$$

$$I\vec{\beta} = \left[\vec{R}\vec{T}_1\right] + \left[\vec{R}\vec{T}_2\right] \qquad (3)$$

Перепишемо рівняння (1)-(2) в проекції на вісь Y , а рівняння (3) – в прекції на вісь Z :

$$Y: m_1a = m_1g - T_1 \qquad (1а)$$

$$Y: - m_2a = m_2g - T_2 \qquad (2а)$$

Ё $$Z: \frac{MR^2}{2} \times \frac{a}{R} = R(T_1 - T_2) \qquad (3а)$$

Віднімемо від рівняння (1а) рівняння (2а), додамо рівняння (3а) і отримаємо прискорення вантажів: $a = g\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \dfrac{M}{2}}$ (4)

Розмірність отриманої відповіді очевидна.

Підставимо числові значення: $a = 10\dfrac{0{,}2 - 0{,}3}{0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}05} = -1{,}82 м/с^2$

Відповідь: $a = -1{,}82 м/с^2$.

Задача 3.6. Однорідний циліндр маси $M = 2кг$ котиться без проковзування по столу. На циліндр намотана нерозтяжна і невагома нитка. До кінця нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвішений вантаж масою $m = 5кг$. Знайти прискорення вантажу. Тертя між ниткою і блоком а також між циліндром і столом відсутнє.

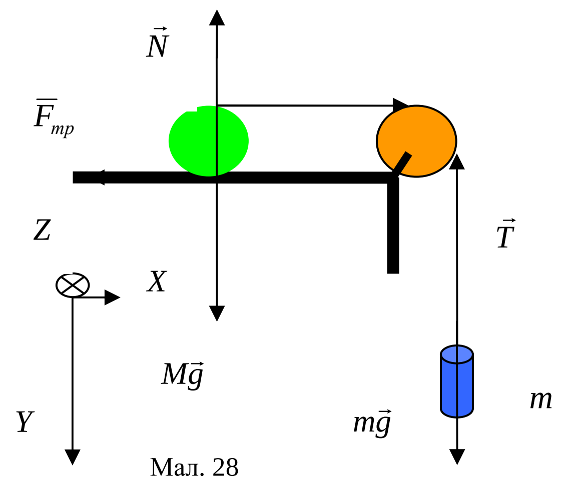
Розв'язок:

Дано: M =2кг

$m = 2кг$

a -?

Сили, що діють на тіла, показані на малюнку (Мал. 28). (Тут показані сила земного тяжіння циліндра та реакція опори, але вони компенсують одна одну і не створюють моменту



Мал. 28

відносно центра мас циліндра). Вважаємо, що нитка невагома і тертя в блоці немає, тому модуль сили натягу T по всій нитці буде одинаковий.

Запишемо рівняння II закону Ньютона для вантажу:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \qquad (1)$$

Циліндр здійснює плоский рух, який описується двома рівняннями:

для прямолінійного руху центра мас циліндра

$$M\vec{a} = \vec{T} \qquad (2)$$

для обертального руху цилінтра відносно осі, що співпадає з віссю циліндра:

$$I\vec{\beta} = \left[\vec{R}\vec{T}\right] \qquad (3)$$

де $\left[\vec{R}\vec{T}\right]$ - момент сили натягу нитки, $I = \frac{MR^2}{2}$ - момент інерції циліндра, β - кутове прискорення циліндра. За умовою задачі відсутнє проковзування циліндра по столу, тому: $\beta = aR$. Виберемо систему відліку і запишемо рівняння (1) – (3) в проекціях на осі:

$$X: Ma = T$$

$$Y: \ ma = mg - T$$

$$: \frac{M}{2} a = T$$

Розв'язуємо цю систему рівнянь і отримаємо прискорення:

$$a = \frac{mg}{\frac{3M}{4} + m}$$

Розмірність отриманого результату очевидна.

Підставимо числові значення: $a = \frac{5*10}{0{,}75*2+5} = 7{,}7\,м/с^2$

Відповідь: $a = \ 7{,}7\,м/с^2$.

Задача 3.7. На правому кінці однорідного стержня довжиною $l = 30см$ закріплена куля радіусом $R = 6см$. Маса стержня $M = 10кг$, а маса кулі в 2 рази більша. Де знаходиться центр ваги системи (точка C)?

Розв'язок:

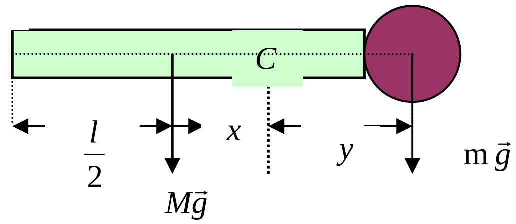
Дано: $l = 30см$

$R = 6см$

$M = 10кг$

$m = 2M$

L -?



Мал. 29

Центр ваги системи стержень-куля - це точка C, відносно якої система тіл буде в рівновазі (Мал. 29). Умовою рівноваги є рівняння:

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \qquad (1)$$

з якого слідує, що векторна сума моментів сил відносно центра мас дорівнює нулю.

Центр мас однорідного тіла правильної геометричної форми знаходиться в його геометричному центрі.

Модуль момента сили $M\vec{g}$ дорівнює Mgx, а модуль момента сили $m\vec{g}$ дорівнює mgy.

Як відомо, момент сили - це псевдовектор, що проходить через точку C перпендикулярно до площини малюнка, напрямок визначається за правилом свердлика. Врахувавши вищесказане, з формули (1) отримаємо:

$$-Mgx + mgy = 0 \qquad (2)$$

З малюнка видно, що:

$$y = \frac{l}{2} + R - x \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (2), отримаємо рівняння

$$(M+m)x = m(\frac{l}{2}+R).$$

Знайдемо x: $x = \frac{M}{M+m}(\frac{l}{2}+R)$ (4)

Підставимо числові значення:: $x = \frac{10}{30}(0{,}15+0{,}06) = 0{,}07\,м$

Відстань від лівого кінця стержня до точки C дорівнює:

$$L = \frac{l}{2}+x = (0.15+0{,}07) = 0{,}22\ м$$

Відповідь: $L = 0{,}22\,м$.

Задача 3.8. Драбина довжиною 5м і масою 12кг прикладена до гладкої стіни під кутом 70^0 до підлоги. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою 0,29. Знайти: а) силу, з якою драбина тисне на стіну;
б) граничне значення кута, при якому драбина почне ковзати.

Розв'язок:

Дано: $l = 5$ м

$m = 12$ кг

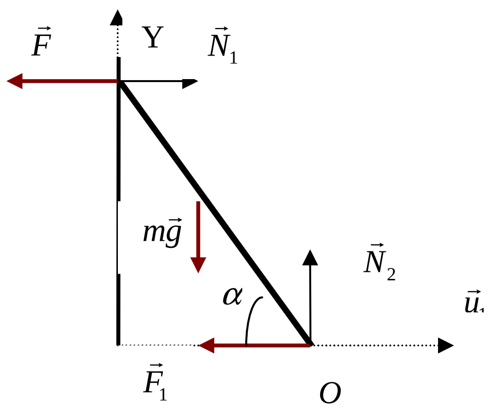
$\alpha = 70^0$

$\mu = 0{,}29$

F -?, α_0 -?

Драбина буде в стані рівноваги, якщо: векторні суми всіх сил і моментів сил дорівнюють нулю (Мал. 30):

$$\vec{F}+\vec{F}_1+\vec{N}_1+\vec{N}_2+m\vec{g} = 0 \quad (1)$$



Мал. 30

$$\left[\vec{l}\vec{F}\right]+\left[\frac{\vec{l}}{2}m\vec{g}\right] = 0 \quad (2)$$

(Сили тертя $\vec{F}_1$ та реакції опори $\vec{N}_2$ не створюють моментів відносно точки O). Драбина почне ковзати (відносно точки O), якщо виконується умова:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - Fl\sin\alpha = 0, \quad (3)$$

де $mg\frac{l}{2}\cos\alpha$ - модуль момента сили тяжіння, $Fl\sin\alpha$.- модуль момента сили F. Знайдемо силу F з рівняння (3):

$$F = \frac{mg}{2}ctg\alpha` \quad (4)$$

Підставимо числові значення:

$$F = \frac{12*10}{2}ctg70^0 = 20{,}4Н$$

Силу тертя між драбиною і підлогою знайдемо з формули (1), записавши її в проекціях на осі:

$$X: F - F_1 = 0 \quad (5)$$

$$Y: -mg + N_2 = 0 \quad (5а)$$

Силу реакції опори визначимо з формули (5а):

$$N_2 = mg$$

і отримаємо силу тертя:

$$F_1 = \mu mg. \quad (6)$$

Драбина почне ковзати, якщо $F = F_1$. Прирівняємо праві сторони рівнянь (4) і (6): $\frac{mg}{2}ctg\alpha_0 = \mu mg`$,

звідки виразимо кут: $\alpha_0 = arcctg\,2\mu$)

Підставимо числові значення: $\alpha = arcctg\ 2*0{,}29 = 60^0$

Відповідь: F =20,4Н; $\alpha_0 = 60^0$.

