**ФЕЛ**

*В. П. Бригінець, О. О. Гусєва*

# РОЗРАХУНКОВА РОБОТА:
# «Електричне поле зарядів у вакуумі»

## *Умова*

Електричне поле створюється у вакуумі (діелектрична проникність $\varepsilon = 1$) зарядом, який розподілений:

**а**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму кулі, $r$ – відстань від центра;

**б**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму кульового шару, $r$ – відстань від центра;

**в**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму кулі та з густиною $\sigma$ по поверхні концентричної сфери, $r$ – відстань від центра;

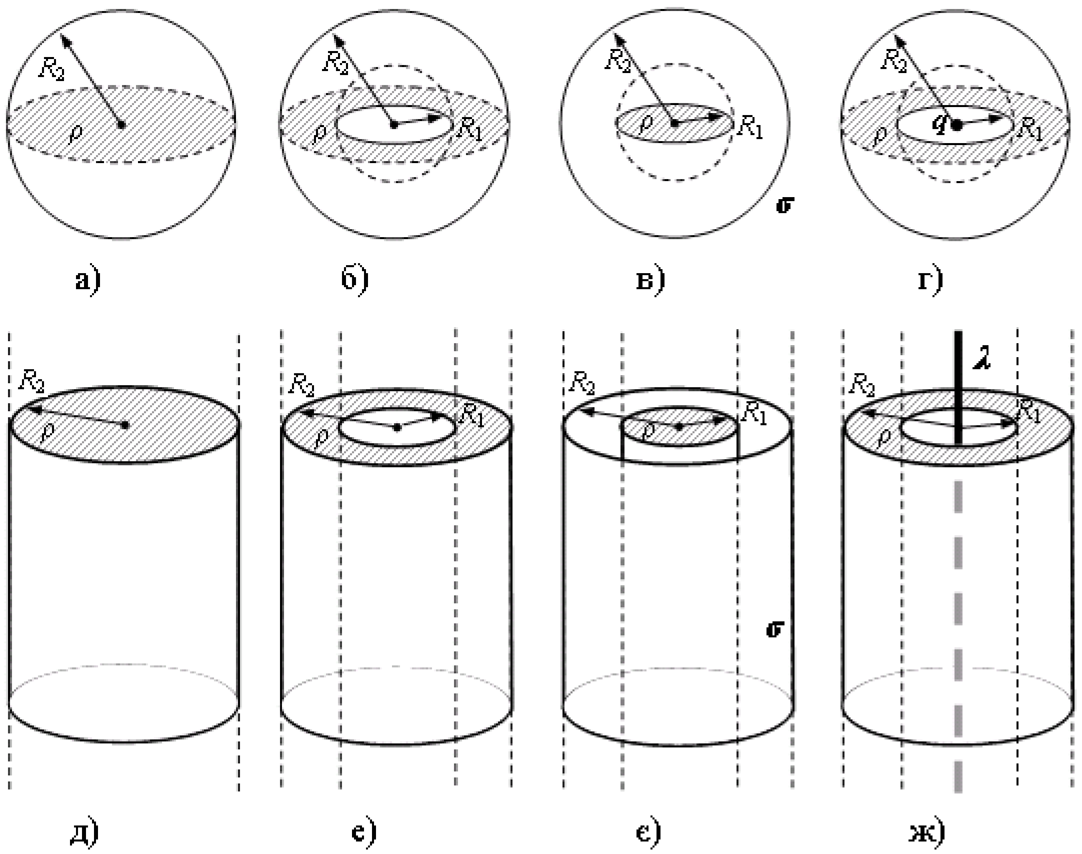
**г**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму кульового шару, в центрі якого знаходиться точковий заряд $q$, $r$ – відстань від центра;

**д**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму нескінченного циліндра, $r$ – відстань від осі;

**е**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму нескінченного циліндричного шару, $r$ – відстань від осі;

**є**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму нескінченного циліндра та з густиною $\sigma$ по нескінченній коаксіальній циліндричній поверхні, $r$ – відстань від осі;

**ж**) із густиною $\rho(r)$ по об'єму нескінченного циліндричного шару та з густиною $\lambda$ по нескінченній нитці, що проходить по осі системи, $r$ – відстань від осі.




