НТУУ «КПІ»

Факультет електроніки

Розрахункова робота із загальної фізики

«ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ ЗАРЯДІВ У ВАКУУМІ»

(Варіант -   )

Виконав студент гр.________ ___________________

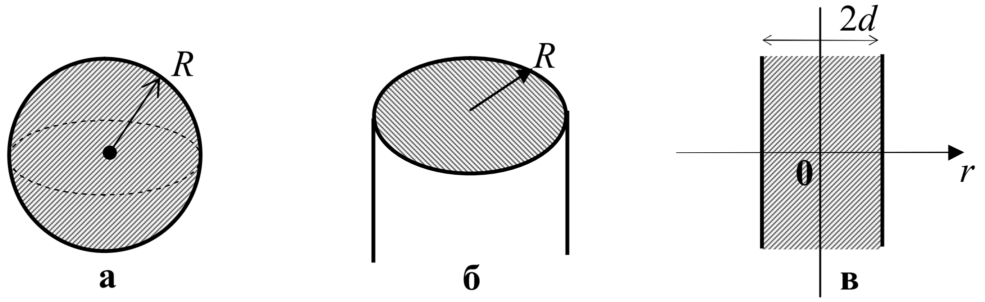
Умова

Електричне поле створюється у вакуумі зарядом, який розподілений (див. рис.):

а) по кулі з об'ємною густиною $\rho(r)$, де r – відстань від центра кулі;

б) по нескінченному циліндру з об'ємною густиною $\rho(r)$, де r – відстань від осі циліндра;

в) по нескінченному плоскому шару товщини $2d$ з об'ємною густиною $\rho(r)$, де r – відстань від площини $r = 0$.



Завдання

У відповідності до таблиці варіантів (варіант збігається з порядковим номером студента в груповому журналі) виконати наступні завдання.

1. За допомогою теореми Гаусса вивести формули залежностей $E_r(r)$ напруженості поля системи від відстані r у всіх областях простору;

2. За отриманими виразами $E_r(r)$ вивести формули залежностей потенціалу $\varphi(r)$ електричного поля системи від відстані r у всіх областях простору;

3. Записати числові вирази залежностей $E_r(r)$ і $\varphi(r)$ і розрахувати їх значення із заданим кроком у заданому діапазоні відстаней *r* ; результати звести в таблицю;

4. За даними таблиці значень побудувати в масштабі графіки $E_r(r)$ і $\varphi(r)$.

Порядок виконання та оформлення завдання

1. Завдання оформлюється на папері формату А-4 з одного боку.
2. На титульному аркуші обов'язково вказується:

– тема роботи;
– група та прізвище й ініціали студента;
– варіант і рівень складності завдання.

3. Записати умову завдання *для свого варіанту* та параметри задачі (перенести відповідну строку з таблиці варіантів).

4. Зробити рисунок, де відобразити замкнену поверхню S, яка буде використана для розрахунку, елементарну площадку $\mathrm{d}s$, орт нормалі $\vec{n}$ і вектор $\vec{E}$ на цій площадці.

5. За допомогою теореми Гаусса отримати аналітичні вирази $E(r)$ для кожної з областей;

6. Знайти вирази $\varphi(r)$, вибравши нульовий рівень (початок відліку) потенціалу залежно від типу системи: для (**а**) – на нескінченності $(\varphi(\infty)=0)$; для (**б**) – на поверхні циліндра $(\varphi(R)=0)$ і для (в) – на площині симетрії $r = 0$ $(\varphi(0)=0)$, яка проходить посередині шару.

7. Записати числові вирази для $E_r(r)$ і $\varphi(r)$, задля чого в отримані в пп. 5 і 6 формули підставити числові дані (в основних одиницях СІ) і розрахувати всі числові множники.

8. Розрахувати із кроком 1,0 см числові значення $E_r(r)$ і $\varphi(r)$ в інтервалі $r = [0; 20]$см. Результати розрахунків звести у спільну таблицю, котру навести в тексті роботи.

