ІНСТИТУТ СПЕЦІАЛЬНОГО ЗВ'ЯЗКУ ТА ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. Ф. Скіцько, О. В. Корнейко О. І. Скіцько

ФІЗИКА

практикум

Частина I

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямами підготовки «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і «Телекомунікації»

Київ
Видавництво Інституту спеціального зв'язку
та захисту інформації НТУУ «КПІ»
2013

УДК 537.8
ББК 22.33
Ф 48

Рецензенти:
Л. П. Гермаш, докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»;
Г. Ф. Конахович, докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри телекомунікаційних систем Інституту аеронавігації Національного авіаційного університету;
С. І. Покутний, докт. фіз.-мат. наук, професор, директор науково-дослідного центру теоретичної та прикладної фізики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова.

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України,
лист № 1/11-4507 від 27.02.2013 р.

Ф 48 Фізика. Практикум. В 2 ч. Частина І. Електромагнетизм: навч. посібник / І. Ф. Скіцько, О. В. Корнейко, О. І. Скіцько. ; за заг. ред. І. Ф. Скіцька – К. : Вид-во ІСЗЗІ НТУУ «КПІ», 2013. – 280 с.

ISBN 000-000-0000-00-0

У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів типового курсу фізики стосовно електромагнетизму, що викладається для майбутніх фахівців у сфері захисту інформації та телекомунікацій, наведені методичні вказівки та приклади розв'язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Посібник призначений для студентів (курсантів), які навчаються у вищих навчальних закладах і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки за напрямами 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і 6.050903 «Телекомунікації».

Посібник може буде корисним для науково-педагогічних працівників, які викладають курс фізики для інших напрямів інженерної підготовки, під час планування та підготовки завдань до практичних занять.

УДК 537.8
ББК 22.33

ISBN 000-000-0000-00-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Знання основ електромагнетизму дуже важливі для оволодіння сучасними принципами побудови та функціонування засобів захисту інформації та телекомунікаційного обладнання. Тому цей розділ загального курсу фізики включений до відповідних модулів освітньо-професійних програм галузевих стандартів вищої освіти щодо підготовки бакалаврів за напрямами 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і 6.050903 «Телекомунікації».

Навчальний посібник призначений для застосування студентами (курсантами), які навчаються у вищих навчальних закладах за цими напрямами підготовки і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки. У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів типового курсу фізики стосовно електромагнетизму, наведені методичні вказівки та приклади розв’язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Навчальний посібник повинен допомогти студентові (курсантові) в самостійному оволодінні методикою розв’язування типових задач в рамках курсу загальної фізики, який вивчається у вищих інженерно-технічних вузах, у підготовці до практичних занять і модульного контролю з цієї навчальної дисципліни.

Друга частина цього начального посібника присвячена відповідним темам щодо основ фізики твердого тіла і фізики напівпровідників.

Створення цього посібника стало можливим завдяки цінним зауваженням, творчим дискусіям і науково-методичній підтримці, які надали авторам викладачі кафедри загальної та теоретичної фізики НТУУ «КПІ», кафедр Інституту спеціального зв’язку та захисту інформації НТУУ «КПІ», дисципліни яких базуються на відповідних розділах курсу фізики.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам посібника докторам технічних наук, професорам Л. П. Гермаш і Г.Ф. Конаховичу та доктору фізико-математичних наук, професору С. І. Покутному, змістовні зауваження і рекомендації яких були враховані під час підготовки книги.

Окрему подяку автори посібника висловлюють співробітнику кафедри загальної та теоретичної фізики НТУУ «КПІ» Войченко Надії Євгеніївні за комп’ютерний набір і оформлення тексту посібника.

ДЕКІЛЬКА ПОРАД ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

1. Перш за все познайомтесь з таблицями додатків, так як розв'язування багатьох задач без них неможливе. Крім того, матеріал, який міститься в таблицях, значно полегшить Вашу роботу і зекономить час.

2. Приступаючи до розв'язування задачі, добре вникніть в її зміст і постановку питання. Вияснiть, чи всі дані, які необхідні для розв'язування задачі, приведені. Дані, яких не вистачає, приведені в таблицях додатків. Якщо дозволяє характер задачі, обов'язково зробіть схематичний рисунок, який пояснює її суть,– це у багатьох випадках різко полегшує як пошук розв'язку, так і самий розв'язок.

3. Кожну задачу розв'язуйте, як правило, в загальному вигляді (тобто в буквенних позначеннях), так щоб величина, яку шукаємо, була виражена через задані величини. Розв'язок в загальному вигляді надає кінцевому результату особливу цінність, так як дозволяє встановити певну закономірність, яка показує, як залежить невідома величина від заданих величин. Крім того, відповідь, яка отримана в загальному виді, дозволяє судити в значній мірі про правильність самого розв'язку (див. наступний пункт).

4. Отримавши розв'язок в загальному вигляді, необхідно перевірити, чи правильну він має розмірність. Неправильна розмірність має явний признак, що розв'язок помилковий. Якщо можливо, то дослідіть поведінку розв'язку при граничних частинних випадках. Наприклад, якщо заряджене тіло має форму диска і розрахована напруженість електричного поля в точці на осі диска, то ця формула напруженості буде правильною, якщо при віддалені цієї точки на нескінченість вона перейде у формулу напруженості для точкового заряду. При наближенні точки до диска, коли відстань точки від диска є значно менша радіуса диска, ця формула повинна перейти у формулу напруженості поля однорідно зарядженої нескінченої площини.

5. Приступаючи до розрахунків, пам'ятайте, що числові значення фізичних величин завжди є наближеними. Тому при розрахунках керуйтесь правилами дій з наближеними числами. В числовому значенні величини, яку розрахували, необхідно зберегти останнім той знак,

одиниця якого ще перевищує похибку цієї величини. Всі наступні цифри необхідно відкинути.

6. Отримавши відповідь у вигляді числового значення, оцініть його правдоподібність. Така оцінка може в ряді випадків виявити помилковість отриманого результату. Так наприклад, сила струму в реальних провідниках не може бути величинами порядку $10^4 \div 10^6$ А, так як допустима густина струму для міді є 7 А/мм^2. Напруженість електричного поля в середовищі (повітрі, склі, слюді та інших) не може бути більшою від пробійного значення напруженості поля в цих середовищах.

1. ЕЛЕКТРОСТАТИЧНЕ ПОЛЕ У ВАКУУМІ

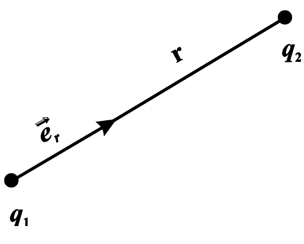
1.1. Питання теми

1. Поле, яке створене системою точкових зарядів.
2. Поле, яке створене системою точкових і неточкових зарядів, що розміщені на тілах правильної геометричної форми.

1.2. Основні визначення та формули

1. Фундаментальним законом електростатичного поля є *закон Кулона*

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r, \tag{1.1}$$



де q_1 і q_2 два точкових заряди, які знаходяться на відстані r один від одного, $\vec{e}_r$ - одиничний вектор, проведений в напрямку від заряду q_1 до заряду q_2, ε_0 = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м електрична стала вакууму. Закон Кулона справедливий для точкових, нерухомих електричних зарядів.

2. Основною характеристикою кожної точки поля є *напруженість* $\vec{E}$ – векторна величина, яка визначається із співвідношення

$$\vec{Å} = \vec{F} / q_{ïð} , \qquad (1.2)$$

де $\vec{F}$ – сила Кулона, що діє на пробний заряд $q_{пр}$ в деякій точці поля, яке створене іншим зарядом q. Якщо $q_{пр} = +1$ Кл, то напруженість поля чисельно дорівнює кулонівській силі.

