

1.6. Задачі

1.11. Щоб представити собі величину електричного заряду в 1 Кл, підрахувати, з якою силою відштовхувались би два однойменні заряди, величина кожного з яких була би 1 Кл і знаходились би вони на відстані 1 км один від одного.

1.12. Вирахувати відношення сили електричного відштовхування F_e двох електронів до сили їх гравітаційного притягання F_g .

1.13. З якою силою притягується електрон в атомі водню до ядра, якщо діаметр атома порядку $2 \cdot 10^{-8}$ см?

1.14. Знайти сумарний заряд всіх «вільних» електронів в міді, що знаходяться в 1 см^3 . Вважати, що кількість «вільних» електронів приблизно дорівнює кількості атомів міді.

1.15. Вирахувати прискорення, яке надає один електрон іншому, який знаходиться від першого на відстані $r = 1,00$ мм.

1.16. Два точкових заряди однакової величини q знаходяться на відстані l один від одного. Куди необхідно розмістити точковий заряд q' , щоб система знаходилась в рівновазі? Знайти величину q' .

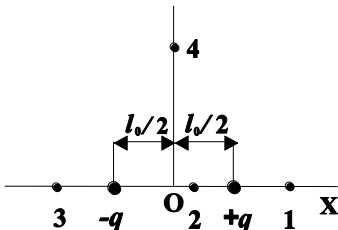


Рис. 1.12

1.17. Два точкових заряди $+q$ і $-q$ розташовані так як показано на рисунку 1.12. Показати напрямок напруженості поля \vec{E} в точках 1,2,3,4.

1.18. Три однакових точкових заряди q розташовані у вершинах рівностороннього трикутника, а точковий заряд q' – в центрі трикутника. Яким повинен бути заряд q' , щоб сила, яка діє на кожний заряд, дорівнювала нулю?

1.19. У вершинах квадрата із стороною a знаходяться однакові однойменні заряди, величина кожного з яких q . Який заряд Q протилежного знаку необхідно розташувати в центрі квадрата, щоб результуюча сила, яка діє на кожний заряд, порівнювала нулеві?

1.20. В електричному полі в трьох «близько» розташованих точках, які не лежать на одній прямій, потенціали однакові. Що можна сказати про напрямок напруженості поля біля цих точок?

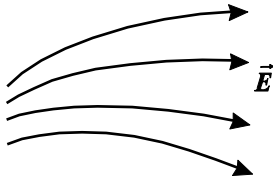


Рис. 1.13

1.21. На рисунку 1.13. приведена картина силових ліній поля \vec{E} . Зобразити екіпотенціальні лінії і вказати напрямок зростання потенціалу вдовж ліній \vec{E} поля.

1.22. У вершинах правильного шестикутника із стороною a розміщені точкові однакові за модулем заряди q . Знайти потенціал φ і напруженість поля \vec{E} в центрі шестикутника при умові, що: а) знаки всіх зарядів однакові; б) знаки сусідніх зарядів протилежні.

1.23. Напруженість поля $\vec{E} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, де a, b, c – константи. Чи є це поле однорідним? Знайти його потенціал $\varphi(x, y, z)$, якщо $\varphi(0,0,0) = 0$.

1.24. Потенціал електростатичного поля в деякій області залежить тільки від координати x :

$$\varphi = \frac{-ax^2}{2} + \text{const}.$$

Яка буде напруженість поля в цій області існування поля? При якому розподілі зарядів отримається таке поле?

1.25. Чи може електростатичне поле мати вигляд $\vec{E} = a(y\vec{i} - x\vec{j})$?

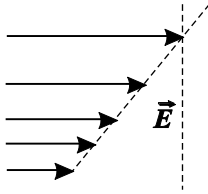


Рис. 1.14.

1.26. Чи може існувати у вакуумі електростатичне поле, вектор напруженості якого \vec{E} у всьому об'ємі поля однаково направлений, але за величиною змінюється, якщо переходить від точки до точки по нормальному до вектора \vec{E} напрямку (див. рис. 1.14).