Зауваження: ***1***). Якщо в залежностях $E_r(r)$ і $\varphi(r)$ є точки екстремумів або точки перетину з віссю *r*, то треба розрахувати їхні координати та екстремальні значення $E_r(r)$ і $\varphi(r)$, обов'язково занести їх таблицю даних і вказати на графіках.

2). Якщо в якійсь області залежність $E_r(r)$ чи $\varphi(r)$ виявилася лінійною, то розрахунки і побудову графіків для такої області можна робити тільки по крайніх точках.

9. За даними таблиці значень побудувати графіки $E_r(r)$ і $\varphi(r)$.

Зауваження. Оцінка (рейтинґовий бал) залежить не лише від правильності розрахунків, а і від якості їхнього графічного представлення. Тому при побудові графіків треба дотримуватися наступних вимог:

– обидва графіки розміщуються на одному аркуші міліметрового паперу формату А-4 так, аби осі ординат знаходилися на одній вертикалі й осі абсцис мали однакові масштаби;

– масштаби по осях E, φ, r слід підбирати так, аби було зручно відкладати точки і кожен із графіків займав приблизно половину поля креслення;
– координатні осі мають бути розмічені та проградуйовані в указаних одиницях відповідної величини. При цьому не варто вказувати числові значення біля кожної масштабної мітки; не проставляються на осях також розрахункові величини з таблиці даних.
– точки на графіках мають бути показані чітко, а лінії проведені грамотно, з урахуванням вірогідних похибок округлення при обчисленнях і відкладанні точок на папері. Це означає, що графіки слід поводити не від точки до точки, а плавно (найліпше – під лекало) так, аби лінії не були ламаними та «хвилястими», і кількість точок, що не потрапили на лінію, по обидва боки була приблизно однаковою.

Таблиця варіантів

Вар	**Тип**	n	**Розподіл** $\rho(r)$	**Вар**	**Тип**	n	**Розподіл** $\rho(r)$
1	а	1/2	$\rho_0\left(1-n\left(\frac{r}{R}\right)\right)$	3	в	1/2	$\rho_0 \sin\left(n\frac{\pi r}{2d}\right)$
4		2/3		6		2/3	
7		3/4		9		1	
10		1		12		2	
13		3/2		15		1/2	$\rho_0 \cos\left(n\frac{\pi r}{2d}\right)$
16		5/3		18		2/3	
19		7/4		21		1	
22		2		24		2	
2	б	1/2		25	а	1	$\rho_0\left(\frac{r}{R}\right)^n$
5		2/3		28		–1	
8		3/4		26	б	–1	
11		1		29		1	
14		3/2		27	в	3	$\rho_0\left(1-n\left(\frac{r}{d}\right)\right)$
17		5/3		30		4	
20		7/4		31		5	
23		2		32		6	

Для всіх варіантів ρ_0 = 0,5 мкКл/м^3; R = 10 см, d = 10 см

Вказівки з виконання розрахунків

Розрахунок напруженості поля за теоремою Гаусса

Перед початком розрахунку напруженості поля обов'язково необхідно вивчити теоретичний матеріал і розібрати приклади розрахунку полів за одним із підручників:

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы, М, 2002 (або 1983), §§ 1.2, 1.3 (примеры 4, 5, 6);
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 2, Електрика і магнетизм, К, 2001, § 1.7, (приклад 4).
3. Савельев И.В. Курс физики, т.2, М, 1989, § 5 (ст.15-23), §§ 6,7,8.

Згідно з теоремою Гаусса, потік напруженості електричного поля крізь довільну замкнену поверхню у вакуумі визначається як

$$\oint E_n \mathrm{d}s = \frac{q}{\varepsilon_0}, \qquad (1)$$

де E_n – ***проекція*** вектора $\vec{E}$ на зовнішню нормаль до елементарної ділянки $\mathrm{d}s$ вибраної поверхні, а q – сумарний заряд, зосереджений всередині цієї замкненої поверхні.