### *Завдання*

У відповідності до таблиці варіантів (варіант і рівень складності призначається викладачем індивідуально) виконати наступні завдання.

1. За допомогою теореми Гауса аналітично визначити вирази (вивести формули) $\vec{E}(r)$ залежності напруженості електричного поля системи від відстані $r$ у всіх областях простору;

2. За напруженістю $\vec{E}(r)$ аналітично визначити вирази (вивести формули) $\varphi(r)$ залежності потенціалу електричного поля системи від відстані $r$ у всіх областях простору;

3. Записати числові формули, розрахувати й подати таблиці значень та за ними побудувати графіки залежностей $E_r(r)$ і $\varphi(r)$.

### *Порядок виконання та оформлення завдання*

1. Завдання оформлюється на папері формату А-4 з одного боку. На титульному аркуші обов'язково вказується:

   – тема роботи;
   – група та ПІБ студента;
   – варіант і рівень складності завдання.

2. Записати умову завдання *для свого варіанту* та записати параметри задачі (згідно з таблицею варіантів).

3. Зробити рисунок, на якому відобразити замкнену поверхню $S$, що буде використана для розрахунку, елементарну площадку $\mathrm{d}s$, орт нормалі $\vec{n}$ і вектор $\vec{E}$ на цій площадці.

4. Отримати аналітичні вирази $E(r)$ для кожної з областей;

5. Отримати аналітичні вирази для $\varphi(r)$, вибравши нульовий рівень (початок відліку) потенціалу залежно від типу системи: для (**а, б, в, г**) – на нескінченності $(\varphi(\infty)=0)$; для (**д, е, є, ж**) – на поверхні $r = R_2$ $(\varphi(R_2)=0)$;

6. Записати числові вирази для $E_r(r)$ і $\varphi(r)$, задля чого підставити числові дані (в основних одиницях СІ) в отримані в пп. 4 і 5 формули та виконати обчислення.

7. Розрахувати із кроком 1,0 см числові значення $E_r(r)$ і $\varphi(r)$ у діапазонах $r=[0;15]$ см за відсутності зарядів у центрі або на осі системи, та $r=[3;\,15]$ см при наявності таких зарядів (**г, ж**). Результати розрахунків звести у таблицю й подати її в тексті роботи.

> *<u>Зауваження</u>*: 1) в системах (**д, е**) на зарядженій поверхні $(r=R_2)$ треба обчислювати *два* значення напруженості за формулами для суміжних областей. 2) Якщо в залежностях $E_r(r)$ і $\varphi(r)$ є точки екстремумів або перетину з віссю абсцис, треба окремо розрахувати та занести до таблиці координати цих точок та екстремальні значення величин.

8. За даними таблиці значень побудувати графіки $E_r(r)$ і $\varphi(r)$, згідно із такими вказівками:

- графіки виконати на одному аркуші міліметрового паперу формату А-4 один над одним, розмістивши осі ординат на одній вертикалі та вибравши однакові масштаби по осях абсцис;
- масштаби по осях ординат підібрати так, аби було зручно відкладати точки і кожен із графіків займав приблизно половину аркуша;
- розмітити координатні осі та вказати одиниці вимірювання величин;
- штриховими лініями показати на графіках межі областей.

## *Таблиця варіантів для груп ДГ і ДМ*

| Варіант | Вид розподілу | Густина заряду | | | $q$ (нКл) |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\rho(r)$ | $\sigma$ (нКл/м$^2$) | $\lambda$ (нК/м) | |
| 1 | д | $\rho_0\left(r/R_1\right)^2$ | | | |
| 2 | в | $\rho_0$ | –0,1 | | |
| 3 | ж | $\rho_0$ | | 0,5 | |
| 4 | а | $\rho_0\, r/R_1$ | | | |
| 5 | г | $\rho_0$ | | | –0,1 |
| 6 | є | $\rho_0$ | –0,3 | | |
| 7 | б | $\rho_0$ | | | |
| 8 | ж | $-\rho_0$ | | 2,0 | |
| 9 | а | $\rho_0\, r/R_2$ | | | |
| 10 | є | $\rho_0$ | 0,3 | | |
| 11 | д | $\rho_0\, r/R_2$ | | | |
| 12 | е | $\rho_0$ | | | |
| 13 | г | $-\rho_0$ | | | 0,3 |
| 14 | в | $\rho_0$ | 0,1 | | |
| 15 | д | $\rho_0\, r/R_1$ | | | |
| 16 | г | $\rho_0$ | | | 0,1 |
| 17 | ж | $\rho_0$ | | –0,5 | |
| 18 | в | $-\rho_0$ | 0,4 | | |
| 19 | є | $-\rho_0$ | 0,9 | | |
| 20 | д | $\rho_0\left(r/R_2\right)^2$ | | –0,5 | |