Задачі для самостійної роботи

3.9. Знайти момент інерції тонкого однорідного дротяного кільця радіусом $R=0{,}2\,м$ і масою $m=0{,}5\,кг$ відносно нерухомої осі, яка паралельна до діаметра кільця.і знаходиться на відстані $0{,}4\,м$ від кільця. (0,09кгм^2)

3.10. Два тонкі диски з однаковими масами $m=20\,кг$ закріплені на кінцях стержня довжиною $L=1{,}6\,м$ і вагою $M=10\,кг$. Знайти момент інерції системи відносно осі, що проходить через середину стержня перпендикулярно до нього. (14,9 кгм^2)

3.11. На каруселі з масою $100\,кг$ і радіусом $2\,м$ встановлено 6 невеликих крісел, маса кожного $3\,кг$ Знайти момент інерції каруселі відносно осі. що проходить через її центр мас, Яким буде момент інерції каруселі, якщо на кожне з крісел сяде дитина масою $15\,кг$? (272 кгм^2, 632 кгм^2)

3.12. Людина масою 70кг тримає в опущених руках гантелі масою 5кг кожна. Чому дорівнює його момент інерції відносно нерухомої осі, що проходить посередині вздовж тіла? Яким буде момент інерції, якщо людина підніме випрямлені руки в сторони на висоту пліч? (Тіло людини можна вважати циліндром з радіусом 30см, довжина рук 0,5м, масою рук можна знехтувати). (3,6кг/м^2, 4,05кг/м^2).

3.13. Однорідний диск радіусом 20см і масою 5кг обертається довкола осі. що проходить через його центр перпендикулярно до його площини. Кутова швидкість диска задається рівнянням: $\omega = A + Bt$, де B =8рад/с. Знайти дотичну силу, прикладену до обода колеса. (4Н)

3.14. До ободу колеса, яке можна вважати однорідним диском, прикладена дотична сила 100Н. Маса колеса 50кг, його радіус 50см. Знайти кутове прискорення колеса. Через який час після початку дії сили колесо буде обертатися з частотою 100об/с? Тертям знехтувати. (8рад/с^2, 1хв18с)

3.15. На барабан радіусом 0,5м намотано шнур, до якого прив'язано внтаж масою 10кг. Знайти момент інерції барабана, якщо відомо, що вантаж опускається з прискоренням 2,04м/с^2 (12,25кг/м^2)

3.16. В верхній точці похилої площини з кутом нахилу до горизонту $\alpha=30^0$, закріплено блок, радіус якого $0{,}1\,м$ і маса $M_0 = 3\,кг$.Через блок перекинута невагома і нерозтяжна нитка. До кінців нитки прив'язані вантажі масами $M = 4\,кг$ і $m=2\,кг$. Знайти прискорення вантажів, Тертя нитки та блоку відсутнє. Коефіцієнт тертя вантажу M по похилій площині $\mu=0{,}5$. (1,92м/с^2).

3.17. Вантаж масою $M=10\,кг$ ковзає по столу. До вантажу прив'язана нерозтяжна і невагома нитка. До кінця нитки, перекинутої через блок, підвішений вантаж масою $m = 20кг$. Маса блока $5\,кг$, його радіус $0{,}2\,м$. Тертя між ниткою і блоком відсутнє. Коефіцієнт тертя між поверхнею стола та вантажем 0,2. Знайти: прискорення вантажу. (5,54м/с^2).

4. Робота. Енергія. Закони збереження

Методичні вказівки

При розв'язуванні задач цього розділу треба враховувати критерії застосування законів збереження імпульсу та енергії.

1. ***Закон збереження імпульсу*** виконується, якщо:

- система тіл *замкнута*, тобто на всі тіла цієї системи не діють зовнішні сили або рівнодійна зовнішніх сил дорівнює нулю;
- система тіл *не замкнута* (на тіла системи діють зовнішні сили), але сума проекцій всіх зовнішніх сил на деяку вісь дорівнює нулю;
- якщо час взаємодії тіл малий (наприклад, час вибуху, вистрілу або удару), в цьому випадку можна знехтувати імпульсом зовнішніх сил і вважати систему замкнутою.

2. ***Закон збереження енергії*** виконується при умові, якщо:

- система замкнута, а внутрішні сили є консервативними;
- система незамкнута, але алгебраїчна сума робіт всіх зовнішніх сил, що діють на тіла системи, дорівнює нулю.

Застосовуючи закони збереження імпульсу та енергії, рекомендуємо дотримуватись такого порядку дій:

- переконатися, чи можуть бути застосовані закони збереження;
- побудувати схематичний малюнок і показати вектори швидкостей тіл до і після взаємодії;
- вибрати прямокутну систему координат так, щоб проекції векторів швидкостей на координатні осі мали якомога простіший вигляд;
- записати рівняння закону збереження імпульсу в векторному вигляд;
- записати рівняння закону збереження імпульсу в проекція на координатні осі;
- якщо невідомих більше, ніж рівнянь, то додати рівняння кінематичного зв'язку;
- вибрати початковий (нульовий) рівень потенціальної енергії;
- записати рівняння закону збереження механічної енергії. Якщо в замкнутій системі тіл діють сили тертя, то виконується закон збереження повної енергії (механічна енергія частково переходить в інші види енергії, зокрема в тепло внаслідок тертя);

- якщо система незамкнута, треба записати рівняння закону збереження повної енергії, враховуючи роботу зовнішніх сил;
- розв'язати отриману систему алгебраїчних рівнянь, проаналізувати отримані результати.

Розв'язуючи задачі, що стосуються *твердого тіла та системи твердих тіл*. треба враховувати, що:

- закони збереження моменту імпульсу та механічної енергії виконуються тільки тоді, коли система тіл замкнута;
- моменти імпульсу тіл системи беруться відносно однієї осі (або відносно паралельних нерухомих осей);
- тверде тіло може здійснювати поступальний, обертальний або плоский рухи і залежно від того записуються відповідні рівняння для законів збереження;
- якщо система твердих тіл не замкнута, то зовнішні сили виконують роботу над тілами, що призводить до зміни повної механічної енергії;
- важливо пам'ятати, що закони збереження імпульсу і моменту імпульсу є двома незалежними законами (можливі випадки, коли вони виконуються обидва або тільки один з них);

Основні формули

Елементарною роботою dA, виконаною силою $\vec{F}$ по елементарному переміщенню $d\vec{S}$ матеріальної точки є скалярна величина: $dA = \vec{F} d\vec{S}$

Робота A ($Дж$) по переміщенню тіла з точки 1 в точку 2: $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{S}$

Середня потужність P – робота, виконана за одиницю часу: $P = \frac{dA}{dt}$ (Вт).

Миттєва потужність: $P_м = \vec{F}\vec{v}$

Кінетична енергія K дорівнює: $K = \frac{mv^2}{2}$, (v-швидкість тіла, m-маса).

Кінетична енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних енергій K_i всіх n тіл системи $K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \sum_{i-1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$.

Потенціальна енергія тіла в полі сили тяжіння: $U = mgh$,

де h - відстань від деякого початкового рівня, який вибирається довільно.

Потенціальна енергія стиснутої (або розтягнутої) пружини: $U = \frac{kx^2}{2}$

Повна механічна енергія: $E = K + U$.

Приріст кінетичної енергії тіла в силовому полі: $K_2 - K_1 = A$,

де A - робота всіх сил, що діють на тіло.

Зміна потенціальної енергії тіла в силовому полі: $U_1 - U_2 = A_{поля}$,

де $A_{поля}$ - робота сил поля.