Теорема Гаусса дозволяє обчислити потік поля заданої системи зарядів крізь будь-яку задану замкнену поверхню, але в загальному випадку нічого не говорить про саме поле $\vec{E}$ в різних точках тої поверхні. Проте ситуація спрощується для полів, які створюються високо симетричними розподілами заряду і самі мають відповідну просторову симетрією. В таких полях існують замкнені поверхні простої форми, в усіх точках яких величина $E_n = const$ і по модулю збігається з величиною напруженості. Тож надалі для проекції вектора $\vec{E}$ на зовнішню нормаль до поверхні введемо позначення $E_n = E$, де E – алгебраїчна величина. Прикладом таких поверхонь є замкнені еквіпотенціальні поверхні поля, на яких потенціал має однакову величину $\varphi = const$, і вектор $\vec{E}$ напрямлений по зовнішній нормалі. Потік напруженості крізь таку поверхню

$$\oint E \mathrm{d}s = E \oint \mathrm{d}s = ES,$$

площа поверхні.

Сказане стосується і комбінованих поверхонь, які складаються з незамкненої ділянки еквіпотенціальної поверхні поля деякою площею S, та таких додаткових замикаючих ділянок, крізь які потік не створюється. Для таких «гарних» поверхонь вираз (1) перетворюється на алгебраїчне рівняння, з якого можна визначити напруженість поля:

$$ES = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}, \tag{2}$$

де q – заряд всередині вибраної замкненої поверхні, а S – площа поверхні (всієї, або частини, крізь яку створюється потік).

При цьому для симетричних полів і поверхонь величина S визначається відомими формулами геометрії. Визначення заряду q всередині поверхні теж не становить труднощів, бо він розподілений у просторі симетрично із заданою густиною $\rho(\vec{r})$.

На загал величина q обчислюється шляхом інтегрування (додавання) всіх елементарних порцій заряду $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$ зосереджених всередині даної замкненої поверхні:

$$q = \int \rho(\vec{r})\mathrm{d}V, \tag{3}$$

а в окремому випадку рівномірного розподілу заряду ($\rho = const$) – безпосередньо за формулою

$$q = \rho V', \tag{3а}$$

де V' – об'єм всередині замкненої поверхні, зайнятий зарядом.

У даній роботі для розрахунку пропонуються поля з наступними типами симетрії:

– центральне (сферично симетричне) поле (тип **а)**, яке скрізь напрямлене радіально і в якому напруженість E та потенціал φ залежать тільки від відстані до центра симетрії. Тож еквіпотенціальними поверхнями такого поля є концентричні сфери.

– аксіально симетричне поле (тип **б**), яке скрізь напрямлене перпендикулярно до заданої осі й напруженість E та потенціал φ залежать тільки від відстані r до неї. Еквіпотенціальними поверхнями такого поля є коаксіальні із віссю симетрії нескінченні циліндричні поверхні.

– плоско симетричне поле (тип в), яке скрізь напрямлене перпендикулярно до заданої площини, а еквіпотенціальними поверхнями є площини паралельні до площини симетрії.

Визначення потенціалу за відомою напруженістю поля

Перед початком розрахунку потенціалу поля обов'язково необхідно вивчити теоретичний матеріал за одним із підручників:

1. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы, М, 2002 (1983), §§ 1.5, 1.6;
2. Кучерук І.М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики, т. 2, Електрика і магнетизм, К, 2001, § 1.10, 1.11.
3. Савельев И.В. Курс физики, т.2, М, 1989, §§ 8,9.

При переміщенні заряду q в неоднорідному електричному полі $\vec{E}(\vec{r})$ на нього діє змінна сила $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$, тому робота поля на шляху між якимось точками 1 і 2 визначається криволінійним інтегралом уздовж траєкторії переміщення:

$$A_{12} = q\int_1^2 \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}.$$

Оскільки поле зарядів є потенціальним, ця робота не залежить від траєкторії і може бути виражена через різницю потенціалів у точках 1 і 2:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Прирівнюючи праві частини обох виразів роботи отримуємо:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}.$$