Для всіх варіантів $\rho_0 = 50\,\text{нКл/м}^3$, (1 нКл = $10^{-9}$ Кл); $R_1$ = 5 см, $R_2$ = 10 см.

## *Таблиця варіантів для груп ДЕ, ДП, ДС*

| Вар. | Розподіл | $\rho(r)$ | $\sigma$, нКл/м$^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | а | $\rho_0\left(1-\left(2r/3R_2\right)\right)$ | |
| 2 | б | $\rho_0\left(R_1/r\right)$ | |
| 3 | в | $\rho_0$ | 1,0 |
| 4 | д | $\rho_0\left(1-\left(2r/R_2\right)\right)$ | |
| 5 | е | $\rho_0\left(R_2/r\right)$ | |
| 6 | є | $\rho_0$ | –3,0 |
| 7 | а | $\rho_0\left(1-\left(5r/3R_2\right)\right)$ | |
| 8 | б | $\rho_0\left(r/R_1\right)$ | |
| 9 | в | $\rho_0$ | 1,5 |
| 10 | д | $\rho_0\left(1-\left(7r/4R_2\right)\right)$ | |
| 11 | е | $\rho_0\left(r/R_2\right)$ | |
| 12 | є | $\rho_0$ | –4,5 |
| 13 | а | $\rho_0\left(1-\left(r/R_2\right)\right)$ | |
| 14 | б | $\rho_0\left(R_2/r\right)$ | |
| 15 | в | $\rho_0$ | –1,0 |
| 16 | д | $\rho_0\left(1-\left(5r/4R_2\right)\right)$ | |
| 17 | е | $\rho_0\left(R_1/r\right)$ | |
| 18 | є | $\rho_0$ | 2,0 |
| 19 | а | $\rho_0\left(1-\left(2r/R_2\right)\right)$ | |
| 20 | б | $\rho_0\left(r/R_2\right)$ | |
| 21 | в | $\rho_0$ | –1,5 |
| 22 | д | $\rho_0\left(1-\left(r/R_2\right)\right)$ | |
| 23 | е | $\rho_0\left(r/R_1\right)$ | |
| 24 | є | $\rho_0$ | 2,5 |

Для всіх варіантів $\rho_0$ = 0,5 мкКл/м$^3$; $R_1$ = 5 см, $R_2$ = 10 см.
1 мкКл = 10$^{-6}$ Кл, 1 нКл = 10$^{-9}$ Кл.

### *Вказівки з виконання розрахунків*

### *Розрахунок напруженості поля за теоремою Гауса*

Перед початком розрахунку напруженості поля обов'язково необхідно вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади розрахунку полів за одним із підручників:

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы, М, 2002 (або 1983), §§ 1.2, 1.3 (примеры 4, 5, 6);
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 2, Електрика і магнетизм, К, 2001, § 1.7, (приклад 4).
3. Савельев И.В. Курс физики, т.2, М, 1989, § 5 (ст.15-23), §§ 6,7,8.

Згідно з теоремою Гауса, у вакуумі потік напруженості електричного поля крізь замкнену поверхню будь-якої форми та розмірів визначається як

$$\oint E_n \mathrm{d}s = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

де $E_n$ – проекція вектора $\vec{E}$ на зовнішню нормаль до елементарної ділянки поверхні $\mathrm{d}s$, і $q$ – сумарний заряд, який зосереджений всередині замкненої поверхні.