Зв'язок між силою і потенціальною енергією:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$`, де $\nabla \vec{U} = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k}$.

Закон збереження імпульсу: 'Повний імпульс замкнутої системи матеріальних точок залишається незмінним': $\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{p}_i = const$

Закон збереження моменту імпульсу: 'Момент імпульсу замкнутої системи матеріальних точок залишається сталим'. $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = const$

Закон збереження механічної енергії: 'Повна механічна енергія замкнутої системи тіл, між якими діють тільки консервативні сили, залишається сталою':

$$E = K + U_{вз} = const.$$

(Замкнутою називається така система тіл, на яку не діють зовнішні сили або рівнодійна всіх зовнішніх сил дорівнює нулю).

Кінетична енергія обертального руху твердого тіла: $K = \frac{I\omega^2}{2}$

Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі: $K_{плос} = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_C^2}{2}$

де I - момент інерції тіла відносно нерухомої осі, що проходить через центр мас – точку C, v_C - швидкість центра мас.

Закон збереження моменту імпульсу системи твердих тіл: 'Якщо на систему твердих тіл не діють моменти зовнішніх сил (система тіл замкнута), то її повний момент імпульсу залишається сталим $\vec{L}_{повне} = \sum_{ii=1}^{n} \vec{L}_i = const$.

Робота, виконана при обертальному русі: $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi$,

M - модуль моменту сили, $d\varphi$ - елементарне кутове переміщення.

Приклади розв'язування задач

Задача 4.1. Тіло масою m = 2кг вільно падає з висоти h = 40м. Нехтуючи опором повітря, знайти: середню потужність P, яку розвиває сила тяжіння за весь час руху та миттєву потужність $P_м$ в кінці руху.

Розв'язок:

Дано: m = 2кг

h = 40м.

P -?, $P_м$ -?

Будемо вважати, що на поверхні Землі потенціальна енергія дорівнює нулю: $U_0 = 0$.Робота сили тяжіння: $A = mgh$

При вільному падінні час руху тіла: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Середня потужність сили тяжіння: $P = \frac{mgh}{t} = mg\sqrt{\frac{gh}{2}}$

Миттєва потужність: $P_m = mgv\cos\alpha$.

Вектор швидкості паралельний до сили тяжіння, тому $P_м = mgv$.

Швидкість тіла знайдемо з закону збереження механічної енергії:

$mgh = \frac{mv^2}{2}$, звідки $v == \sqrt{2gh}$. Визначимо миттєву потужність: $P_м = mg\sqrt{2gh}$

Підставимо числові значення:

$$P = 2*10*\sqrt{\frac{10*40}{2}} = 282{,}8\text{Вт},$$

$$P_м = 2*10\sqrt{2*10*400} = 1789\text{Вт} = 1{,}789\text{кВт}.$$

Відповідь: P = 282,9Вт, $P_м$ =1,789кВт.

Задача 4.2. Важкоатлет піднімає штангу над своєю головою за час t =2с на висоту h= 2.1м. М'язи його рук розвивають потужність P =2058 Вт. Яка маса піднятої штанги?

Розв'зок:

Дано: $t = 2c$

$h = 2.1$м

P =2058Вт

$m - ?$

Робота по підніманню штанги на висоту h, якщо потенціальна енергія штанги на підлозі дорівнює нулю, буде дорівнювати:

$$A = mgh \qquad (1)$$

Робота, яку виконують м'язи рук: $A = Pt$ (2)

Прирівнявши праві сторони формул (2) і (3), отримаємо:

$$m = \frac{Pt}{gh} \qquad (3)$$

Підставимо числові значення: $m = \frac{2058*2}{10*2.1} = 196кг$

Відповідь: Маса штанги 196кг.

Задача 4.3. Людина за 0.5с піднімає вантаж масою 25кг на висоту 1.5м. Коефіцієнт корисної дії м'яза η =0.3. Яку роботу виконує і яку потужність розвиває м'язова система людини? Яка енергія витрачається м'язами рук?

Розв"зок:

Дано: $t = 0.5c$, $m = 25кг$

$h = 1.5$м, $\eta = 0.3$

A -?, P -?, E -?

Робота, виконана людиною при підніманні вантажу:

$$A = mgh \qquad (1)$$

Робота м’язової системи: $A_1 = \frac{A}{\eta} = \frac{mgh}{\eta}$ (2)

Середня потужість м’язової системи: $P = \frac{mgh}{\eta t}$ (3)

Підставимо числові значення: $A_1 = 25*10*1{,}5 = 375\,Дж$

, $A = 375/0{,}3 = 1{,}25\,кДж$, $P = 1250/0{,}5 = 2{,}5\,кВт$

Відповідь: Енергія м’язів рук $375\,Дж$, робота м’язової системи $1{,}25\,кДж$, потужність м’язової системи $2{,}5\,кВт$.

Задача 4.4. Вивчають роботу серця масою 300г у стані спокою. Середній систолічний тиск при цьому приблизно однаковий, $p = 13333{,}2$ Па. Об’єм крові, що циркулює, істотно змінюється: в стані спокою він дорівнює $7*10^{-5}$ м^3/с, а при роботі – $7*10^{-4}$м^3/с. Середня швидкість руху крові становить 0,5 м/с. Яка потужність серця в стані спокою і при активній роботі? Знайти відношення потужності серця (при роботі) до його маси і порівняти з таким самим відношенням для автомобіля масою m =350кг і потужність двигуна 40к.с.
(1к.с.=736 Вт, питома густина крові ρ =1050 кг/м^3).

Розв”зок:

Дано: $m = 0.3$ кг, p =13333,2 Па

$V_0 = 7\times10^{-5}$ м^3/с, V_1=$7*10^{-4}$м^3/с

v=0.5 м/с, $m_a = 350$ кг

P =40 к.с.=29440Вт

ρ =1050 кг/м^3

1). P_0 -? 2). P -? 3) $\frac{P_0}{m}$ /-? 4). $\frac{P}{m}$ -?

Робота серця в стані спокою визначається як робота, що виконується м’язами серця при прокачуванні об’єму крові V_0 при сталому тиску p :

$$A_0 = pV \qquad (1)$$

(Можна в деякому наближенні застосовувати закони ідеального газу).

Потужність серця в стані спокою дорівнює:

$$P_0 = \frac{A_0}{t} = \frac{pV}{t} \qquad (2)$$

Підставимо числові значення в формулу (2) (тут t = 1с).

$$P_0 = \frac{13333{,}2*7*10^{-5}}{1} = 0{,}933\,Вт$$

Робота серця при активній роботі:

$$A = pV_1 + \frac{\rho V_1 v^2}{2} = V_1(\frac{2p + \rho v^2}{2}) \qquad (3)$$

Підставимо числові значення:

$$A = 7*10^{-4}\frac{2*13333{,}2 + 1050*0{,}25}{2} = 9{,}425\,Дж$$

Потужність серця при активній роботі за час $t = 1c$:

$$P = \frac{A}{t} = 9{,}425\,Вт \qquad (4)$$

Відношення потужності серця при активній роботі до його маси:

$$\frac{P}{m} = \frac{9{,}425}{0{,}3} = 31{,}42\,Вт/кг\ .$$

Відношення потужності автомобіля до його маси:

$$\frac{P_a}{m_a} = \frac{40*376}{350} = 42{,}98\,Вт/кг$$

Відповідь: Відношення потужності до маси: для серця становить $31{,}42\,Вт/кг$; для автомобіля $42{,}98\,Вт/кг$ - величини однакового порядку.

Задача 4.5. Потенціальна енергія частинки в деякому силовому полі має вигляд: $U = \alpha xy$, де $\alpha = 0{,}2 мДж;$ Знайти силу $\vec{F}$, що діє на частинку в точках $A(3м, 4м)$ і $B(5м, -6м)$.

Дано: $U = \alpha xy$, $\alpha = 0{,}2 мДж;$

$A(3м, 4м)$, $B(5м, -6м)$

$\vec{F}$ -?