Цей вираз дозволяє знайти різницю потенціалів між будь-якими двома точками поля через відому напруженість $\vec{E}(\vec{r})$. Для визначення функції потенціалу $\varphi(\vec{r})$ інтегрування треба вести від довільної точки $\vec{r}$ до нульової точки $\vec{r}_0$[1], або, коли це зручніше, від $\vec{r}_0$ до $\vec{r}$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}.$$

Ці інтеграли не залежать від форми траєкторії, тому її можна обирати на свій розсуд, виходячи з міркувань зручності. Зокрема, в даній розрахунковій роботі найзручніше інтегрувати вздовж силових ліній поля, тобто вздовж радіальних променів, які виходять із центра (осі) симетрії, або з площини симетрії поля перпендикулярно до неї. В такому разі вирази для $\varphi_1 - \varphi_2$ та φ спрощуються:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\mathrm{d}r \tag{4}$$

$$\varphi(r) = \int_{r}^{r_0} E(r)\mathrm{d}r = -\int_{r_0}^{r} E(r)\mathrm{d}r, \tag{5}$$

де $E(r)$ – проекція напруженості на напрям переміщення, r, r_0 – відстань від центра (осі) симетрії до даної точки та до нульової точки, відповідно.

[1] Нульова точка (нульовий рівень) потенціалу – це точка (або множина точок) в якій потенціал приймається рівним нулю: $\varphi(\vec{r}_0) = 0$. У даній роботі для кожної системи нульова точка задана в тексті завдання.

Приклади розрахунків поля

Приклад 1. Поле створюється кулею радіуса R (тип **а**), що заряджена з об'ємною густиною $\rho(r) = \rho_0 (r/R)^n$, де $n = 2$, $\rho_0 = 0{,}5$ мКл/м^3, $R = 5$ см.

1.1 ***Визначення напруженості.*** Дане поле є сферично симетричним, отже для розрахунку за теоремою Гаусса використовуємо сферичні замкнені поверхні, для яких $S = 4\pi r^2$, де r – відстань від центра кулі до точки, в якій шукаємо напруженість поля. Тоді за формулою (2)

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1.1}$$

де q – сумарний заряд всередині сфери радіуса r, який визначається виразом (3) через задану функцію $\rho(r)$.

Примітка. При визначенні поля всередині кулі радіус сферичної поверхні в (1.1) $r < R$, і заряд, який потрапляє в неї, залежить від величини r: $q = q(r)$. Якщо ж поле визначається поза кулею $(r > R)$, то при будь-якій величині r всередині сферичної поверхні опиняється весь заряд кулі $q = Q$. Тому подальший розрахунок величини q, тож і напруженості поля за формулою (1.1), треба проводити окремо для кожної з указаних областей.

Область 1 $(0 \le r \le R,\ куля)$. Для спрощення викладок при обчисленні заряду q в інтегралі (1.2) за $\mathrm{d}V$ беруть не гранично малий кубик $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, а всю елементарну область, в якій густина заряду $\rho(r)$ має однакову величину. Конфігурація такої області відповідає симетрії розподілу заряду. В даному прикладі – це нескінченно тонкий кульовий шар радіуса r і товщини $\mathrm{d}r$, об'єм якого дорівнює $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$. Відтак, згідно з (3) і умовою завдання, маємо:

$$q = \int_0^r \rho_0 \frac{r^2}{R^2} \cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0}{R^2} \int_0^r r^4 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0 r^5}{5R^2}. \tag{1.2}$$

Підставивши цей вираз в (1.1), знайдемо напруженість поля всередині кулі як функцію відстані від центра:

$$E_1(r) = \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 R^2}. \tag{1.3}$$

Область 2. $(r \ge R,\ зовнішній\ простір)$. У цьому випадку при будь-якій величині r в формулі (1.1) фігурує весь заряд кулі Q, який отримаємо, прийнявши в інтегралі (3) верхню межу $r = R$:

$$Q = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{5}.$$

Відповідно, напруженість поля у зовнішній області простору

$$E_2(r)=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}. \qquad (1.4)$$

Відмітимо, що на поверхні зарядженої кулі ($r=R$) вирази (1.3) і (1.4) дають однаковий результат

$$E_1(R)=E_2(R)=\frac{\rho_0 R}{5\varepsilon_0}. \qquad (1.5)$$

На це слід звертати увагу для контролю правильності розрахунків.