Оскільки вектор $\vec{E}$ в кожній точці поля напрямлений по нормалі до еквіпотенціальної поверхні (поверхні сталого значення потенціалу $\varphi = const$), що проходить через цю точку, то $|E_n| = |\vec{E}|$. Для зручності надалі позначатимемо $E_n = E$ (знак $E$ залежить від напряму вектора $\vec{E}$ відносно нормалі до еквіпотенціальної поверхні), відтак для потоку поля крізь будь-яку еквіпотенціальну поверхню можна записати $\int\limits_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_S E\mathrm{d}s$. При цьому для полів високої симетрії в усіх точках еквіпотенціальної поверхні $E = const$, тому потік через площу $S$ еквіпотенціальної поверхні дорівнює:

$$\int\limits_S E\mathrm{d}s = ES$$

Якщо замкнена поверхня є замкненою еквіпотенціальною поверхнею з площею $S$, або складається з еквіпотенціальної поверхні площі $S$, та інших поверхонь, крізь які потік дорівнює нулю, то

$$\oint E\mathrm{d}s = ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}, \qquad (2)$$

Величина $S$ у випадку симетричних поверхонь визначається за відомими простими формулами, тому задача зводиться до визначення сумарного заряду $q$ всередині заданої замкненої поверхні. Це також не становить принципових труднощів, оскільки симетричне поле створюється відповідним симетричним розподілом заряду в просторі.

Придатними для розрахунку за теоремою Гауса полями, зокрема, є:

– центральне (сферично симетричне) поле, яке скрізь напрямлене радіально і в якому напруженість $E$ та потенціал $\varphi$ залежать тільки від відстані до центра симетрії. То ж еквіпотенціальними поверхнями центрального поля є концентричні сфери. У даній розрахунковій роботі такі поля створюють системи (**а, б, в, г**).

– аксіально симетричне поле, яке скрізь напрямлене перпендикулярно до заданої осі й напруженість $E$ та потенціал $\varphi$ залежать тільки від відстані $r$ до неї. Еквіпотенціальними поверхнями такого поля є коаксіальні із віссю симетрії нескінченні циліндричні поверхні. У даній роботі подібні поля створюють системи (**д, е, є, ж**).

### *Визначення потенціалу за відомою напруженістю поля*

Перед початком розрахунку потенціалу поля обов'язково необхідно вивчити теоретичний матеріал за одним із підручників:

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы, М, 2002 (1983), §§ 1.5, 1.6;
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 2, Електрика і магнетизм, К, 2001, § 1.10, 1.11.
3. Савельев И.В. Курс физики, т.2, М, 1989, §§ 8,9.

При переміщенні заряду $q$ в неоднорідному електричному полі $\vec{E}(\vec{r})$ на нього діє змінна сила $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$, тому робота поля на шляху між якимось точками 1 і 2 визначається криволінійним інтегралом уздовж траєкторії переміщення:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Оскільки поле зарядів є потенціальним, ця робота не залежить від траєкторії і може бути виражена через різницю потенціалів у точках 1 і 2:

$$A_{12} = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right).$$

Прирівнюючи праві частини цих виразів отримуємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Якщо поле $\vec{E}$ відоме, то цей вираз дозволяє знайти різницю потенціалів між будь-якими двома точками поля. Для визначення функції потенціалу $\varphi\left(\vec{r}\right)$ інтегрування треба вести від довільної точки $\vec{r}$ до нульової точки $\vec{r}_0$ [1], тоді

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} .$$

Наведені інтеграли не залежать від форми траєкторії, тому в даній розрахунковій роботі найзручніше інтегрувати вздовж силових ліній поля, тобто вздовж радіальних прямих, які виходять із центра (або осі) симетрії поля. В такому разі вирази для $\varphi_1 - \varphi_2$ та $\varphi$ спрощуються:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E(r)\,\mathrm{d}r \qquad (3)$$

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} E(r)\,\mathrm{d}r \ , \qquad (4)$$

де $r, r_0$ – відстань від центра (осі) симетрії до даної та до нульової точки.

## *Приклади розрахунку поля*

**Приклад 1.** Поле створюється кулею, що заряджена з об’ємною густиною $\rho = \rho_0 r^2 / R^2$ (розподіл **а**)

1.1 <u>*Визначення напруженості.*</u> Дане поле є центрально симетричним, отже для розрахунку за теоремою Гауса використовуємо вираз (2) й обираємо сферичні замкнені поверхні, для яких $S = 4\pi r^2$, де $r$ – відстань від центра кулі до точки, в якій шукаємо напруженість поля. Отже,

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , \qquad (1.1)$$

де $q$ – сумарний заряд всередині сфери радіуса $r$, який визначається як інтеграл від елементарних зарядів $\mathrm{d}q$ усіх нескінченно малих областей $\mathrm{d}V$ всередині даної замкненої поверхні:

$$q = \int \mathrm{d}q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \qquad (1.2)$$

<u>*Примітка 1*</u>. При однорідному розподілі заряду $\left(\rho = const\right)$ очевидно, що $q = \rho V$ і записувати вираз (1.2) немає потреби.