Розв'язок:

Сила, що діє на частинку, визначається формулою:

$$\vec{F} = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k} = \alpha(y\vec{i} + x\vec{j})$$

В точках A і В отримаємо такі вирази для сили:

$$\vec{F}_A = 0{,}2 * 10^{-3}(4\vec{i} + 3\vec{j}) \ , \ \vec{F}_B = 0.2 * 10^{-3}(-6\vec{i} + 5\vec{j})$$

Модулі циз сил:

$$F_A = \sqrt{4^2 + 3^2} * 0{,}2 * 10^{-3} = 1 \ м\ H ,$$

$$F_B = 0{,}2 * 10^{-3}\sqrt{6^2 + 5^2} = 1{,}56 \ мH .$$

Відповідь: $F_A = 1 \ м\ H$, $F_B = 1{,}56 \ мH$.

Задача 4.7. Водій автомобіля, маса якого $m = 1$т, починає гальмувати на відстані S =25м від перешкоди на дорозі. Сила тертя в гальмівних колодках автомобіля $F_{тр}$ = 3,84кН. При якій граничній швидкості v автомобіль встигне зупинитися перед перешкодою. (Тертям коліс з дорогою нехтуємо).

Розв"зок:

Дано: $m = 1т = 1000кг$,

S =25м,

$F_{тр}$ =3,84кН=3,84*10^3,

v -?

Робота сили тертя $F_{тр}$ на шляху S , яка дорівнює: А= - $F_{тр}$ S зменшує швидкість, а, значить, і кінетичну енергію автомобіля до нуля:

$$\frac{mv^2}{2} - F_{тр} \ S = 0,$$

З цього виразу отримаємо швидкість: $v = \sqrt{\frac{2F_{тр}S}{m}}$.

Підставимо числові значення:

$$v = \sqrt{\frac{2 * 3{,}83 * 10^3 * 25}{1000}} = 13{,}86 м/с = 50 км/годину.$$

Відповідь: v =13,86 м/с=50км/годину.

Задача 4.8. Невелика шайба A починає ковзати без початкової швидкості з вершини гладкої гори висотою H =50м, яка має горизонтальний трамплін. При якій висоті трампліна шайба пролетить найбільшу відстань S ? Чому дорівнює ця відстань?

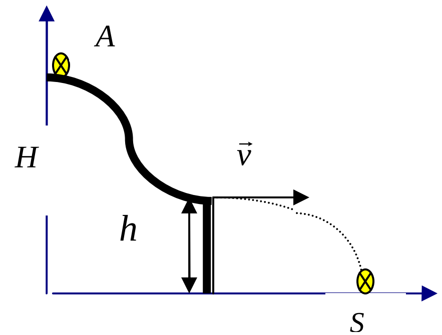
Розв'язок:

Дано: H =50м

S_m - ?

Знайдемо швидкість v шайби в момент відриву від трампліну з закону збереження механічної енергії (Мал. 31)

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - h)$$



Мал. 31

Звідки отримаємо:: $v = \sqrt{2g(H - h)}$ /

Час польоту шайби знайдемо з виразу: $h = \frac{gt^2}{2}$; отже $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Відстань, яку пролетіла шайба, дорівнює: $S = vt = 2\sqrt{h(H-h)}$

Найбільше значення відстані знайдемо, продиференціювавши $S(h)$ по h:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{(H-2h)}{2\sqrt{h(H-h)}}$$

З умови максимуму: $S = S_m$, якщо $\frac{dS}{dt} = 0$, отримаємо, що $h = H/2$ і , отже,

$$S_m = H = 50\text{м}.$$

Відповідь: S_m =50м.

Задача 4.9. Граната, кинута зі швидкістю v = 20 м/с під кутом $\alpha = 60^0$ до горизонту, в найвищій точці своєї траєкторії розірвалась на дві однакові частини. Одна з них через 1с впала на землю точно під місцем вибуху. Знайти швидкість другої її частини зразу після вибуху.

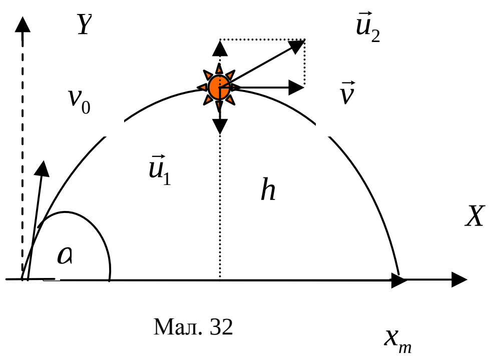
Розв"зок:

Дано: v = 20 м/с

$\alpha = 60^0$,

t = 1с

u =?



Мал. 32

Швидкість гранати перед вибухом v = 20 м/с і спрямована горизонтально (Мал. 32). Висота, на якій стався вибух, визначається формулою:

$$h = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} \qquad (1)$$

Підставимо числові значення: $h = \frac{400*3}{2*10*4}$ = 15 м.

Швидкість першого уламка u_1 можна знайти, знаючи висоту h і час падіння t. Рух цього уламка вниз є рівноприскореним з початковою швидкістю u_1. Шлях, пройдений ним:

$$h = u_1 t + \frac{gt^2}{2} . \qquad (2)$$

Визначимо швидкість першого уламка:

$$u_1 = \frac{2h - gt^2}{2t} \qquad (3)$$

Підставимо в формулу (3) числові значення:

$$u_1 = \frac{2*15 - 10*1}{2*1} = 10\text{м/с}.$$

Швидкість u_2 знайдемо з закону збереження імпульсу системи. Хоч система і незамкнута (на гранату діє сила земного тяжіння), але в момент вибуху на уламки діють дуже великі сили, в порівнянні з якими силою земного тяжіння можна знехтувати і застосувати до системи ’ граната + уламки’ закон збереження імпульсу:

$$2m\vec{v} = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 \qquad (4)$$

де m - маса одного уламка. Спроектуємо рівняння (4) на осі X і Y, скоротивши на m:

$$X: \; 2v_x = u_{2x} \qquad (4а)$$

$$Y: \; 0 = u_{1y} - u_{2y} \qquad (4б)$$

Отримаємо, що u_{2y} =10м/с, а u_{2x} =40м/с. За теоремою Піфагора знайдемо швидкість другого уламка:

$$u_2 = \sqrt{40^2 + 10^2} = 41{,}2\text{м/с}$$

Відповідь: $u_2 = 41{,}2$м/с.

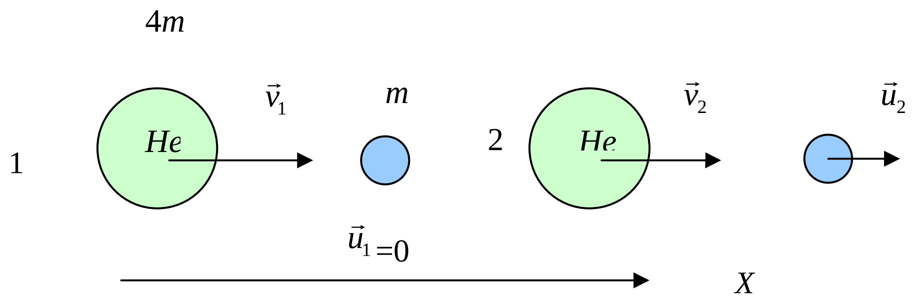
Задача 4.10. У скільки разів зменшиться швидкість атома гелію після центрального пружного зіткнення з нерухомим атомом водню?

Розв”зок:

Дано: m -маса атома водню,

$M = 4m$ -маса атома гелію,

$\frac{v_2}{v_1}$ -?



Мал. 33

Зіткнення називається центральним, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри. На малюнку (Мал. 33) зображено положення атомів до (1) і після (2) зіткнення: $\vec{v}_1$ - швидкість атома гелію до зіткнення, $\vec{v}_2$ - швидкість атома гелію після зіткнення, $\vec{u}_2$ - швидкість атома водню після зіткнення, Тут враховано, що маса гелію в 4 рази більша від маси водню.