1.2 ***Визначення потенціалу***. Після визначення напруженості поля $E(r)$ можна за допомогою співвідношень (4) і (5) знайти функцію потенціалу поля $\varphi(r)$, прийнявши за умовою завдання нульову точку на нескінченності.

Оскільки напруженість поля всередині та назовні кулі виражається різними формулами (1.3) і (1.4), розрахунок потенціалу слід проводити окремо для кожної області, починаючи з області 2, що включає нульову точку.

Область 2. $(r>R)$. Підставивши в (4) вираз (1.4) і умову $r_0=\infty$, отримаємо:

$$\varphi_2(r)=\int_r^\infty \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_r^\infty \;\Rightarrow\; \varphi_2(r)=\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r}. \qquad (1.6)$$

Примітка. Інтеграл з нескінченною межею в математиці називається невласним інтегралом і визначається як границя звичайного інтеграла із змінною межею a за умови $a\to\infty$. Але в простих випадках, як у цьому прикладі, спеціальна процедура пошуку границі є непотрібною, і з символом ∞ можна поводитись, як із звичайним числом.

Далі визначаємо потенціал на межі областей (поверхня зарядженої кулі), поклавши в (1.6) $r=R$:

$$\varphi_2(R)=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}. \qquad (1.7)$$

Область 1 $(0\le r\le R)$. Потенціал $\varphi_1(r)$ усередині зарядженої кулі визначаємо за допомогою співвідношення (4), врахувавши неперервність функції потенціалу[2]. Завдяки цьому на поверхні кулі $\varphi_1(r)=\varphi_2(r)$, отже, згідно з (3) маємо:

$$\varphi_1(r)-\varphi_2(R)=\int_r^R E_1(r)\mathrm{d}r$$

[2] Розрив потенціалу в будь-якій точці означав би нескінченне значення напруженості поля в цій точці.

Підставивши сюди вирази (1.3) і (1.7), знайдемо шукане:

$$\varphi_1(r)-\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}=\int_r^R\frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\int_r^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\left(\frac{r^4}{4}\right)_r^R=\frac{\rho_0 R^2}{5\varepsilon_0}\cdot\frac{R^4-r^4}{4}$$

Звідси після елементарних викладок отримуємо:

$$\varphi_1(r)=\frac{\rho_0(5R^4-r^4)}{20\varepsilon_0 R^2}. \tag{1.8}$$

Цей вираз при $r=R$ дає величину (1.7), що вказує на відсутність помилок у викладках. Остаточно правильність отриманих результатів (1.6) і (1.8) перевіряємо за допомогою співвідношення між напруженістю та потенціалом, яке для розрахованого поля має вигляд:

$$E=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}. \tag{1.9}$$

Підставивши під знак похідної функції (1.6) і (1.8) і виконавши диференціювання, отримаємо, відповідно, вирази (1.3) і (1.4), що засвідчує правильність розрахунку потенціалу.

1.3. ***Числові формули***. Для розрахунку таблиць значень і побудови графіків необхідно записати числові формули залежностей (1.3), (1.4), (1.6), (1.8). Для цього в аналітичні вирази треба підставити задані значення параметрів та констант (обов'язково в основних одиницях СІ) і виконати обчислення. В даному прикладі, згідно з умовою, ρ_0 = 50 нКл/м^3 = $5\cdot10^{-8}$ Кл/м^3, R = 5 см = $5\cdot10^{-2}$ м, ε = $8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, отже

$$E_1=\frac{5\cdot10^{-8}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot10^{-4}}r^3=4{,}52\cdot10^5\cdot r^3\ \text{В/м}$$

$$E_2=\frac{5\cdot10^{-8}\cdot125\cdot10^{-6}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{0{,}141}{r^2}\ \text{В/м}$$

$$\varphi_1=\frac{5\cdot10^{-8}\cdot(5\cdot6{,}25\cdot10^{-6}-r^4)}{20\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot25\cdot10^{-4}}=1{,}13\cdot10^5\left(3{,}13\cdot10^{-5}-r^4\right)\text{В}$$

$$\varphi_2=\frac{5\cdot10^{-8}\cdot1{,}25\cdot10^{-4}}{5\cdot8{,}85\cdot10^{-12}}\frac{1}{r}=\frac{0{,}14}{r}\ \text{В}$$