<u>*Примітка 2*</u>. При визначенні поля всередині кулі радіус сферичної поверхні в (1.1) $r < R$, і заряд, який потрапляє в неї, залежить від величини $r$: $q = q\left(r\right)$. Якщо ж поле визначається поза кулею $\left(r \ge R\right)$, то при будь-якій величині $r$ всередині сферичної поверхні опиняється весь заряд кулі $q = Q$.

---

[1] Нульова точка (нульовий рівень) потенціалу – це точка (або множина точок) в якій потенціал приймається рівним нулю: $\varphi(\vec{r}_0) = 0$ . У даній роботі для кожної системи нульова точка задана в тексті завдання.

Тому подальший розрахунок напруженості за формулою (1.1) треба проводити окремо для кожної з указаних областей.

<u>*Область 1*</u> $(0 \le r \le R)$. Для спрощення викладок при обчисленні заряду $q$ в інтегралі (1.2) за $\mathrm{d}V$ беруть не гранично малий кубик $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, а всю елементарну область, в якій густина заряду $\rho(r)$ має однакову величину. Конфігурація такої області відповідає симетрії розподілу заряду, і в даному прикладі – це нескінченно тонкий кульовий шар радіуса $r$ і товщини $\mathrm{d}r$, об'єм якого дорівнює $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Відтак, згідно з (1.2) і умовою завдання, маємо:

$$q = \int_0^r \rho_0 \frac{r^2}{R^2} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0 r^5}{5R^2}. \qquad (1.2')$$

Підставивши цей результат у (1.1), отримаємо вираз напруженості поля всередині кулі як функцію відстані від центра:

$$E_1(r) = \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 R^2}. \qquad (1.3)$$

<u>*Область 2*</u>. $(r \ge R)$. У цьому випадку при будь-якій величині $r$ в формулі (1.1) фігурує весь заряд кулі $Q$, який отримаємо, підставивши в (1.2′) значення $r = R$:

$$Q = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{5}.$$

Відповідно, напруженість поля у зовнішній області простору

$$E_2(r) = \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.4)$$

Відмітимо, що на поверхні зарядженої кулі ($r = R$) вирази (1.3) і (1.4) дають однаковий результат

$$E_1(R) = E_2(R) = \frac{\rho_0 R}{5\varepsilon_0}. \qquad (1.5)$$

Це корисно використовувати для контролю правильності розрахунків.

1.2 <u>*Визначення потенціалу*</u>. Після визначення напруженості поля $E(r)$ за допомогою співвідношень (3) і (4) можна знайти функцію потенціалу поля $\varphi(r)$, урахувавши, що за умовою завдання нульова точка потенціалу розташована на нескінченності.

Оскільки напруженість поля всередині та назовні кулі виражається різними функціями (1.3) і (1.4), розрахунок потенціалу теж треба проводити окремо для кожної області, і починати зручніше з області 2, яка включає нульову точку.

<u>*Область 2*</u>. $(r > R)$. Підставивши в (4) вираз (1.4) і умову $r_0 = \infty$, отримаємо:

$$\varphi_2(r)=\int\limits_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0}\int\limits_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_r^\infty .$$

Підставивши границі, отримуємо остаточний результат:

$$\varphi_2(r)=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r} \qquad (1.6)$$

Визначаємо також потенціал на межі областей (поверхня зарядженої кулі), поклавши в (1.6) $r=R$:

$$\varphi_2(R)=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}. \qquad (1.7)$$