1.27. Потенціал поля, що створюється деякої системою зарядів, має вигляд $\varphi = a(x^2 + y^2) + bz^2$, де $a = 2 \text{ В/м}^2$, $b = 1 \text{ В/м}^2$. Знайти: а) модуль напруженості E електричного поля в точці з координатами $(1, 1, -1)$; б) кут між вектором напруженості поля \vec{E} і віссю OX в цій же точці.

1.28. Потенціал поля, що створюється деякою системою зарядів, має вид $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$, де $a = 1 \text{ В/м}^2$, $b = 2 \text{ В/м}^2$. Знайти: а) модуль напруженості електричного поля в точці з координатами $(1, 1, -1)$; б) кут між вектором напруженості поля \vec{E} і віссю OZ в цій же точці.

1.29. Знайти вектор напруженості електричного поля, потенціал якого має вид $\varphi = \vec{a}\vec{r}$, де \vec{a} – сталий вектор, \vec{r} – радіус вектор точки поля.

1.30. Визначити вектор напруженості електричного поля, потенціал якого залежить від координат x , y за законом: а) $\varphi = a(x^2 - y^2)$; б) $\varphi = axy$, де a – стала.

1.31. В центрі куба знаходиться заряд $q = 53,125 \text{ пКл}$. Визначити потік вектора напруженості поля \vec{E} через одну із граней куба.

1.32. Чому дорівнює потік вектора напруженості поля \vec{E} через поверхню сфери, якщо в центрі сфери знаходиться диполь з моментом \vec{p} ?

1.33. На рисунку 1.15. приведені лінії вектора напруженості \vec{E} електричного поля. Визначити знак потоку Φ_E вектора \vec{E} через замкнуту поверхню S у приведених випадках.

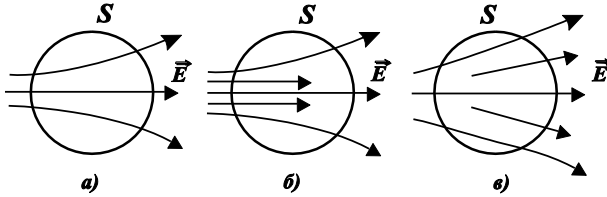


Рис. 1.15

1.34. У вакуумі тонкою нескінченно довгою однорідно зарядженою ниткою створене електричне поле. Лінійна густина заряду дорівнює $\lambda = 1$ нКл/м. Проведена уявна сферична поверхня, радіус якої $R = 18$ см, з центром на нитці. Знайти:

- максимальну проекцію напруженості поля E_n на нормаль до поверхні;
- потік Φ_E вектора \vec{E} через поверхню.

1.35. Знайти залежність густини зарядів ρ від декартових координат x, y, z , при якій напруженість поля описувалась би функцією $\vec{E} = 1x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^3\vec{k}$.

1.36. 1. Яка система зарядів може створити у вакуумі поле з напруженістю $\vec{E} = \alpha\vec{r}$ (α – константа, \vec{r} – радіус-вектор)? 2. Чому дорівнює для такого поля потік Φ_E вектора \vec{E} через довільну поверхню S , яка обмежує об'єм V ?

1.37. Напруженість поля $\vec{E}(\vec{r}) = ar\vec{r}$, де a константа, \vec{r} – радіус-вектор, $r = |\vec{r}|$. Визначити густину зарядів ρ , які створюють це поле.

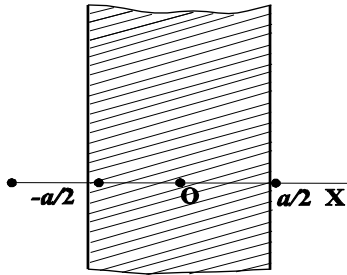


Рис. 1.16

1.38. Безмежна пластина, ширина якої a , заряджена з постійною об'ємною густиною ρ (див. рисунок 1.16). Знайти напруженість поля $E_x(x)$. Побудувати графік залежності E_x від x . Знайти потенціал $\varphi(x)$, прийнявши $\varphi(0) = 0$, і побудувати графік $\varphi(x)$.