Далі за цими формулами проводимо обчислення, зводимо їх у спільну таблицю і будуємо графіки.

Приклад 2. Поле створюється нескінченним циліндром (тип б) радіуса R зарядженим із об'ємною густиною заряду $\rho=\rho_0\left(r/R\right)^n$, де $n=1$.

Розрахунок даного поля робиться за тим самим алгоритмом, що й у **Прикладі 1**. При цьому слід урахувати наступне.

1. Дане поле має не центральну, а осьову симетрію – воно скрізь напрямлене радіально щодо осі циліндра і залежить тільки від відстані r до неї. Тому замкнені поверхні треба вибирати у вигляді коаксіальних циліндрів довільної висоти h і радіуса r. Відповідно, формула (2) набуває вигляду

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 rh}. \tag{2.1}$$

2. Так само при обчисленні заряду q за формулою (3) елементарні області $\mathrm{d}V$ всередині замкненої поверхні слід брати у вигляді циліндричних шарів радіуса r і товщиною $\mathrm{d}r$, для яких $\mathrm{d}V = 2\pi hr\mathrm{d}r$. Отже, згідно з умовою, при $(r \le R)$

$$q = \frac{2\pi\rho_0 h}{R}\int_0^r r^2 dr \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\pi\rho_0 hr^3}{3R}. \tag{2.2}$$

При будь-якому $r > R$ (область поза циліндром)

$$q = \frac{2\pi\rho_0 h}{R}\int_0^R r^2 dr \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2\pi\rho_0 hR^2}{3}. \tag{2.2а}$$

3. Відповідно до отриманих виразів q за формулою (2.1) визначаємо напруженість поля всередині $(r \le R)$ та поза циліндром $(r > R)$:

$$E_1(r) = \frac{\rho_0 r^2}{3\varepsilon_0 R}, \quad r \le R, \tag{2.3}$$

і

$$E_2(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r}, \quad r > R.. \tag{2.4}$$

4. Потенціал $\varphi(r)$визначаємо за формулою (5), підставляючи вирази (2.3) і (2.4) і враховуючи, що за умово $r_0 = R$ (нульова точка на поверхні циліндра). Отже, всередині циліндра ($r \le R$)

$$\varphi_1(r) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 R}\int_r^R r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0}{9\varepsilon_0 R}\left(R^3 - r^3\right). \tag{2.5}$$

На осі циліндра ($r = 0$)

$$\varphi(0) = \frac{\rho_0 R^2}{9\varepsilon_0}. \tag{2.5а}$$

Назовні циліндра ($r > R$)

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\int_R^r \frac{\mathrm{d}r}{r} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2(r) = -\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R}. \tag{2.6}$$

5. Далі слід записати числові формули і виконати розрахунки. Займатися цим тут немає потреби, оскільки порядок складання числових виразів було детально розглянуто у **Прикладі 1.**

Приклад 3. Поле створюється нескінченним плоским шаром (тип **в**) товщини $2d$ зарядженим із об'ємною густиною заряду $\rho(r) = \rho_0 (r/d)^n$, де $n = 3$.

На основі принципу суперпозиції або із загальних міркувань симетрії легко встановити, що дане поле є плоско симетричним – воно скрізь напрямлене перпендикулярно до шару заряду, і величина напруженості та потенціалу залежить тільки від відстані до площини, що проходить посередині шару. При цьому, позаяк функція $\rho(r)$ є непарною, характеристики поля по обидва боки від площини $r = 0$ відрізняється лише протилежними напрямками вектора $\vec{E}$. Тому розрахунки можна проводити тільки для області $r \geq 0$.