Застосуємо закон збереження імпульсу системи тіл:

$$4m\,\vec{v}_1 = 4m\,\vec{v}_2 + m\,\vec{u}_2 \qquad (1)$$

Запишемо рівняння (1) в проекціях на вісь X , скоротивши на масу m :

$$4v_1 = 4v_2 + u_2 \qquad (2)$$

Поділимо рівняння (2) на v_1: $4 = 4\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{v_1}$ (3)

Зіткнення абсолютно пружне, тому виконується закон збереження енергії: кінетична енергія системи тіл до взаємодії така ж, як і після взаємодії: $\frac{4mv_1^2}{2} = \frac{4mv_2^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}$. Скоротимо це рівняння на m і поділимо на v_1^2: $4 = 4\frac{v_2^2}{v_1^2} + \frac{u_2^2}{v_1^2}$. Розв'язавши сумісно ці рівняння, знайдемо відношення $\frac{v_2}{v_1}$. Виконаємо заміну змінних: $\frac{v_2}{v_1} = x$, $\frac{u_2}{v_1} = y$ і отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4 = 4x + y \\ 4 = 4x^2 + y^2 \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему методом підстановки: $y = 4 - 4x$ і отримаємо квадратне рівняння: $5x^2 - 8x + 12 = 0$.Розв'язками цього рівняння є: $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}6$/ Розв'язок $x_1 = 1$ не має фізичного змісту, тому що при зіткненні швидкість атома гелію не змінюється, а це суперечить законам збереження. Вірним є другий розв'язок: $x_2 = 0{,}6$, звідки отримаємо: $v_2 = 0{,}6v_1$

Відповідь: швидкість атома гелію зменшилася в 0,6 разів.

Задача 4.11. Камінь масою 1кг, що летить горизонтально зі швидкістю 10м/с, потрапляє в кулю, підвішену на невагомому стержні, і застряє в ньому. Маса кулі 10кг. Відстань від центра кулі до точки підвісу стержня 1м. На який кут відхилиться стержень.

Розв'язок:

Дано: $m = 1кг$,

$M = 10кг$,

$v = 5м/с$,

$l = 1м.$

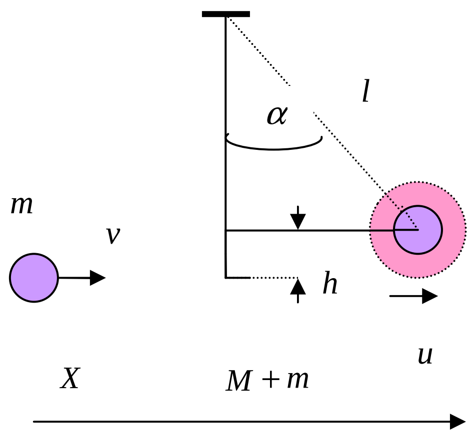
α -?

В даній задачі час удару каменя дуже малий, тому виконуються закони збереження в системі тіл ’камінь – куля’ (мал..34). Запишемо закон збереження імпульсу в проекції на вісь X :

$$mv = (M + m)u \qquad (1)$$

і закон збереження механічної енергії:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)u^2}{2} + (M+m)gh \qquad (2)$$



Мал. 34

де u - швидкість кулі, h - висота підйому кулі відносно її початкового положення, в якому потенціальна енергія кулі дорівнює нулю. З формули (1) виразимо швидкість $u = \dfrac{mv}{M+m}$, підставимо в друге рівняння і отримаємо:

$$h = \frac{mMv^2}{2g(M+m)^2} \qquad (3)$$

З малюнка видно, що:

$$h = l(1 - \cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (4)$$

Прирівнявши ліві частини рівнянь (3) і (4), отримаємо:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2(M+m)}\sqrt{\frac{mM}{gl}}$$

Підставимо числові значення:

$$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{5}{2*11}\sqrt{\frac{1*10}{10*1}}\right) = 2\arcsin 0{,}227 = 26^0$$

Відповідь: $\alpha = 26^0$.

Задача 4.12. Однорідні куля і циліндр з однаковими масою $m = 2кг$ і радіусом r =0,2 $м$, котяться по столу без проковзування з однаковою швидкістю $v = 1м/с$. У якого тіла більша енергія і в скільки разів?

Розв’язок:

Дано: $m = 2кг$, r =0,2,

$v = 1м/с$

$\dfrac{K_1}{K_2}$ -? –

Обидва тіла здійснюють плоский рух: поступальний зі швидкістю v і обертальний з кутовою швидкістю ω. Кутова швидкість $\omega = \frac{v}{r}$ обох тіл однакова згідно з умовою задачі. Кінетична енергія плоского руху:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

складається з кінетичної енергії обертального руху $K_{об} = \frac{I\omega^2}{2}$ і кінетичної енергії поступального руху $K_{пост} = \frac{mv^2}{2}$, яка однакова для обох тіл.

Момент інерції кулі $I_1 = \frac{2mr^2}{5}$, а циліндра - $I_2 = \frac{mr^2}{2}$.

Запишемо відношення кінетичних енергій кулі і циліндра:

$$\frac{K_1}{K_2} = \left(\frac{I_1\ \omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) : \left(\frac{I_2\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\right) = \frac{6}{5}mr^2\omega : \frac{3}{4}mr^2\omega = \frac{4}{5} = 0.8$$

Відповідь: $K_2 = 1{,}25K_1$

Задача 4.13. До ободу диска масою $m = 5кг$ прикладена дотична сила $F = 19{,}6H$. Яку кінетичну енергію K буде мати диск через час $t = 5с$ після початку дії сили?

Розв'язок.

Дано: $m = 5кг$

$F = 19{,}6H$

K -?

Модуль момента сили (Мал. 35) прикладений до диска з радіусом r дорівнює: $N = Fr$ Знайдемо прискорення β диска з другого закону Ньютона: $I\beta = Fr$, де $I = \frac{mr^2}{2}$ - момент інерції диска. Отримаємо:

$$\beta = \frac{Fr}{I} = \frac{2Fr}{mr^2} = \frac{2F}{mr} \qquad (2)$$

Визначимо кутову швидкість диска: $\omega = \beta t = \frac{2F}{mr}t$.

Кінетична енергія обертального руху диска:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mr^2 4F^2t^2}{4m^2r^2} = \frac{(Ft)^2}{m}$$

Підставимо числові значення: $K = \frac{(19{,}6 * 5)^2}{5} = 1{,}92кДж$

Відповідь: $K = 1{,}92кДж$.

Задача 4.14. Знайти кінетичну енергію велосипедиста $K_{плос}$, котрий іде зі швидкістю $v = 9км/годину$. Маса велосипедиста разом з велосипедом $M = 78кг$, маса коліс $m = 3кг$. Колеса велосипеда вважати однорідними дисками.

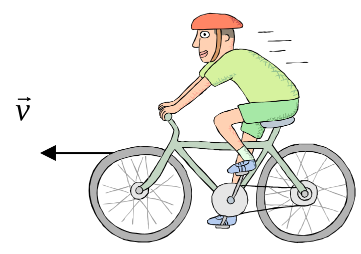
Розв'язок:

Дано: $M = 78кг$

$v = 9км/годину = 2{,}5м/с$,

$2m = 3кг$,

$K_{плос}$ -?



Мал.36

Велосипедист здійснює поступальний рух (Мал.37), його кінетична енергія дорівнює: $K_1 = \dfrac{Mv^2}{2}$.Колеса велосипеда обертаються з кутовою швидкістю: $\omega = \dfrac{v}{r}$, де r - радіус колеса. Будемо вважати колесо однорідним диском, момент інерції якого: $I = \dfrac{mr^2}{2}$, (m - маса одного колеса).

Кінетична енергія обертального руху обох коліс:

$$K_2 = 2\frac{I\omega^2}{2} = \frac{mr^2v^2}{2r^2} = \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Кінетична енергія плоского руху велосипедиста:

$$K_{плос} = K_1 + K_2 = \frac{(M+m)v^2}{2} \qquad (2)$$

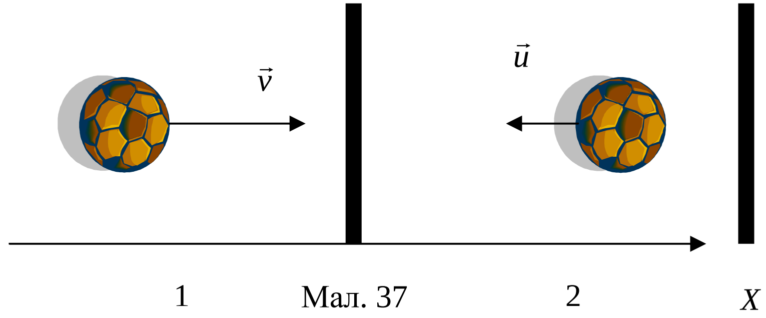
Підставимо числові значення: $K_{плос} = \dfrac{(78+3)*2{,}5^2}{2} = 253\ Дж$.

Відповідь: $K_{плос} = 253\ Дж$.