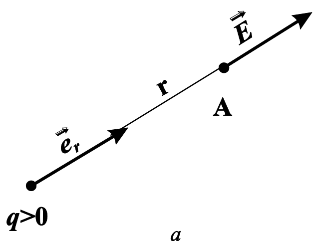
Графічно електричне поле зображується силовими лініями. Силова лінія – це лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з $\vec{E}$, а густота ліній пропорційна модулю $\left|\vec{E}\right|$.

За напрямок силових ліній прийнято напрямок від позитивного заряду до негативного заряду. Тобто вважається, що силові лінії електричного поля починаються на позитивних зарядах і закінчуються на негативних зарядах. Силові лінії між собою не перетинаються.

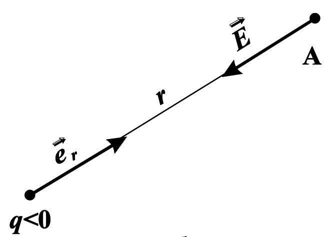
Для точкового заряду q напруженість $\vec{E}$ визначається за формулою:

$$\vec{Å} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r , \qquad (1.3)$$

де одиничний вектор $\vec{e}_r$ бере свій початок в точці знаходження заряду q, r – відстань від заряду q до точки А поля, в якій визначається напруженість $\vec{E}$. Якщо $q > 0$, то вектор $\vec{E}$ направлений по $\vec{e}_r$, якщо $q < 0$, то вектор $\vec{E}$ має протилежний напрямок до $\vec{e}_r$ (див. рис. *а* і *б*).



а



б

3. На взаємодію двох точкових зарядів не впливає наявність поряд інших зарядів. Тому справедливий *принцип суперпозиції* електричних полів: напруженість електричного поля, створеного декількома точковими зарядами, в кожній точці поля дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів кожного заряду:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \,, \tag{1.4}$$

де n – кількість точкових зарядів, $\vec{E}_i$ напруженість поля, яка створена i – тим зарядом q_i.

4. Властивості силових ліній електричного поля (див. п. 2) дають можливість ввести поняття потоку $\Phi_{\vec{E}}$ вектора $\vec{E}$ через поверхню S.

Для однорідного поля ($\vec{E}$ = const) і плоскої поверхні S:

$$\Phi_E = ES\cos\alpha \,, \tag{1.5}$$

або

$$\Phi_E = \vec{E}\vec{n}S = \vec{E}\vec{S} \,, \tag{1.6}$$

де α – кут між вектором $\vec{E}$ і одиничною нормаллю $\vec{n}$ до поверхні S, формально $\vec{S} = S\vec{n}$.

Для неоднорідного електричного поля ($\vec{E} \neq$ const в кожній точці поля) і довільної поверхні S

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E}d\vec{S} \,, \tag{1.7}$$

де $d\vec{S} = \vec{n}dS$, dS – безмежно мала ділянка поверхні S, в межах якої вектор $\vec{E}$ = const, $\vec{n}$ – нормаль до ділянки dS, інтегрування (сумування) малих потоків $d\Phi_E = \vec{E}d\vec{S}$ проводиться по всій поверхні S.

5. Наслідком закону Кулона є теорема Остроградського-Гаусса: потік Φ_E вектора напруженості через будь – яку замкнуту поверхню S, що охоплює заряди $q_1, q_2, ..., q_n$, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділеній на сталу вакууму ε_0 :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i . \tag{1.8}$$

6. Напруженість поля, створеного:

а) безмежною тонкою рівномірно зарядженою площиною

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \tag{1.9}$$

де $\sigma = \Delta q/\Delta S$ – поверхнева густина зарядів, яка чисельно дорівнює заряду одиничної (1 м^2, 1 см^2) площі поверхні. Поле такої площини однорідне;

б) зарядженою сферою, радіус якої R:

1) всередині сфери ($r < R$) $E = 0$;
2) зовні сфери ($r > R$)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1.10}$$

3) близько біля поверхні сфери ($r = R$) $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, де

r - відстань від центра сфери до точки, в якій визначається напруженість поля.

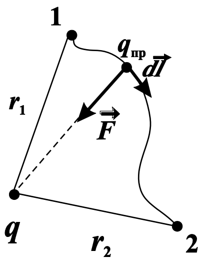
в) нескінченно довгою прямою рівномірно зарядженою ниткою (стержнем, циліндром) на відстані r від нитки, осі стержня, осі циліндра (зовні стержня і циліндра):

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1.11}$$

де $\lambda = \Delta q / \Delta\, l$ – лінійна густина заряду, яка чисельно дорівнює заряду, що припадає на одиницю (1 м, 1 см) довжини нитки (стержня, циліндра).

7. При переміщенні пробного заряду $q_{\text{пр}}$ в електричному полі, яке створене іншим зарядом q, виконується робота

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \frac{qq_{\text{ïð}}}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_{\text{ïð}}}{4\pi\varepsilon_0 r_2}, \tag{1.12}$$



де цифри 1 і 2 позначають початкову і кінцеву точки переміщення заряду $q_{\text{пр}}$, r_1 і r_2 – відстань точок 1 і 2 до заряду q, $d\vec{l}$ – вектор елементарного переміщення. Робота A_{12} не залежить від форми траєкторії руху заряду $q_{\text{пр}}$, а визначається його початковим і кінцевим пунктами. Ця властивість роботи A_{12} дає можливість ввести поняття скалярної характеристики поля – різниці потенціалів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_{\text{ïð}}} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \tag{1.13}$$

З точністю до константи можна ввести поняття потенціалу в точці поля на відстані r від заряду q:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}.$$

Якщо умовно прийняти, що потенціал на безмежності ($r \to \infty$) дорівнює нулеві, то

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1.14}$$

8. Потенціал φ електричного поля в даній точці поля дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, які відповідно створені в цій точці кожним зарядом $q_1, q_2, \ldots, q_n$ окремо (принцип суперпозиції):

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \,. \tag{1.15}$$

Примітка. Точки простору, які мають однаковий потенціал, називаються еквіпотенціальними. Поверхня, на якій знаходяться еквіпотенціальні точки, називається еквіпотенціальною поверхнею. Для точкового заряду такими поверхнями є концентричні сфери, в центрі яких знаходиться заряд.

9. Векторна характеристика електричного поля напруженість $\vec{E}$ і скалярна характеристика цього поля потенціал φ в одній і тій же точці поля зв'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \,, \tag{1.16}$$

де $\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – математичний диференціальний векторний оператор, який носить назву градієнт, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори в напрямках координатних осей X, Y, Z. Проекції вектора $\vec{E}$ на координатні осі X, Y, Z дорівнюють:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{1.17}$$

де $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ – похідні по x, y, z, від потенціалу $\varphi(x, y, z)$.

Проекція вектора $\vec{E}$ на довільний напрямок $\vec{l}$ визначається як:

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \tag{1.18}$$

Примітка. Формула (1.16) означає, що вектор $\vec{E}$ направлений в сторону максимального зменшення потенціалу. Це означає, що силові ліній вектора $\vec{E}$ перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь (ліній на площині) потенціалу $\varphi(x, y, z)$.

10. Якщо електричні заряди розподілені в просторі неперервним чином, то можна ввести поняття об'ємної густини заряду

$$\rho = \Delta q / \Delta V, \tag{1.19}$$

де Δq заряд, що знаходиться в об'ємі ΔV простору. Тобто ρ це заряд, що припадає на одиницю об'єму (1 м^3, 1 см^3) простору. Для такого випадку теорема (1.8) приймає вид рівняння Пуассона:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.20}$$

де $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – математичний диференціальний скалярний оператор, який носить назву дивергенція.