<u>*Область 1*</u> $\left(0\le r\le R\right)$. Потенціал $\varphi_1(r)$ усередині зарядженої кулі визначаємо за допомогою співвідношення (3), врахувавши неперервність функції потенціалу[2]. Завдяки цьому на поверхні кулі $\varphi_1(r)=\varphi_2(r)$, отже, згідно з (3) маємо:

$$\varphi_1(r)-\varphi_2(R)=\int\limits_r^R E_1(r)\mathrm{d}r$$

Підставивши сюди вирази (1.3) і (1.7), знайдемо шукане:

$$\varphi_1(r)-\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}=\int\limits_r^R \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\int\limits_r^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{4}\right)_r^R=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\cdot\frac{R^4-r^4}{4}$$

Звідси після елементарних викладок отримаємо:

$$\varphi_1(r)=\frac{\rho_0(5R^4-r^4)}{20\varepsilon_0 R^2}. \qquad (1.8)$$

Цей вираз при $r=R$ дає величину (1.7), що вказує на відсутність помилок у викладках. Остаточно правильність отриманих результатів (1.6) і (1.8) перевіряємо за допомогою співвідношення між напруженістю та потенціалом, яке для розрахованого поля має вигляд:

$$E=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}. \qquad (1.9)$$

Підставивши під знак похідної функції (1.6) і (1.8) і виконавши диференціювання, отримаємо, відповідно, вирази (1.3) і (1.4), що засвідчує правильність розрахунку потенціалу.

1.3. <u>*Числові формули*</u>. Для розрахунку таблиць значень і побудови графіків необхідно записати числові формули залежностей (1.3), (1.4), (1.6), (1.8). Для цього в аналітичні вирази треба підставити задані значення параметрів та констант (обов’язково в основних одиницях СІ) і виконати обчис-

[2] Розрив потенціалу в будь-якій точці означав би нескінченне значення напруженості поля в цій точці, що позбавлено змісту.

лення. В даному прикладі, згідно з умовою, $\rho_0 = 50$ нКл/м$^3$ $= 5\cdot10^{-8}$ Кл/м$^3$, $R = 5$ см $= 5\cdot10^{-2}$ м, $\varepsilon = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, отже

$$E_1 = \frac{5\cdot10^{-8}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot10^{-4}}r^3 = 4{,}52\cdot10^5\cdot r^3 \text{ В/м}$$

$$E_2 = \frac{5\cdot10^{-8}\cdot125\cdot10^{-6}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{0{,}141}{r^2} \text{ В/м}$$

$$\varphi_1 = \frac{5\cdot10^{-8}\cdot(5\cdot6{,}25\cdot10^{-6}-r^4)}{20\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot10^{-4}} = 1{,}13\cdot10^5\left(3{,}13\cdot10^{-5}-r^4\right)\text{В}$$

$$\varphi_2 = \frac{5\cdot10^{-8}\cdot1{,}25\cdot10^{-4}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\frac{1}{r} = \frac{0{,}14}{r} \text{ В}$$

**Приклад 2.** Поле створюється нескінченним циліндричним шаром із радіусами $R_1$ і $R_2$, зарядженим із заданою залежністю об'ємної густини заряду від відстані до осі $\rho = \rho(r)$, (розподіл **е**).

2.1 <u>*Визначення напруженості*</u>. Для даної та подібних систем (заряд розподілений по об’єму циліндра або по циліндричній поверхні) є характерною осьова симетрія електричного поля. Відповідно, еквіпотенціальними поверхнями є *нескінченні* циліндри з віссю на осі симетрії системи. Тому при розрахунку залежності $E = E(r)$ за теоремою Гауса замкнену поверхню беремо у вигляді прямого циліндра радіуса $r$ із довільною висотою $h$. При цьому основи циліндра не є еквіпотенціальними. Проте вектор $\vec{E}$ напрямлений радіально (паралельно до основи), то ж на торцях циліндра нормальна проекція напруженості $E_n = 0$, і потік створюється тільки крізь бічну поверхню $S = 2\pi rh$. Тому, згідно з (2),

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h r}, \qquad (2.1)$$

Може здатися, що результат розрахунку залежить від невідомої величини $h$, але це не так, бо величина заряду $q$ в (2.1) є прямо пропорційною висоті вибраної циліндричної поверхні, і величина $h$ при обчисленнях скорочується. Ця задача є відмінною від попередньої (**Приклад 1**) ще тим, що при розподілі заряду по циліндричному шару створюється додаткова область $r < R_1$ (порожнина), яка потребує окремого розгляду. Тому при застосуванні теореми Гауса треба використовувати циліндри з радіусами, що потрапляють в кожну з трьох областей. Останнє зауваження стосується також розподілу **б**, в якому заряд зосереджений у кульовому шарі.