Задача 4.15. М'яч масою $m = 1кг$ котиться без проковзування зі швидкістю $v = 0{,}1м/с$ і, вдарившись об стінку, відкочується назад. Його швидкість після удару $u = 0{,}08м/с$. Знайти кількість теплоти Q, що виділилася при ударі

Розв'язок.

Дано
$m = 1кг$,
$v = 0{,}1м/с$
$u = 0{,}08м/с$
Q -?



Мал. 37

Удар м'яча об стінку непружний, в такому випадку не виконується закон збереження механічної енергії, тому що частина енергії виділяється у вигляді тепла. Кількість тепла дорівнює зміні кінетичної енергії плоского руху м'яча:

$$Q = K_2 - K_1 = \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}\right) - \left(\frac{mu^2}{2} + \frac{I\omega_2^2}{2}\right) \qquad (1)$$

Тут $I = \dfrac{2mr^2}{5}$ - момент інерції м'яча, r - його радіус. Кутові швидкості м'яча: до зіткнення $\omega_1 = \dfrac{v}{r}$, після зіткнення $\omega_2 = \dfrac{u}{r}$. Підставивши ці величини в формулу (1), отримаємо:

$$Q = \frac{7}{10}m(v^2 - u^2) \qquad (2)$$

Підставимо числові значення: $Q = 0{,}7 \cdot 1 \cdot (0{,}1^2 - 0{,}08^2) = 2{,}51мДж$

Відповідь: $Q = 2{,}51мДж$

Задача 4.16. На одному автомобілі встановлено маховик, який може накопичувати енергію за допомогою електромотора, на такому самому іншому-бензиновий двигун. Маси автомобілів 1000кг, витрата бензину 10л на 100км. (питома теплота згоряння бензину $42*10^6$Дж/кг). Маховик у формі диска радіусом 0,4м і висотою 0,2м виготовлений з плавленого кварцу (або зі сталі) з густиною

2000кг/м^3. Знайти: з якою максимальною швидкістю може обертатися маховик та яку відстань можуть проїхати обидва автомобілі, витративши однакову енергію.

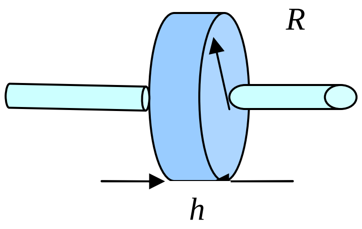
Розв'язок:

Дано: m =1000кг

q =42*10^{6}Дж/кг:

r =0,4м; h =0,2м

ω -? , S -?



Мал. 38

Гранична кутова швидкість обертання маховика (Мал.39) визначається міцністю матеріалу на розрив. Робота сили руйнування не повинна перевищувати кінетичної енергії маховика:

$$\frac{J\omega^2_{\max}}{2} = \frac{VF}{4}, \qquad (1)$$

де F - гранця міцності на розрив (це сила, що припадає на одиницю площі). Для сталі (або плавленого кварцу) границя міцності становить 3*10^{9}Н/м^2. Маса маховика $m = \rho V = 2*10^3 * 3{,}14 * 0{,}4^2 * 0{,}2 = 200кг$. Момент інерції маховика $J = \frac{mr^2}{2}$. Підставимо числові значення:

$$J = \frac{200*0{,}4^2}{2} = 16кгм^2 \qquad (2)$$

Визначимо граничну кутову швидкість маховика:

$$\omega = \sqrt{\frac{VF}{2J}} = \sqrt{\frac{0{,}1*3*10^9}{2*16}} = 3*10^3 рад/с, \qquad (3)$$

Частота обертання маховика $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 487$ с$^{-1}$.Максимальна кінетична енергія маховика буде дорівнювати: $K = \frac{J\omega^2}{2}$ = 8*10^{7}Дж.

Визначимо, який приблизно шлях S міг би проїхати автомобіль зі швидкістю 100км/год (або 28м/с), враховуючи, що сила тертя дорівнює $F_t = 0{,}07mg = 1000*10*0.07 = 700H$. Кінетична енергія автомобіля витрачається на роботу проти сили тертя: $K = F_t S$, звідки $S = K : F_t = \frac{8*10^7}{700} =$ 110км.

Кількість теплоти при спалюванні 40л бензину дорівнює: $Q = mq$ =40*43*10^6=17*10^{8}Дж. Але в механічну енергію можна перетворити тільки 20% теплоти, тому енергія бензинового автомобіля буде 3,4*10^{8}Дж, при цьому автомобіль може проїхати 100км. Якщо ж враховувати вартість бензину, а також шкоду довкіллю, то зрозумілою є доцільність використовувати в автомобілях альтернативні способи накопичення енергії.

Задача 4.17. Горизонтальна платформа масою $M = 100кг$ обертається довкола вертикальної осі, яка проходить через центр платформи, з частотою $\nu = 10об/хв.$ Людина масою $m = 60кг$ стоїть на краю платформи. З якою частотою ν_0 буде обертатися платформа, якщо людина перейде до центра платформи? Яку роботу виконає при цьому людина? Вважати платформу диском, а людину точковою масою.

Дано:

$M = 100кг$,

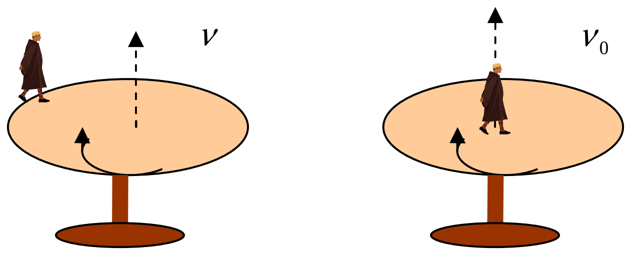
$\nu = 10об/хв.$

=0.17 $об/с$,

$m = 60кг$,

ν_0 -?,

A -?



Мал. 39

Розв'язок:

Система тіл 'платформа + людина' замкнута, тому виконується закон збереження моменту іпульсу:

$$(I_1 + I_2)2\pi\nu = I2\pi\nu_0, \qquad (1)$$

де $I_1 = \frac{Mr^2}{2}$ - момент інерції платформи (платформа мажє форму диска),

$I_2 = mr^2$ - момент інерції людини на краюплатформи,

$I = \frac{(M+m)r^2}{2}$ - момент інерції системи 'платформа +людина'.

Підставимо I_1, I_2 та I в формулу (1) і отримаємо:

$$(\frac{M}{2} + m)r^2\nu = \frac{(M+m)r^2}{2}\nu_0 \qquad (2)$$

З (2) отримаємо шукану частоту обертання платформи:

$$\nu_0 = \frac{M+2m}{M+m}\nu \qquad (3)$$

Підставимо числові значення:

$$\nu_0 = \frac{100+120}{100+60} * 0{,}17 = 0{,}23об/с$$

Роботу A, виконану людиною, знайдемо як приріст кінетичної енергії системи 'платформа + людина'.

Кінетична енергія K_1 системи (людтна стоїть на краю платформи):

$$K_1 = (\frac{Mr^2}{2} + mr^2)(2\pi\nu)^2 \qquad (4)$$

Кінетична енергія K_2 системи (людина стоїть в центрі платформи):

$$K_2 = \frac{(M+m)r^2}{2}(2\pi\nu_0)^2 \qquad (5)$$

Робота, виконана людиною, буде дорівнювати: $A = K_2 - K_1$,

$$A = (2\pi r)^2(\frac{M+m)}{2}\nu^2{}_0 - \frac{M+2m}{2}\nu^2) \qquad (6)$$

Підставимо числові значення в формулу (6):

$$A = (6{,}28^2 * 2^2)*(\frac{100+60}{2} * 0{,}17^2 - \frac{100+2*60}{2} * 0{,}23^2) = 552\ Дж$$

Відповідь: $\nu_0 = 0{,}374об/с$, $A = 84{,}01Дж$.

Задачі для самостійної роботи

4.18. Важкоатлет піднімає штангу над своєю головою за час 2 секунди на висоту 2,1м. М'язи його рук розвивають потужність 2058 Вт. Яка маса штанги? (196кг)

4.19. Людина за 0.5с піднімає вантаж масою 25кг на висоту 1.5м. Коефіцієнт корисної дії м'яза η=0.3. Яку роботу виконує і яку потужність розвиває м'язова система людини? (1,25кДж; 2,5кДж)

4.20. М'яз, розвиваючи максимальну силу 2000Н, скорочується на 2.5см.