11. Циркуляція вектора напруженості електричного поля є фізична величина, яка чисельно дорівнює роботі по переміщенню одиничного позитивного заряду вздовж замкнутого контуру Γ:

$$\oint_{\tilde{A}} \vec{E} d\vec{l} = \oint_{\tilde{A}} E \cos\alpha dl = \oint_{\tilde{A}} E_l dl, \tag{1.21}$$

де $E_l = E\cos\alpha$ – проекція вектора напруженості $\vec{E}$ в даній точці контуру на напрямок дотичний до контуру в цій же точці. Коло на значку інтеграла означає, що інтеграл вираховується вздовж замкнутого контуру.

У випадку електростатичного поля циркуляція вектора напруженості дорівнює нулю:

$$\oint_{\tilde{A}} \vec{E}d\vec{l} = 0. \qquad (1.22)$$

1.3. Питання на самопідготовку

1. Закон Кулона та його фундаментальність для електростатичного поля.

2. Вектор напруженості електричного поля: визначення та фізичний зміст.

3. Силова лінія електричного поля: визначення, властивості, фізичний зміст.

4. Потік вектора напруженості електричного поля: визначення, фізичний зміст.

5. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля та її зв'язок із законом Кулона.

6. Застосування теореми Остроградського-Гаусса до розрахунку електричного поля: точкового заряду, безмежної однорідно зарядженої площини, безмежно довгої однорідно зарядженої прямої нитки, однорідно зарядженої кулі.

7. Робота по переміщенню заряду в електричному полі: її властивості та методи обчислення.

8. Різниця потенціалів: визначення, фізичний зміст. Потенціал: зміст поняття «безмежності» у визначенні потенціалу.

9. Принцип суперпозиції електричних полів: визначення, відмінність цього принципу для напруженості і для потенціалу.

10. Зв’язок між вектором напруженості $\vec{E}$ і потенціалом поля φ.

11. Взаємне розташування силових ліній вектора $\vec{E}$ і еквіпотенціальних ліній (поверхонь) потенціалу φ електричного поля. Довести цю властивість їхнього взаємного розташування.

12. Рівняння Пуассона: визначення, фізичний зміст, зв’язок із теоремою Остроградського-Гаусса.

13. Циркуляція вектора напруженості поля $\vec{E}$ по замкнутому контуру: визначення, фізичний зміст.

1.4. Методичні вказівки

Задачі даної теми присвячені знаходженню електричного поля (розрахунку напруженості $\vec{E}$ і потенціалу φ) за заданою конфігурацією електричних зарядів. Поля, які розглядаються в задачах, створюються електричними зарядами, що знаходяться на тілах, фізична природа яких не враховується. Розподіл зарядів на таких тілах задається умовою задачі.

Для розрахунку полів використовуються принцип суперпозиції полів (1.4), (1.15) і теорема Остроградського-Гаусса (1.8).

Принцип суперпозиції дозволяє знайти незалежно одне від одного напруженість $\vec{E}$ і потенціал φ. Проте в деяких випадках більш раціональним є шлях, коли спочатку знаходять потенціал, як функцію координат, а потім, використовуючи формули (1.16, 1.17, 1.18) – напруженість поля.

В тих випадках, коли конфігурація зарядів є достатньо симетричною, для знаходження напруженості поля $\vec{E}$ використовують теорему Остроградського-Гаусса. Потенціал і різницю потенціалів розраховують за допомогою формул інтегрального зв’язку напруженості і потенціалу (або різниці потенціалів) (1.13).

1.5. Приклади розв’язування задач

Задача 1.1. В вершинах квадрата зі стороною a розташовані два позитивних і два негативних заряди, величина кожного із яких q. Визначити напруженість і потенціал електричного поля в центрі квадрата.

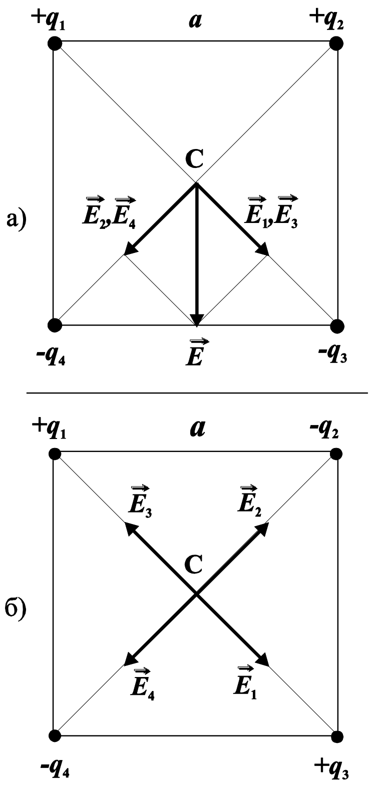


Рис. 1.1

Аналіз. Поле створюють чотири заряди. Точка С, в якій треба знайти напруженість і потенціал поля, рівновіддалена від усіх зарядів і лежить з ними в одній площині, тобто знаходиться в особливих умовах по відношенню до джерел поля. Тому і напруженість і потенціал визначають незалежно один від одного за допомогою принципу суперпозиції (1.4) і (1.15):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 ,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 .$$

При розрахунку потенціалу (скалярна величина) знаки зарядів враховуються автоматично і тому значення результуючого потенціалу не залежить від порядку розташування позитивних і негативних зарядів в вершинах квадрата. Щоб розрахувати напруженість (векторна величина), необхідно спочатку на рисунку показати напрямки всіх векторів $\vec{E}_i$, які залежать від знака заряду q_i. Очевидно вектор напруженості $\vec{E}$ залежить від порядку розташування зарядів в вершинах квадратів.

Розв'язок. Відстань r від кожного заряду до центра квадрата C буде:

$$r = a\sqrt{2}/2.$$

Потенціал, який створюється зарядом q_i в точці C за формулою (1.14), буде

$$\varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Тоді за формулою (1.15)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{i=1}^{n} q_i = 0,$$

Розглянемо розташування зарядів, яке показане на рис. 1.1 (а). Напруженості полів, які створюються в точці C кожним зарядом згідно (1.3), є однакові за величиною, тобто

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = \frac{|q_i|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Напруженості $\vec{E}_2$ і $\vec{E}_4$ полів, які створюються зарядами q_2 і q_4 в точці C, мають однаковий напрямок. Аналогічно, $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$. Напруженість результуючого поля згідно (1.4)

$$\vec{E} = 2\vec{E}_1 + 2\vec{E}_2.$$

Так як кут між векторами $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ прямий (дорівнює 90^0), то

$$E = \sqrt{(2E_1)^2 + (2E_2)^2} = 2\sqrt{2}E_1 = \frac{2\sqrt{2}|q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sqrt{2}|q_1|}{\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

При розташуванні зарядів, як показано на рис. 1.1(б), в точці C $E = 0$.

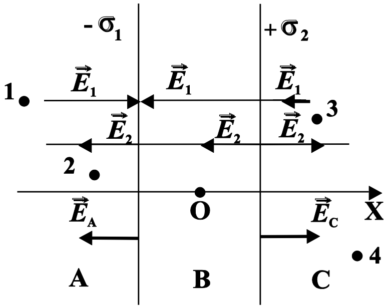


Рис. 1.2

Задача 1.2. Дві паралельні безмежні площини заряджені однорідно і різнойменно з різними за модулем густинами $-\sigma_1$ і $+\sigma_2$. Абсциси вказаних на рисунку точок дорівнюють: $x_1 = -0{,}3$ м, $x_2 = -0{,}1$ м, $x_3 = +0{,}3$ м, $x_4 = +0{,}4$ м. Різниця потенціалів між точками 3 і 4 дорівнює: $\varphi_3 - \varphi_4 = 10$ В. Визначити:

а) Яка із густин ($-\sigma_1$ чи $+\sigma_2$) більша за модулем?