В іншому порядок розрахунку є аналогічним до розглянутого раніше (**Приклад 1**). А саме.

<u>*Область 1*</u> $(r < R_1)$. Очевидно, що всередині циліндра висоти $h$ і будь-якого радіуса $r < R_1$ заряд $q_1 = 0$. Отже, згідно з (1), потік теж дорівнює нулю:

$E_1 S = 0$. Це означає, що $E_1 = 0$, тобто в порожнині електричне поле не створюється.

<u>*Область 2*</u> ($R_1 \le r \le R_2$). Для визначення заряду всередині замкненої поверхні вибираємо елементарний об'єм у вигляді нескінченно тонкого циліндричного шару радіуса $r$ і товщини $\mathrm{d}r$ з об'ємом $\mathrm{d}V = 2\pi r h\,\mathrm{d}r$. Отже, згідно з (1.2),

$$q_2 = \int_{R_1}^{r} \rho(r) 2\pi r h\,\mathrm{d}r = 2\pi h \int_{R_1}^{r} \rho(r) r\,\mathrm{d}r = 2\pi h\big(F(r) - F(R_1)\big), \qquad (2.2)$$

і у відповідності до (2.1),

$$E_2 = \frac{F(r) - F(R_1)}{\varepsilon_0 r}. \qquad (2.3)$$

Тут $F(r)$ і $F(R_1)$ – значення первісної

$$F(r) = \int \rho(r) r\,\mathrm{d}r \qquad (2.4)$$

від підінтегральної функції в (2.2) на межах області інтегрування.

<u>*Область 3*</u> $(r > R_2)$. У цій області замкнена поверхня охоплює весь заряд $Q$ ділянки шару всередині замкненого циліндра висотою $h$:

$$q_3 = Q = 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) r\,\mathrm{d}r = 2\pi h\big(F(R_2) - F(R_1)\big). \qquad (2.5)$$

Відповідно, напруженість

$$E_3 = \frac{F(R_2) - F(R_1)}{\varepsilon_0 r}. \qquad (2.6)$$

Для отримання з (2.3) і (2.6) розгорнутих виразів напруженості $E(r)$ треба спочатку підставити в (2.4) задану залежність $\rho(r)$ і провести інтегрування.

<u>*2.2 Визначення потенціалу*</u>. Після отримання залежності $E(r)$ для кожної з областей, за допомогою (3) або (4) визначають функцію потенціалу $\varphi(r)$ у кожній області. У завданнях із осесиметричним розподілом заряду (**д**, **е**, **є**, **ж**) вибір нульовий рівень потенціалу встановюється на циліндричній поверхні радіуса $R_2$, отже, в (4) $r_0 = R_2$.

Спочатку визначаємо $\varphi(r)$ в областях 2 і 3, які прилягають до еквіпотенціальної поверхні.

<u>*Область 3*</u> $(r > R_2)$. Згідно з (4),

$$\varphi_3(r) = \int_{r}^{R_2} E_3(r)\,\mathrm{d}r.$$

<u>Область 2</u> $\left(R_1 \le r \le R_2\right)$:

$$\varphi_2(r) = \int_r^{R_2} E_2(r)\,\mathrm{d}r .$$

Отримавши вираз $\varphi_2(r)$, знаходимо потенціал $\varphi_2(R_1)$ на внутрішній поверхні шару $r = R_1$.

*<u>Область 1</u>* $(r < R_1)$. Через неперервність функції потенціалу $\varphi_1(R_1) = \varphi_2(R_1)$, що дозволяє визначити потенціал $\varphi_1(r)$ в області 1 за допомогою співвідношення (3):

$$\varphi_1(r) - \varphi_2(R_1) = \int_r^{R_1} E_1 \mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(r) = \varphi_2(R_1) + \int_r^{R_1} E_1 \mathrm{d}r.$$

У даному прикладі $E_1 = 0$, отже, у порожнині потенціал скрізь однаковий:

$$\varphi_1(r) = \varphi_2(R_1) = const .$$