При цьому виділяється 85Дж теплоти. Яку роботу виконує м'яз і яким є коефіцієнт корисної дії. (25Дж, 0,29)

4.21. На парну запряжку коней витрачається корм із розрахунку 60МДж на одного коня. Кінна запряжка розвиває силу 850Н при швидкості 10,26км/год. За день коні виконують роботу протягом 5 годин. Яку потужність і який коефіцієнт корисної дії має кінна запряжка при виконанні корисної роботи? (4,36МДж, 0,036)

4.22. Кінетична енергія частинки, що рухається по колу радіуса R, залежить від пройденого шляху S за законом $K = \alpha S$, де α - стала. Знайти модуль сили, що діє на частинку, в залежності від S. ($F = \alpha\sqrt{1+(2S/R)^2}$).

4.23. Потенціальна енергія частинки в деякому силовому полі має вигляд $U = \alpha / r^2 - br$, де a, b - додатні сталі, r - відстань від центру поля. Знайти максимальне значення сили притягання, побудувати приблизні графіки $U(r), F(r)$ (проекції сили на напрям r).

4.24. Скільки літрів бензину витрачає двигун автомобіля на шляху 100км, якщо при потужності двигуна 11кВт швидкість його руху становить 30км/годину? Коефіцієнт корисної дії (к.к.д) двигуна становить 0,22, питома теплота згорання бензину 46МДж/кг, густина бензину 0,8*10^3кг/$м^3$ ($13 кг$).

4.25. Граната, що летить зі швидкістю 10м/с, розривається на два уламки. Більший уламок, маса якого становить 0,6 маси всієї гранати, продовжує рухатися в попередньому напрямку, але з більшою швидкістю 25м/с. Знайти швидкість другого уламка. ($-12,5 м/с$)

4.26. Тіло масою 2кг рухається зі швидкістю 3м/с і доганяє тіло масою 8кг, швидкість якого 1м/с. Вважаючи удар центральним, знайти швидкості тіл після зіткнення :а) удар непружний, б) удар абсолютно пружний. (а) $1,8 м/с$; б) $0,6 м/с; 2,6 м/с$).

4.27. Ковзаняр масою 70кг стоїть на льоду і кидає камінь, маса якого 3кг, в горизонтальному напрямку зі швидкістю 8м/с. На яку відстань відкотиться ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя між ковзанами і льодом 0,02. (0,3м).

4.28. Тіло масою 5кг вдаряється в нерухоме тіло масою 2,5кг, яке після зіткнення починає рухатися з кінетичною енергією 5Дж. Вважаючи удар центральним і пружним, знайти кінетичну енергію першого тіла до і після удару. (5,62Дж, 0,62Дж).

4.29. Камінь, що летить горизонтально, потрапляє в кулю, підвішену на невагомому стержні і застряє в ньому. Маса каменя в 1000 разів менша від маси кулі. Відстань від центра кулі до точки підвісу стержня 1м. Знайти швидкість кулі, якщо відомо, що стержень з кулею відхилилися на кут 10^0. (550м/с).

4.30. Тіло масою 5кг рухається зі швидкістю 4м/с і ударяється в нерухоме тіло такої ж маси. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кількість теплоти, яка виділилася при ударі. (40Дж)

4.31. Диск масою 2кг котиться без проковзування по горизонтальній поверхні зі швидкістю 4м/с. Знайти кінетичну енергію диска.(24Дж).

4.32. Диск радіусом 30см і масою 1кг обертається довкола осі, що проходить через його центр перпендикулярно до площини диска з частотою 20об/с. Яку роботу треба виконати, щоб зупинити диск? (355Дж)

4.33. З якої найменшої висоти повинен з'їхати велосипедист, щоб по інерції проїхати доріжку у виді'мертвої петлі' радіусом 3м і не відірватися від доріжки в верхній1 точці. Маса велосипедиста 75кг, маса одного колеса 3кг, колесо вважати обручем. (7,56м)

4.34. Вентилятор обертається з частотою 900об/хв. Після того, як його виключили, обертаючись рівносповільнено, вентилятор до зупинки виконав 75 обертів. Робота сили гальмування дорівнює 44,4Дж. Знайти: 1) момент інерції вентилятора; 2) момент сили гальмування. (0,01кг*$м^2$; 94мН*м)

4.35. Горизонтальна платформа масою 100кг і радіусом 1м може обертатися довкола вертикальної осі, яка проходить через її центр Людина масою 60кг стоїть на краю платформи. З якою частотою ν_0 буде обертатися платформа, якщо людина буде іти по краю платформи зі швидкістю 4км/год.(відносно платформи)? Вважати платформу диском, а людину точковою масою. (0,21$с^{-1}$)

Спеціальна теорія відносності

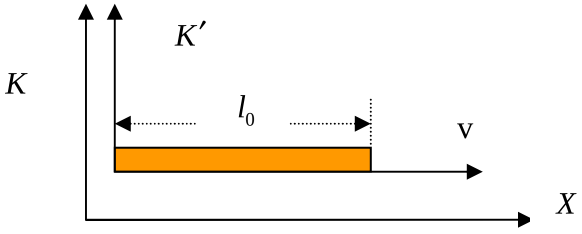
Постулати Ейнштейна:

- всі фізичні явища протікають однаково в усіх інерціальних системах відліку а, отже, і всі фізичні закони та рівняння, що їх описують, є інваріантними;
- швидкість світла в вакуумі не залежить від руху джерела світла і однакова в усіх напрямах.

Лоренцове скорочення довжини:

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,,$$

де $\beta = \frac{v}{c}$, v - швидкість рухомої системи K'' відносно нерухомої K, c - швидкість світла в вакуумі, l_0 - власна довжина стержня.



Мал. 40.

***Сповільнення ходу рухомого годинника*:**

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

***Перетворення Лоренца*:**

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \qquad y' = y\,; \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Інтервал s_{12} ***між подіями 1 і 2*** – інваріантна величина:

$$s_{12}{}^2 = c^2 t_{12}{}^2 - l_{12}{}^2\,,$$

де: t_{12} - проміжок часу між подіями 1 і 2;

l_{12} - відстань між точками, в яких відбувалися події.

Перетворення швидкостей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}\,, \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_x V/c^2}$$

Релятивістська маса: $m_r = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

де m_0 - маса спокою частинки.

***Релятивістський імпульс*:** $\vec{p} = m_r\vec{v} = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$

***Релятивістське рівняння динаміки частинки*:**

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] = \vec{F}$$

***Кінетична енергія* релятивістської частинки**

$$K = m_0 c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$$

Енергія спокою частинки.

$$E_0 = m_0 c^2$$

Повна енергія релятивістської частинки: $E = m_r c^2 = m_0 c^2 + K$

Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0{}^2 c^4$$

***Зв'язок між імпульсом і кінетичною енергією*:**

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}$$

Приклади розв'язування задач

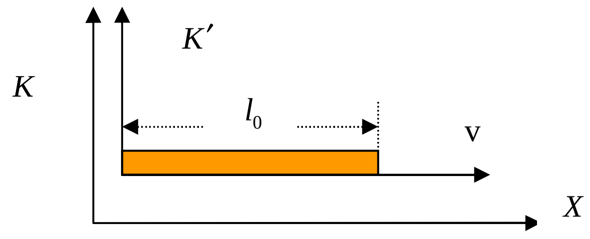
Задача 5.1.. Метрова лінійка пролітає мимо спостерігача зі швидкістю, яка становить 60% від швидкості світла. Якої довжини вона буде здаватися спостерігачу?.

Розв'язок:

Дано: l =1м

$v = 0,6\ c$

l_0-?



Мал .41

Скористаємося формулою Лоренцового скорочення (Мал.41):

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\ ,$$

де $\beta = v/c$

Підставимо числові значення:

$$l = 1*\sqrt{1-(\frac{0,6c}{c})^2} = 0,8\text{м}$$

Відповідь: l =0,8м.