б) Різницю потенціалів між точками 1 і 2 $\varphi_1 - \varphi_2$.

Розв'язок. а) В даній задачі однорідне електричне поле створене зарядженими площинами. Згідно формули (1.9) модулі напруженостей полів, створених площинами дорівнюють: $E_1 = |\sigma_1|/(2\varepsilon_0)$, а $E_2 = |\sigma_2|/(2\varepsilon_0)$ відповідно. Напрямки векторів $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ показані на рис. 1.2. Результуюча напруженість поля для області А буде $E_А = \left|\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right|$, а для області С – $E_с = \left|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right|$. Таким чином за величиною $\left|\vec{E}_А\right| = \left|\vec{E}_С\right|$. Згідно умови задачі $\varphi_3 > \varphi_4$. Так як напруженість поля має напрямок в сторону зменшення потенціалу, то вектор $\vec{E}_С = \vec{E}_2 + \vec{E}_1$, направлений по осі ОХ. Це може бути в тому випадку, коли $\left|\vec{E}_2\right| > \left|\vec{E}_1\right|$, або $|\sigma_2| > |\sigma_1|$.

б) Згідно формули (1.17) для однорідного поля можемо записати, що

$$\left|\vec{E}_С\right| = \frac{|\varphi_3 - \varphi_4|}{|x_3 - x_4|}, \text{ а } \left|\vec{E}_А\right| = \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{|x_1 - x_2|}.$$

Так як $\left|\vec{E}_С\right| = \left|\vec{E}_А\right|$, то $|\varphi_1 - \varphi_2| = |\varphi_3 - \varphi_4| \cdot \dfrac{|x_1 - x_2|}{|x_3 - x_4|}$.

Після підстановки числових значень отримаємо, що

$$\left|\varphi_1 - \varphi_2\right| = 10 \cdot \frac{\left|-3+1\right|}{\left|3-4\right|} = 20\ \hat{\text{A}}.$$

Так як $\vec{E}_{\text{A}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, а $\left|\vec{E}_2\right| > \left|\vec{E}_1\right|$, то вектор $\vec{E}_{\text{A}}$ буде направлений в протилежному напрямку до осі OX, тобто від точки 2 до точки 1. Значить потенціал точки 1 є меншим за потенціал точки 2. Тому $\varphi_1 - \varphi_2 = -20$ В.

Задача 1.3. Розрахувати напруженість електричного поля прямої, конкретної довжини, рівномірно зарядженої нитки (стержня, прямої антени) з лінійного густиною заряду λ в точках віддалених від нитки на відстань r.

Аналіз. Електростатичне поле створюється зарядом, розподіленим по нитці. Конфігурація зарядів не дозволяє встановити точне розташування силових ліній в просторі і використати (1.8), тому для визначення характеристик поля необхідно використати принцип суперпозиції (1.4).

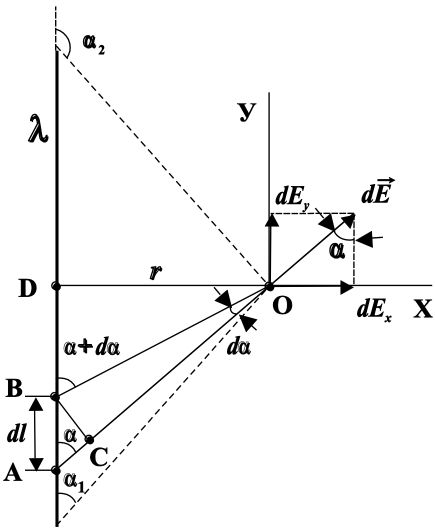


Рис. 1.3

Розв'язок. Розділимо нитку на досить малі елементи $\text{AB} = dl$, щоб заряд $dq = \lambda dl$, який знаходиться на такому елементі, можна було вважати точковим (рис. 1.3). В точці O елементарна напруженість поля такого заряду за (1.3), буде

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \text{AO}^2}.$$

Позначимо кут BAO через α, кут BOA – $d\alpha$. Із трикутника ADO знаходимо, що AO = $r/\sin\alpha$. Із трикутника ABC знаходимо, що BC = $dl\sin\alpha$, а із трикутника BOC знаходимо, що

$$\text{BC} \approx \text{AO}\cdot d\alpha = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тому елемент нитки

$$dl = \frac{\text{BC}}{\sin\alpha} = \frac{rd\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Тоді елементарна напруженість в точці O запишеться, як

$$dE = \frac{\lambda d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Проекції вектора $d\vec{E}$ на осі OX і OY будуть

$$dE_x = \frac{\lambda\sin\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{ і } dE_y = \frac{\lambda\cos\alpha d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Звідси після інтегрування (сумування) отримаємо:

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \tag{1}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right). \tag{2}$$

Із формул (1) і (2) легко отримати формулу для напруженості поля нескінченно довгої прямої нитки. Дійсно, якщо $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$, то

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,, \tag{3}$$

а E_y = 0.

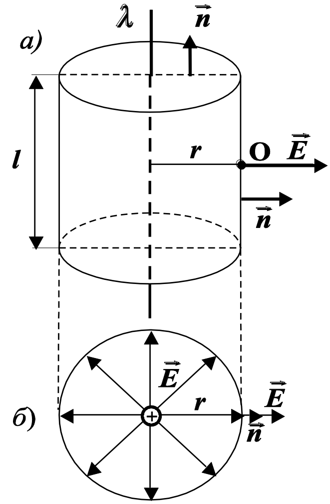


Рис. 1.4

Отримаємо формулу (3) за допомогою теореми Остроградського-Гауса (1.8). В силу симетрії поля вектор напруженості в любій точці простору перпендикулярний циліндричній поверхні, яка проходить через точку О циліндра, віссю якого є нитка (рис. 1.4 (а) і (б)). Тому за замкнуту поверхню S, візьмемо поверхню циліндра, висота якого l, а радіус основи r. Потік вектора $\vec{E}$ через площу основи дорівнює нулеві, тому що вектор $\vec{E}$ перпендикулярний до нормалі $\vec{n}$ основи циліндра і

$$\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS = 0\,.$$

Потік вектора $\vec{E}$ через бічну поверхню за формулою (1.7) буде:

$$\Phi_E = \int\limits_{S_{\text{á³÷íà}}} \vec{E}d\vec{S} = \int\limits_{S_{\text{бічна}}} \vec{E}\vec{n}dS = \int\limits_{S_{\text{бічна}}} EdS = E\int\limits_{S_{\text{бічна}}} dS = ES_{\text{á³÷íà}} = 2\pi rlE\,.$$

Електричний заряд, що міститься всередині циліндричної поверхні буде:

$$\sum q = \lambda l\,.$$

За теоремою Остроградського-Гаусса (1.8) отримаємо, що

$$2\pi rlE = \lambda l / \varepsilon_0\,.$$

Звідки

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Висновки. 1. На перший погляд використання принципу суперпозиції для розрахунку напруженості поля є більш трудомістким, ніж використання теореми Остроградського-Гаусса. Але методи розрахунку характеристик поля з використанням принципу суперпозиції є універсальними і можуть застосовуватись практично і в тих випадках, коли застосувати теорему Остроградського-Гаусса не можливо.

2. Характер електричного поля зарядженої нитки дає можливість розрахувати різницю потенціалів двох точок поля, що знаходяться на відстані r_1 і r_2 від нитки. За формулою (1.18) отримаємо, що

$$d\varphi = -E(r)dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

для нескінченно довгої прямої нитки. Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1},$$

або

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}. \qquad (4)$$

Формула (4) справедлива для всіх випадків, крім $r = 0$ і $r = \infty$.