1.39. Підрахувати середню об'ємну густину ρ електричних зарядів в атмосфері, якщо відомо, що напруженість електричного поля на поверхні землі дорівнює 100 В/м , а на висоті $h = 1,5 \text{ км}$ ця напруженість зменшується до 25 В/м .

1.40. Скориставшись формулою (3) із розв'язку задачі (1.7), отримати вираз для напруженості поля E_x (формула 1.9) нескінченної площини, зарядженої однорідно з густиною заряду σ . Вісь OX перпендикулярна до площини.

1.41. Відомо, що потенціали двох близьких паралельних екіпотенціальних площин 1 і 2 дорівнюють $\varphi_1 = 3,00 \text{ В}$, $\varphi_2 = 3,05 \text{ В}$. Відстань між площинами $l = 0,5 \text{ см}$. Вказати напрямок і вирахувати значення модуля напруженості поля E між цими площинами.

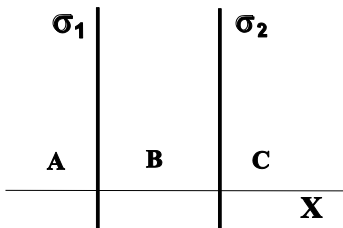


Рис. 1.17

1.42. Дві паралельні безмежні площини зарядженні: одна з густиною $\sigma_1 = -0,884 \text{ нКл/м}^2$, інша з густиною $\sigma_2 = +1,768 \text{ нКл/м}^2$ (див. рис. 1.17). Знайти напруженість поля \vec{E} для кожної із областей А, В і С.

1.43. Дві паралельні безмежні площини заряджені різнойменно з різними за модулем густинами заряду $+\sigma_1$ і $-\sigma_2$. Абсциси вказаних на рис. 1.18 точок дорівнюють: $x_1 = -2$ м, $x_2 = -1$ м, $x_3 = +1$ м, $x_4 = +5$ м. Різниця потенціалів між точками 2 і 1 дорівнює $\varphi_2 - \varphi_1 = 100$ В.

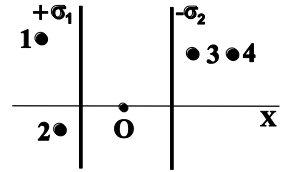


Рис. 1.18

- а) Яка із густин ($+\sigma_1$, чи $-\sigma_2$) більша за модулем?
 б) Чому дорівнює різниця потенціалів $\varphi_4 - \varphi_3$?

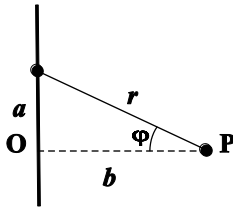


Рис. 1.19

1.44. Є безмежна однорідно заряджена площина. Візьмемо точку P, що знаходиться на відстані b від площини. Проведемо навколо точки O коло, радіус якого a . Треба знайти a , при якому напруженість поля в точці P, що створюється зарядами всередині кола, буде дорівнювати половині напруженості поля, яка створюється всією площиною. Знайти r і φ , які

відповідають цьому значенню a .

1.45. У вакуумі знаходиться дуже тонкий прямий стержень заряджений з однаковою скрізь лінійною густиною заряду λ . Довжина стержня $2a$. Знайти модуль напруженості поля E , як функцію відстані r від центра стержня для точок, які лежать на прямій, що перпендикулярна до осі стержня і проходить через його центр. Розглянути випадки: а) $r \ll a$ і б) $r \gg a$.