Задача 5.2. В обидва кінці вагона довжиною 20м**,** що рухається вздовж осі X із швидкістю 200км/год, вдаряє блискавка. Людина, що стоїть на пероні,бачить, що блискавка вдарила в обидва кінці одночасно. Яку побачать різницю в часі між двома ударами блискавки пасажири поїзда? Якою би була ця різниця, якщо б поїзд рухався зі швидкістю 0,6 c. Протон в сучасному прискорювачах набуває швидкості, яка становить 0,0003% від швидкості світла. У скільки разів його релятивістська маса більша від його маси спокою? (4*10^2)

Розв'язок:

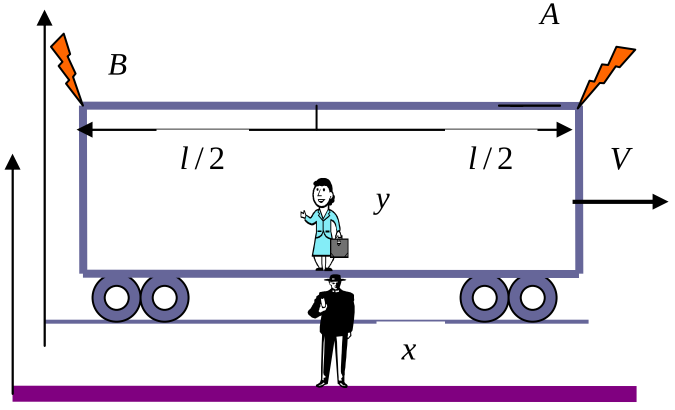
Дано:

$l = 20\text{м}$

v =200км/год

=55,5 м/с

$\Delta t'$ -?



Мал. 42.

Розв'язок:

Людина X, яка стоїть на пероні, бачить, як блискавки одночасно вдаряють в кінці вагона, тобто інтервал між цими подіями дорівнює нулю (Мал. 42).

Людина Y знаходиться в рухомому вагоні і рухається назустріч світлу,тому їй здається, що блискавка спочатку вдаряє в правий край вагона - подія A, відбувається в момент чвасу t'_A, а пізніше – в лівий край - подія B, відбувається в момент часу t'_B . За формулами перетворень Лоренца, позначивши $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, отримаємо:(1)

$$t'_B = \frac{1}{\gamma}(t_B - x_B V/c^2) \qquad (2)$$

Інтервал часу між подіями A і B знайдемо, віднявши від (1) (2):

$$\Delta t' = t'_A - t'_B = -\frac{V(x_A - x_B)}{c^2}\frac{1}{\gamma} = -\frac{Vl}{c^2}\frac{1}{\gamma} \qquad (3)$$

Підставивши числові значення в (3), отримаємо:

$$\Delta t' = -\frac{55,5*20}{9*10^{16}} = -1,24*10^{-14}\ \text{с}.$$

Такий малий проміжок часу не піддається виміру, тому пасажир в вагоні його не міг помітити.

Відповідь: $\Delta t'$ =-1,24*10^{-14} с.

Задача 5.3. Елементара частинка (мюон) рухається зі швидкістю 0,94c. У скільки разів її релятивістська маса буде більшою від маси спокою?

Розв'язок:

Дано: $v = 0,94c$

$\frac{m_r}{m}$ -?

Релятивістська маса частинки визначається формулою:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}},$$

з якої отримаємо: $$\frac{m_r}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Підставимо числові значення: $\frac{m_r}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{0,94c}{c})^2}}$ =2,93

Відповідь: $\frac{m_r}{m}$ =2,93.

Задача 5.4. При якій швидкості частинки її нерелятивістський імпульс відрізняється від релятивістського на 1%.

Розв'язок:

Дано: $\frac{p}{p_r} = \eta$ =0,01

$\frac{v}{c}$ -?

Релятивістський імпульс дорівнює:

$$p_r = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (1)$$

Поділимо на нерелятивістський імпульс:

$$\eta = (p_r - p)/p = 1 - \sqrt{1-(v/c)^2} \qquad (2)$$

З формули (2) виразимо $\frac{v}{c}$:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\eta(2-\eta)} \qquad (3)$$

Підставимо в формулу (3) числові значення:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{0,01(2-0,01)} = 0,14$$

Відповідь: $\frac{v}{c}$ =0,14.

Задача 5.4. В одному акті поділу ядра урану нейтроном виділяється 202МеВ енергії. Визначити, наскільки зменшиться маса ядерного палива в реакторі, якщо всі ядра прореагують. Вважати, що початкова маса пального дорівнювала 100кг.

Розв'язок:

Дано: $m = 100кг$

$E = 202*10^6 eB$ =323,2*10^{-13}Дж

(1 eB =1Дж*1,6*10^{-19})

Δm -?

Знайдемо кількість атомів (ядер) в пальному:

$$N = 6,02*10^{23}*\frac{100}{0,235} = 2,56*10^{26}$$

Використовуючи закон зв'язку енергії і маси: $\Delta E = \Delta mc^2$, знайдемо втрату маси при поділі одного ядра урану: $\Delta m_i = \dfrac{\Delta E}{c^2}$

Помножимо на кількість ядер в паливі: $\Delta m = \dfrac{N * \Delta E}{c^2}$)

Підставимо числові значення:в (2): $\Delta m = \dfrac{2{,}56 * 10^{26} * 323{,}3 * 10^{-13}}{9 * 10^{16}}$ =0,092*кг*

Відповідь: Δm =0,092*кг*.

Задача 5.5. Скільки енергії (на одиницю маси) треба затратити, щоб надати нерухомому космічному кораблю швидкості 0,98 c ?

Розв'язок:

Дано: $v = 0{,}98c$

$\dfrac{K}{m_0}$ -?

Релятивістська кінетична енергія визначається формулою:

$$K = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right])$$

Поділимо вираз (1) на m_0 і отримаємо: $\dfrac{K}{m_0} = c^2 \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right]$

Підставимо числові значення в формулу (2):

$$\frac{K}{m_0} = (3*10^8)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-0{,}98^2}} - 1 \right] = 36*10^{16} \text{ Дж/кг}$$

Вілповідь: $\dfrac{K}{m_0}$ =36*10^{16} *Дж / кг*

Задачі для самостійної роботи

5.6. З якою швидкістю рухається частинка, якщо її релятивістська маса в 2 рази більша, ніж маса спокою? (0.85 c).

5.7. Лінійка довжиною 2м пролітає мимо спостерігачазі швидкістю, яка становить 80% від швидкості світла. Якої довжини вона буде здаватися спостерігачу? (1,2м)

.5.8. В скільки разів релятивістська маса частинки більша від її маси спокою, якщо її швидкість менша від швидкості світла на 0,01%? (71,4)

5.9. 9 Протон в сучасному прискорювачах набуває швидкості, яка становить 0,0003% від швидкості світла. У скільки разів його релятивістська маса більша від його маси спокою? (4*10^2)

5.10. При якій швидкості частинки її релятивістський імпульс відрізняється від нерелятивістського на 1%. (0,14с)

5.11. Скільки енергії (на одиницю маси) треба затратити, щоб надати нерухомому космічному кораблю швидкості 0,8с? (6*10^{16}Дж)

5.12. Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість протона від 0,6с до 0,8с Порівняти результат зі значенням? отриманим за нерелятивістською формулою. (3,75*10^{-9}Дж, 0,52*10^{-9}Дж).

5.13. .Потужність сонячного випромінювання на 1м^2 поверхні Землі становить 1,4кДж/(с*м^2). Яку масу втрачає Сонце за 1с, якщо відстань від Землі до Сонця 150млн.км? Порівняти цю втрату з йог масою.(4,4*10^{9}кг, 2*10^{-21}).

5.14. Вважаючи, що енергія спокою електрона дорівнює 0,51МеВ (1МеВ=1,6*10^{-13}Дж), визначити імпульс електрона з кінетичною енегією, що дорівнює його енергії спокою (0,9МеВ/с)

Література

1. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. [Текст]: М.: Лаборатория Базовых знаний, 2002. – 312 с.: ил. – 500 экз. – ISBN 5-93208-123-6
2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. [Текст]: Учебное пособие./ И.Е.Иродов. – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 416 с. – 500 экз. – ISBN 5-8114-0319-4
3. Чолпан П.П. Фізика: Підручник. – К.: Вища шк.., 2003. – 567 с.: іл. ISBN 966-642-112-7
4. Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. [Текст]: Справочник./В.Е.Кузьмичев – К.: Наук. Думка, 1989. – 864 с. – 100000 экз. – ISBN5-12-000493-8
5. Загальна фізика. Кінематика. [Текст]: метод. рек. до розвя’з. задач для студ техн. спец./ А.В.Немировський, О.В.Дрозденко, В.Б.Новожилов та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 32 с.