3. Отримавши формули (1), (2), (3) для напруженостей полів відрізка нитки і нескінченно довгої нитки, можемо тепер розраховувати поля, які створені різними комбінаціями рівномірно заряджених відрізків, нескінченно і напівнескінченно довгих ниток (поле « трикутника», «квадрата», «кута» і т. п.).

Задача 1.4. Тонкий стержень, довжина якого l = 10 см рівномірно заряджений зарядом q = 445 пКл. Знайти напруженість і потенціал поля в точці С, яка лежить на осі стержня. Відстань від середини стержня до точки C x_0 = 30 см. Визначити, при якому найменшому значенні x_0/l напруженість можна розраховувати за формулою (1.3) точкового заряду, щоб відносна похибка не перевищувала 3%.

Аналіз. Електростатичне поле створене зарядом, який розподілений по тонкому стержню. Тому використаємо принцип суперпозиції. Розіб'ємо стержень на елементарні ділянки

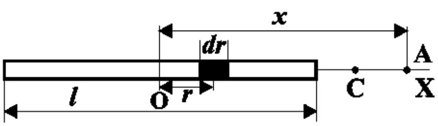


Рис. 1.5

довжиною dr з зарядом $dq = \lambda dr = \frac{q}{l} dr$. Кожну таку ділянку можна прийняти за точковий заряд, який створює в точці A за формулою 1.14 потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (x-r)} = \frac{q dr}{4\pi\varepsilon_0 l (x-r)}.$$

Внаслідок симетрії очевидно, що в точках, які лежать на осі OX, вектор $\vec{E}$ направлений вздовж цієї ж осі, тому

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx};\ E_y = 0,\ E_z = 0.$$

Розв'язок. Потенціал в точці A знайдемо, використавши принцип суперпозиції (1.15), тобто

$$\varphi = \int_{-l/2}^{l/2} d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dr}{x-r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{d(x-r)}{x-r} =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln(x-r)\Big|_{-l/2}^{l/2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} (\ln(x-\frac{l}{2}) - \ln(x+\frac{l}{2})) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln((x+\frac{l}{2})/(x-\frac{l}{2})).$$

Таким чином

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln((x + \frac{l}{2})/(x - \frac{l}{2})). \qquad (1)$$

Для точки C, коли $x = x_0 = 30\,\text{ñì}$, отримаємо:

$$\varphi(\tilde{o}_0) = \frac{445^{\cdot}\ 10^{-12}}{4\pi^{\cdot} 8{,}8510^{-12}10^{-1}} \ \ln\frac{30+5}{30-5}\ \text{В} = 13{,}46\ \text{В}.$$

Напруженість поля в точці A отримаємо, продиференціювавши формулу (1) по змінній x.

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{x - \frac{l}{2}} - \frac{1}{x + \frac{l}{2}}\right). \qquad (2)$$

Зауваження. Формули (1) і (2) справедливі тільки для $|x| > l/2$. Напруженість поля в точці C $(x = x_0)$

$$E = \frac{445^{\cdot}10^{-12}}{4\pi^{\cdot} 8{,}85^{\cdot}10^{-12\cdot}0{,}1}\left(\frac{1}{0{,}25} - \frac{1}{0{,}35}\right)\ \text{В/ì} = 45{,}7\ \text{В/ì}\ ,$$

причому вектор $\vec{E}$ направлений по осі OX.

Щоб відповісти на друге питання задачі, будемо вважати, що весь заряд стержня є точковий і розмістимо його в точці O. Тоді приблизна формула для розрахунку напруженості поля в точці A запишеться, як

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}. \qquad (3)$$

Формулу (2) перепишемо, спростивши вираз у скобках:

$$\frac{1}{x-\frac{l}{2}}-\frac{1}{x+\frac{l}{2}}=\frac{l}{x^2-\frac{l^2}{4}}=\frac{l}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{l^2}{4x^2}}\right)$$

$$=\frac{l}{x^2}\left(1-\frac{l^2}{4x^2}\right)^{-1}\approx\frac{l}{x^2}\left(1+\frac{l^2}{4x^2}\right),$$

де $\frac{l^2}{4x^2} << 1$

Тобто формула (2) напруженості поля в точці A запишеться так:

$$E_x \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(1+\frac{l^2}{4x^2}\right). \qquad (4)$$

Тоді відносна похибка заміни формули (4) на формулу (3) буде:

$$\delta=\frac{\left|E_x-E_x'\right|}{E_x}=\left|1-\frac{E_x'}{E_x}\right|=\left|1-\frac{1}{1+\frac{l^2}{4x^2}}\right|=$$

$$=\left|1-\left(1+\frac{l^2}{4x^2}\right)^{-1}\right|\cong\left|1-1+\frac{l^2}{4x^2}\right|=\frac{l^2}{4x^2}\le 0{,}03.$$

Звідки знаходимо, що

$$\frac{x}{l}\ge\sqrt{\frac{1}{0{,}12}}\approx 2{,}9\text{, тобто } x\ge 29 \text{ ñì.}$$

Висновок. Для точок на осі X, які віддалені від центра стержня на відстань більшу 29 см, можна для розрахунку напруженості поля використовувати формулу (3) для точкового заряду і при цьому відносна похибка такого розрахунку буде менша 3 %.

Задача 1.5. Напівколо, радіус якого $R = 1$ м, рівномірно заряджене зарядом q = 1,78 нКл. Визначити напруженість і потенціал електричного поля, що створюється цим зарядом, в геометричному центрі напівкола.

Аналіз. Фізична система складається з двох об’єктів: рівномірно зарядженого зарядом q напівкола і електричного поля цього заряду. Напруженість поля невідома. Заряд q, який знаходиться на півколі, є не точковим, тому що він знаходиться на тілі, розміри якого πR одного порядку з відстанню R, що розглядається в даній задачі. Тому неправильним був би розв’язок

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 16 \text{ Â/ì} \ . \qquad (1)$$

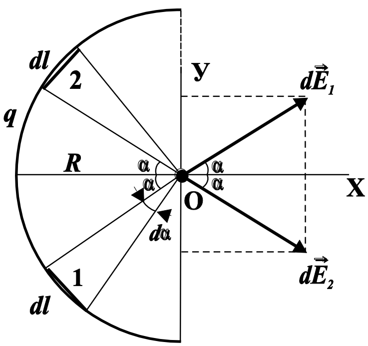


Рис. 1.6

Теорема Остроградського-Гаусса приведе в даному випадку до дуже складних обчислень. Тому, як і в попередніх задачах застосуємо принцип суперпозиції електричних полів.

Розв’язок. Розділимо напівколо на дуже малі дуги dl, щоб заряд $dq = qdl/(\pi R)$ кожної такої елементарної дуги був точковим. Розглянемо один такий точковий заряд 1 (рис.1.6). Він в точці O створює електричне поле, вектор напруженості $d\vec{E}_1$ якого в точці O складає кут α з віссю OX. Очевидно, що любому елементарному заряду 1 в нижній напівплощині знайдеться симетрично розташований елементарний заряд 2 у верхній напівплощині. Геометрична сума векторів $d\vec{E}_1$ і $d\vec{E}_2$ є вектор, направлений вздовж осі OX. Значить при сумуванні необхідно враховувати тільки проекції елементарних векторів $d\vec{E}$ на вісь OX:

$$dE_x = dE_1 \cos\alpha = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\alpha = \frac{q\cos\alpha \cdot dl}{4\pi^2\varepsilon_0 R^3}.$$

Перший етап (знаходження диференціалу невідомої величини) закінчений.