3.1 ***<u>Визначення напруженості</u>***. Виходячи із симетрії поля, для розрахунку залежності $E = E(r)$ за теоремою Гаусса замкнену поверхню беремо у формі перпендикулярного до шару циліндра (або призми) із площами основ S, одна з яких розташована у площині $r = 0$, а інша на відстані r від неї. У такому разі потік напруженості створюється тільки через одну основу циліндра і дорівнює ES. Це зумовлено тим, що, по-перше, з різних боків площини $r = 0$ поле має протилежні напрямки, тож посередині $E = 0$, і, по-друге, на бічній поверхні циліндра нормальна складова напруженості $E_n = 0$. Отже, згідно з (2) загальний вираз напруженості має вигляд:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}, \tag{3.1}$$

де S – площа основи циліндра, q – величина зосередженого в ньому заряду, яка визначається окремо всередині та назовні шару.

<u>Внутрішня область</u> $(r \leq d)$. Для обчислення заряду всередині вибраної циліндричної поверхні подумки розсічемо обмежений нею об'єм на нескінченно тонкі шари товщини $\mathrm{d}r$ з об'ємом $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}r$. Тоді

$$q = \int \rho(r) S\,\mathrm{d}r,$$

і у внутрішній області

$$q_1 = \frac{\rho_0 S}{d^3}\int_0^r r^3\,\mathrm{d}r \quad\Rightarrow\quad q_1 = \frac{\rho_0 S r^4}{4d^3}. \qquad (3.2)$$

Відповідно до (3.1) напруженість поля

$$E_1(r) = \frac{\rho_0 r^4}{4\varepsilon_0 d^3}. \qquad (3.3)$$

<u>*Зовнішня область*</u> $(r > d)$. У цьому випадку, незалежно від r, заряд всередині циліндра є тільки на відстанях $r \le d$ і дорівнює

$$q_2 = \frac{\rho_0 S}{d^3}\int_0^d r^3\,\mathrm{d}r \quad\Rightarrow\quad q_2 = \frac{\rho_0 S d}{4}.$$

Отже, згідно з (3.1) поза шаром напруженість поля скрізь однакова (поле однорідне) і дорівнює

$$E_2 = \frac{\rho_0 d}{4\varepsilon_0}. \qquad (3.4)$$

3.2 <u>Визначення потенціалу</u>. За умовою нульовий рівень потенціалу приймається на площині $r = 0$, тому розрахунок починаємо з області всередині шару .

<u>*Внутрішня область*</u> $(r \le d)$. Підставивши в інтеграл (5) вираз (3.3) й інтегруючи у напрямку поля, отримуємо:

$$\varphi_1(r) = -\int_0^r E(r)\mathrm{d}r = -\int_0^r \frac{\rho_0 r^4}{4\varepsilon_0 d^3}\mathrm{d}r \quad\Rightarrow\quad \varphi_1(r) = -\frac{\rho_0 r^5}{20\varepsilon_0 d^3}. \qquad (3.5)$$

При цьому на поверхні шару $(r = d)$

$$\varphi(d) = -\frac{\rho_0 d^2}{20\varepsilon_0}. \qquad (3.6)$$

<u>*Зовнішня область*</u> $(r > d)$. Для визначення потенціалу в цій області використовуємо вираз (4), згідно з яким

$$\varphi(d) - \varphi_2(r) = \int_d^r E_2\,\mathrm{d}r \quad\Rightarrow\quad \varphi_2(r) = \varphi(d) - \int_d^r E_2\,\mathrm{d}r.$$

Звідси, підставивши вирази (3.4) і (6.6), отримаємо:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho_0 d}{4\varepsilon_0}\left(r - \frac{4}{5}d\right). \qquad (3.7)$$

Далі слід записати числові формули відповідно до заданих значень параметрів ρ і r та виконати розрахунки. Це робиться, як описано в **Прикладі 1.**