Виконаємо другий етап (інтегрування, сумування). Необхідно вибрати змінну інтегрування. Положення точкового заряду на напівколі визначається кутом α. Тому кут α і виберемо за змінну інтегрування. Довжина дуги $dl = Rd\alpha$, тоді

$$dE_x = \frac{q\cos\alpha \cdot d\alpha}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}.$$

Інтегруючи це співвідношення по куту α, отримаємо

$$E = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\alpha d\alpha = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}\sin\alpha\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень знаходимо

$$E = \frac{1{,}78 \cdot 10^{-9}}{2\pi^2 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} = 10{,}2\ \text{Â/ì}\ . \qquad (3)$$

Правильний розв’язок (2) і (3) значно відрізняється від неправильного розв’язку (1). Якщо перетворить формулу (2), врахувавши, що $\lambda = q/(\pi R)$ – лінійна густина заряду, то отримаємо формулу

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R},$$

яка співпадає з формулою (1.11) при $r = R$ для напруженості поля прямої нескінченно довгої рівномірно зарядженої нитки.

Для знаходження потенціалу використаємо формулу (1.14) і принцип суперпозиції (1.15). Точковий заряд dq, що знаходиться на дузі $dl,$ в точці О створює потенціал

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Оскільки потенціал є скалярна величина, то його значення в точці О буде

$$\varphi = \int_0^q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^q dq = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1{,}78\cdot 10^{-9}}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1}\text{ В} = 16\text{ В}.$$

Самостійно пропонується доказати, що напруженість електричного поля, яке створюється рівномірно зарядженим колом, в його геометричному центрі О дорівнює нулеві, а значення потенціалу не зміниться, якщо заряд напівкола і кола однаковий.

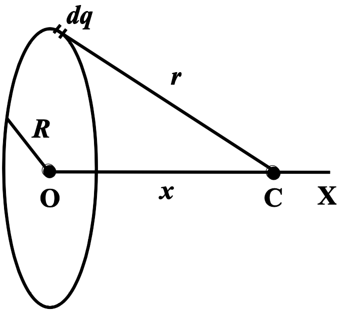


Рис. 1.7

Задача 1.6. Позитивний заряд q =3,56 нКл рівномірно розподілений по тонкому кільцю, радіус якого R =0,5м.

а) Визначити напруженість і потенціал поля в точці С, яка лежить на осі кільця на відстані $(x_0 = 1\text{ì})$ від його центру О.

б) Розглянути випадок, коли $|x| >> R$ і $|x| << R$.

в) Визначити максимальне значення модуля напруженості $E_{\max}$ і координати точок, в яких воно спостерігається.

г) Побудувати приблизні графіки $\varphi(x)$ і $E_x(x)$.

Аналіз. Поле створене зарядом, який розподілений по тонкому кільцю заданого радіусу. Поле не має достатньої симетрії (не можливо вказати точну конфігурацію силових ліній), тому для розрахунку поля використаємо принцип суперпозиції. Розіб'ємо кільце на елементарні ділянки, заряд яких dq є точковим. Цей заряд в точці С згідно (1.14) створює потенціал:

$$d\varphi = dq/(4\pi\varepsilon_0 r)\,. \qquad (1)$$

Розв'язок. а) Потенціал результуючого поля отримаємо, інтегруючи вираз (1) і враховуючи, що $r = \sqrt{R^2 + x^2}$.

$$\varphi = \int\limits_{(q)} d\varphi = \int\limits_{(q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}\,. \qquad (2)$$

При переході від одного елемента кільця до іншого $\sqrt{R^2 + x^2}$ не змінюється. Тоді вираз (2) можна записати:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}} \int\limits_{(q)} dq\,.$$

Очевидно, що $\int\limits_{(q)} dq = q$ незалежно від розподілу заряду. Значить як і для рівномірного розподілу заряду по кільцю, так і в любому іншому випадку, в точках, які лежать на осі кільця, потенціал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}\,. \qquad (3)$$

Значення потенціалу для точки С $(x = x_0)$ буде

$$\varphi = \frac{3{,}56 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} (0{,}25 + 1)^{1/2}} \text{ В} = 28{,}6 \text{ В.}$$

Проекцію вектора напруженості поля $\vec{E}$ на вісь OX отримаємо, використавши формулу (1.17):

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}\,. \tag{4}$$

Після підстановки числових значень знаходимо, що

$$E_x = \frac{3{,}56\cdot 10^{-9} 1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}(0{,}25+1)^{3/2}} \text{ В/ì } = 22{,}9 \text{ Â/ì}\,.$$

б) Якщо $x >> R$, то вираз $\frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{|x|}$, а вираз $\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{x^2}.\frac{x}{|x|}$ і тоді формули (3) і (4) приймають вид формул для точкового заряду:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |x|}; \qquad E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}.\frac{x}{|x|}.$$

Якщо $|x| << R$, то вираз $\frac{1}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{R}$, а вираз

$$\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \approx \frac{x}{R^3}(1 + .\frac{x^2}{R^2})^{-3/2} \approx \frac{x}{R^3}(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{R^2}).$$

Тоді потенціал визначається за формулою

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

яка співпадає із формулою для потенціалу в попередній задачі.

Напруженість поля близько до точці O $(x << R)$ визначиться за формулою:

$$E_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(1 - \frac{3}{2}.\frac{x^2}{R^2}\right).$$

Якщо $x = 0$ (точка O), то $E_x = 0$, що теж співпадає із висновками попередньої задачі.

в) Функція $\varphi(x)$ формула (3) має екстремальне значення при $x = 0$ і потенціал поля в цій точці

$$\varphi(0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Координати точок x_m, де E_x приймає максимальне значення, знайдемо, продиференціювавши формулу (4) по x і прирівнявши похідну до нуля:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\right) = \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - x\cdot\frac{3}{2}(R^2 + x^2)^{1/2}\,2x}{(R^2 + x^2)^3} = 0.$$

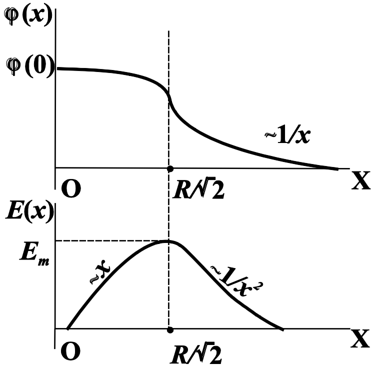
З цього рівняння знаходимо, що

$$2x^2 = R^2 \text{ і } |x_m| = \frac{R}{\sqrt{2}} = 35{,}36 \text{ ñì}.$$

Підставивши це значення x_m у формулу (4) отримаємо максимальне значення напруженості поля:

$$E_m = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{3{,}56\cdot 10^{-9}}{6\sqrt{3}\pi 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 0{,}25} \text{ Â/ì} = 49{,}3 \text{ Â/ì}.$$

г) Приблизні графіки залежності: $\varphi(x)$ та $E_x(x)$ для $x > 0$ такі:



Точка $x_m = R/\sqrt{2}$ є точкою перегину.

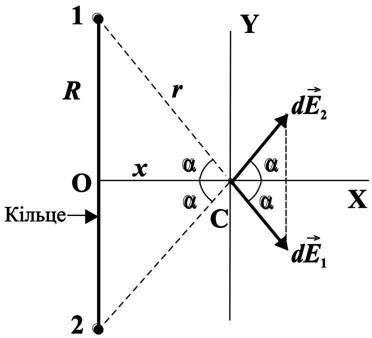


Рис. 1.8

Зауваження. Формулу (4) можна отримати і іншим способом: виходячи із виразу для напруженості поля точкового заряду (1.3) і принципу суперпозиції полів (1.4). Для любого точкового заряду dq

$$\left|d\vec{E}_1\right| = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

Двом діаметрально протилежним точковим зарядам 1 і 2 відповідають вектори поля $d\vec{E}_1$ і $d\vec{E}_2$. Геометрична сума цих векторів направлена вздовж осі OX (рис. 1.8). Значить при сумуванні всіх векторів $d\vec{E}$ необхідно враховувати тільки їхні проекції на вісь OX:

$$E_x = \int\limits_{(q)} dE_1 \cos\alpha = \int\limits_{(q)} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r} = \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int\limits_{(q)} dq = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,.$$

Підставивши в останню формулу замість $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, отримаємо формулу (4) цієї задачі.

Задача 1.7. По круглій тонкій пластинці, радіус якої R = 20 см, рівномірно розподілений заряд q = 0,8 нКл. Вісь пластинки, яка перпендикулярна до її площини, прийняти за вісь OX (рис. 1.9).

а) знайти потенціал φ і напруженість E_x поля для точок, які лежать на осі, як функцію x;

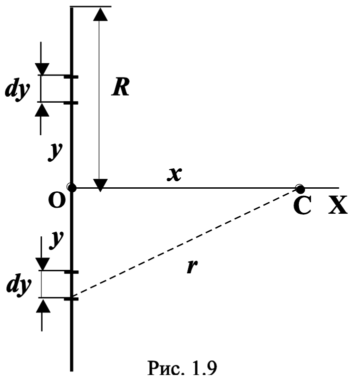


Рис. 1.9

б) дослідити отримані залежності $\varphi(x)$ і $E_x(x)$ для випадку $|x| >> R$;

в) розрахувати φ і E_x в точці x = 0,2 м.

Аналіз. Поле створене зарядом, який розподілений по площині. Таке поле не має достатньої симетрії (не можливо точно вказати конфігурацію силових ліній), тому для знаходження потенціалу поля в точці C скористаємось принципом суперпозиції.

Розіб'ємо пластину на тонкі концентричні кільця, центри яких знаходяться в точці O. Нехай радіус кільця y, а товщина dy. Тоді площа такого кільця $dS = 2\pi y \cdot dy$. Так як заряд q розподілений по пластинці рівномірно, то поверхнева густина заряду $\sigma = q/(\pi R^2)$. Тоді кільце містить заряд

$$dq = \sigma dS = \frac{2qydy}{R^2}.$$

Розв'язок. а) Скористаємось формулою (3) задачі (1.6). Тоді потенціал, який створюється кільцем в точці C буде:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (y^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \cdot \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}} . \qquad (1)$$

Потенціал результуючого поля від усіх кілець отримаємо, інтегруючи вираз (1):

$$\varphi(x) = \int_0^R d\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}}.$$

Розрахунок інтегралу:

$$\int_0^R \frac{ydy}{(y^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{d(y^2 + x^2)}{(y^2 + x^2)^{1/2}} =$$

$$= (y^2 + x^2)^{1/2} \Big|_0^R = (R^2 + x^2)^{1/2} - |x|.$$

Таким чином

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} ((R^2 + x^2)^{1/2} - |x|). \qquad (2)$$

Скориставшись співвідношенням (1.17) знаходимо:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) . \qquad (3)$$

б) Для випадку $|x| >> R$ у формулі (2) вираз:

$$(R^2 + x^2)^{1/2} - |x| = (x^2 (1 + \frac{R^2}{x^2}))^{1/2} - |x| = |x|(1 + \frac{R^2}{x^2})^{1/2} - |x| =$$

$$= |x|(1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} - 1) = \frac{1}{2}\frac{|x| R^2}{x^2}.$$

Тоді (2) приймає вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}|x| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |x|}\,. \qquad (4)$$

Для випадку $|x| >> R$ у формулі (3) вираз

$$\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{x}{|x|} - \frac{x}{|x|(1 + \frac{R^2}{x^2})^{1/2}} =$$

$$= \frac{x}{|x|}\left(1 - (1 + \frac{R^2}{x^2})^{-1/2}\right) = \frac{x}{|x|}(1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2}) \quad = \frac{1}{2}\frac{xR^2}{|x|x^2}.$$

Тоді формула (3) для напруженості поля приймає вигляд:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cdot\frac{x}{|x|}\,. \qquad (5)$$

Формули (4) і (5) представляють вирази для потенціалу і напруженості поля точкового заряду.

в) Підставивши числові значення x і R у формули (2) і (3) отримаємо для випадку $x = R = 0{,}2$ м:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}(\sqrt{2}R - R) = \frac{(\sqrt{2} - 1)q}{2\pi\varepsilon_0 R} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2} - 1)8\cdot10^{-10}}{2\pi 8{,}85\cdot10^{-12}0{,}2}\ \text{В} = 30\ \text{В}.$$

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}.(1 - \frac{R}{R\sqrt{2}}) = \frac{(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot 8\cdot10^{-10}}{2\pi\cdot 8{,}85\cdot10^{-12}4\cdot10^{-2}}\ \text{Â/ì} = 105\ \text{Â/ì}\,.$$

Задача 1.8. Напівсфера рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду $\sigma = 354$ ïÊë/ì ^{2}. Радіус напівсфери $R =$ 0,5 м. Визначити напруженість та потенціал електричного поля в центрі напівсфери.

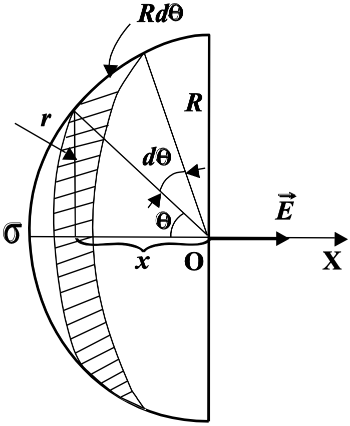


Рис. 1.10

Розв'язок. Використаємо принцип суперпозиції для розрахунку характеристик поля в точці O. Для цього розіб'ємо напівсферу на вузькі кільця, як показано на рисунку (1.10). Радіус кільця $r = R\sin\theta$. Ширина кільця $Rd\theta$. Площа кільця $dS = 2\pi R^2 \sin\theta \cdot d\theta$. Заряд кільця $dq = \sigma dS$. Відстань від центра кільця до точки O $x = R\cos\theta$. Тоді напруженість поля кільця в точці O згідно формули (4) задачі (1.6) буде:

$$dE_x = \frac{dqx}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma R^3 \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (R^2\sin^2\theta + R^2\cos\theta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta d(\sin\theta).$$

Інтегруючі це співвідношення по θ в межах від $\theta_1 = 0$ (найбільш віддалене від точки O кільце) до $\theta = \pi/2$ (найближче кільце до точки O), знаходимо:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta d(\sin\theta) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} = \frac{354 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \text{ Â/ì } = 10 \text{ В/м}.$$

Зауважимо, що напруженість електричного поля в центрі напівсфери не залежить від радіуса R напівсфери.

Для розрахунку потенціалу використаємо формулу (3) задачі (1.6). Згідно цієї формули потенціал в точці O, що створюється тонким кільцем буде:

$$d\varphi = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{2\pi\sigma R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 \sin^2\theta + R^2\cos^2\theta)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \sin\theta d\theta.$$

Інтегруючи це співвідношення, отримаємо:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = \frac{354 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}5}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \text{ В} = 10 \text{ В}.$$

Задача 1.9. У вакуумі є скупчення зарядів у формі довгого циліндра, радіус якого R_0 = 4 см. Об'ємна густина заряду ρ постійна і дорівнює 0,2 мкКл/м^3 (рис. 1.11). Знайти напруженість електричного поля в точках 1 і 2, які знаходяться на відстанях r_1 = 2 см, r_2 = 5 см від осі циліндра, і різницю потенціалів між цими точками.

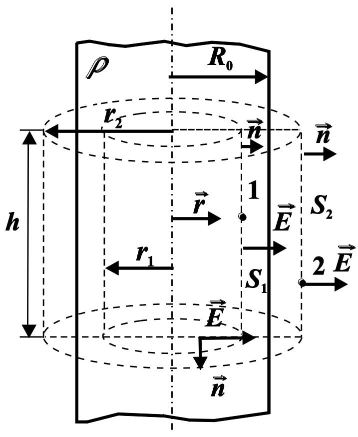


Рис. 1.11

Аналіз. Поле створене зарядом, який рівномірно розподілений по об'єму. Конфігурація зарядів дає підстави вважати, що поле має осьову симетрію: силові лінії – прямі і в любій площині, яка перпендикулярна до осі циліндра, радіальні. Очевидно, що біля кінців циліндра і при дуже великих значеннях r силові лінії не будуть радіальні. Така симетрія поля дозволяє шукати напруженість поля за допомогою теореми Остроградського-Гаусса (1.8). Допоміжній поверхні слід надати форму циліндричної поверхні, яка коаксіальна зарядовому циліндру. Довжина цього циліндра може бути довільною, але наперед набагато меншою , ніж довжина зарядженого циліндра, бо в противному випадку припущення про плоскорадіальну структуру поля буде несправедливим.

Різницю потенціалів знайдемо із (1.18), а саме:

$$d\varphi = -\vec{E}d\vec{l} = -E_r dr \quad \text{і} \quad \int_1^2 d\varphi = -\int_1^2 E_r dr .$$

Тоді

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 E_r dr . \qquad (1)$$

Розв'язок. Проведемо дві допоміжні циліндричні поверхні S_1 і S_2 з радіусами основ r_1 і r_2 $(r_1 < R_0, r_2 > R_0)$. Бічна поверхня допоміжного циліндра і його торці знаходяться наперед в різних умовах відносно силових ліній поля. Для всіх точок торця нормаль $\vec{n}$ є перпендикулярною до вектора $\vec{E}$ і тому $\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS = 0$. Це означає, що потік вектора напруженості через торцеві поверхні дорівнює нулеві. На бічних поверхнях S_1 і S_2 нормаль $\vec{n}$ співпадає з напрямком вектора $\vec{E}$ і радіус-вектора $\vec{r}$, тому $\vec{E}d\vec{S} = \vec{E}\vec{n}dS = E_r dS$. Це дає можливість ліву частину формули (1.8) записати так:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{\text{á³÷íà}}} \vec{E}\vec{n}dS = \int_{S_{\text{á³÷íà}}} E_r dS .$$

Всі точки бічної поверхні знаходяться в однакових умовах відносно заряду, що дозволяє вважати E_r сталою величиною для всіх точок бічної поверхні циліндра, радіус якої r.

Тоді

$$\int\limits_{S_{á³÷íà}} E_r dS = E_r \int\limits_{S_{á³÷íà}} dS = 2\pi r h E_r \, , \qquad (2)$$

де h – висота допоміжного циліндра.

Сума зарядів, яка охоплюється допоміжною поверхнею і входить в праву частину (1.18), залежить від радіуса циліндра. Коли $r < R_0$, то

$$\sum q = \pi r^2 h \rho \, , \qquad (3)$$

а коли $r > R_0$, то

$$\sum q = \pi R_0{}^2 h \rho \, . \qquad (4)$$

Для випадку $r < R_0$, теорема Остроградського-Гауса (1.18) запишеться із врахуванням (2) і (3) :

$$2\pi r h E_r = \pi r^2 h \rho / \varepsilon_0 \, .$$

Звідки знайдемо

$$E_r = \rho r / (2\varepsilon_0) \, . \qquad (5)$$

Для випадку $r > R_0$ (2) і (4) підставляємо в (1.18) і отримуємо, що

$$2\pi r h E_r = \pi R_0{}^2 h \rho / \varepsilon_0 \, .$$

Звідки

$$E_r = \rho R_0{}^2 / (2\varepsilon_0 r) \, . \qquad (6)$$

Підставляємо в (5) $r = r_1 = 0{,}02$ ì , а в (6) $r_2 = 0{,}05$ м і знаходимо що:

$$E_1 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \text{ В/ì } = 226 \text{ В/ì } ,$$

а

$$E_2 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}(4 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \text{ В/м} = 361 \text{ В/м} .$$

Для знаходження різниці потенціалів між точками 1 і 2 за допомогою рівності (1) необхідно врахувати, що E_r змінюється за різними законами для випадків $r < R_0$ і $r > R_0$. Тому інтеграл (1) розіб'ємо на два: в межах від точки 1 до поверхні, яка обмежує об'ємний заряд, і від цієї поверхні до точки 2:

$$\int_1^2 E_r dr = \int_1^{R_0} E_r dr + \int_{R_0}^2 E_r dr .$$

В перший інтеграл замість E_r підставляємо вираз (5), а в другий – вираз (6). Тоді

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\int_{r_1}^{R_0} r dr + R_0^2 \int_{R_0}^{r_2} \frac{dr}{r}\right) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_{r_1}^{R_0} + R_0^2 \ln r\Big|_{R_0}^{r_2}\right) =$$

$$= \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{r_1^2}{2} + R_0^2 \ln\frac{r_2}{R_0}\right) = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{(4 \cdot 10^{-2})^2}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{(2.10^{-2})^2}{2} + (4 \cdot 10^{-2})^2 \cdot \ln\frac{5}{4}\right) \text{ В} = 10{,}8 \text{ В}.$$

Задача 1.10. Потенціал деякого електричного поля має вигляд

$$\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2 ,$$

де a = 2 В/м^2, b = –1 В/м^2. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості поля в точці з координати x = 1 м, y = 2 м, z =3 м.

Розв'язок. Використаємо формули (1.16) і (1.17), які зв'язують потенціал φ з вектором напруженості $\vec{E}$. За допомогою цих формул знаходимо, що проекції вектора $\vec{E}$ дорівнюють:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2ax, E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay, E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -2bz.$$

Сам вектор напруженості

$$\vec{E} = -2a(x\vec{i} + y\vec{j}) - 2bz\vec{k},$$

а його модуль

$$\left|\vec{E}\right| = \sqrt{E_x^{\,2} + E_y^{\,2} + E_z^{\,2}} = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2 z^2}.$$

Підставивши числові значення знаходимо,

$$\left|\vec{E}\right| = 2\sqrt{4(1+4)+9} = 2\sqrt{29} \text{ В/ì}.$$

Кут α між вектором $\vec{E}$ і віссю OX знайдемо із співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{E_x}{\left|\vec{E}\right|} = -\frac{2ax}{\left|\vec{E}\right|} = -\frac{2\cdot 2\cdot 1}{2\sqrt{29}} = -0{,}37.$$

Звідки знаходимо, що $\alpha = 112^\circ$. Кути β і γ між вектором $\vec{E}$ і осями OY і OZ, відповідно, знаходимо аналогічно як кут α.

$$\cos\beta = \frac{-2ay}{\left|\vec{E}\right|} = \frac{-2\cdot 2\cdot 2}{2\sqrt{29}} = -0{,}74, \beta = 138^\circ.$$

$$\cos\gamma = \frac{-2bz}{\left|\vec{E}\right|} = -\frac{-2\cdot(-1)\cdot 3}{2\sqrt{29}} = 0{,}557,\ \gamma = 56^\circ.$$