1.46. Дві довгих тонкі нитки, які розташовані паралельно на відстані $d = 0,2$ м одна від одної, рівномірно заряджені різнойменними зарядами з лінійними густинами $\lambda_1 = +4,73$ нКл/м і $\lambda_2 = -4,73$ нКл/м. Визначити напруженість поля в точці, яка лежить в площині симетрії на відстані $h = 0,4$ м від площини, в якій лежать нитки.

1.47. Два нескінченно довгих коаксіальних циліндри з радіусами основ $R_1 = 10$ мм і $R_2 = 11$ мм заряджені одноменно з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = +1$ мкКл/м² і $\sigma_2 = +2$ мкКл/м² відповідно. Знайти різницю потенціалів між циліндрами.

1.48. При умові попередньої задачі визначити величину напруженості E електричного поля зовні циліндрів на відстані $r = 2$ см від осі циліндрів.

1.49. Тонкий прямий заряджений стержень, довжина якого $2a$, а заряд q , знаходиться у вакуумі. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля як функцію відстані r від центра стержня до точок осі стержня поза ним. Дослідити отриманий вираз при $r \gg a$.

1.50. Дуже довга пряма рівномірно заряджена нитка має заряд λ на одиницю довжини. Знайти модуль і напрямок вектора напруженості електричного поля в точці, яка знаходиться від нитки на відстані x і знаходиться на перпендикулярі до нитки, який проходить через один із її кінців.

1.51. Дві нескінченно довгі нитки, відстань між якими $a = 5$ см, рівномірно заряджені з однаковими густинами заряду $\lambda = 10$ нКл/м. Визначити максимальне значення напруженості поля для точок, що належать площині симетрії ниток.

1.52. Відстань між двома прямими нескінченно довгими однорідно зарядженими нитками $a = 31$ см. Нитки заряджені різнойменними зарядами з лінійними густинами $\lambda_1 = +2$ нКл/м і $\lambda_2 = -4$ нКл/м. Визначити напруженість поля в точці, віддаленій на відстань a як від першої так і від другої нитки.

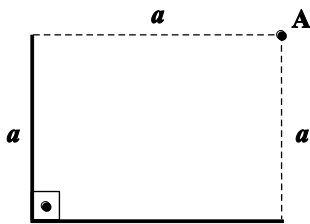


Рис. 1.20

1.53. Тонкий однорідно заряджений стержень зігнутий пополювині під прямим кутом як показано на рис. 1.20. Довжина стержня

$2a = 2\text{ м}$. Лінійна густина заряду $\lambda = 7,87\text{ нКл/м}$. Визначити напруженість електричного поля в точці А.

1.54. Тонкий однорідно заряджений стержень зігнутий під прямими кутами, як показано на рисунку 1.21. Довжина стержня $6a = 6\text{ м}$. Лінійна густина заряду $\lambda = 14,33\text{ нКл/м}$. Визначити напруженість електричного поля в точці А.

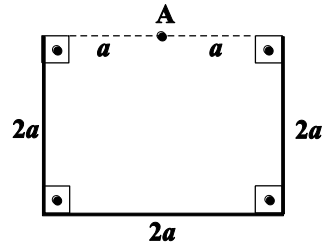


Рис. 1.21

1.55. На нескінченно довгій тонкій нитці рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\lambda = 12\text{ нКл/м}$. Визначити різницю потенціалів двох точок поля, які віддалені від нитки на відстані $r_1 = 2\text{ см}$ і $r_2 = 4\text{ см}$.

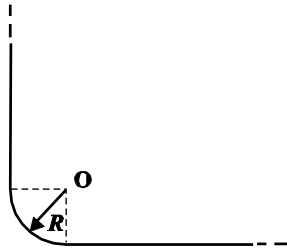


Рис. 1.22

1.56. Рівномірно заряджена нескінченна нитка, на одиницю довжини якої приходить заряд λ , має конфігурацію, як показано на рисунку 1.22. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля в точці О, якщо радіус заокруглення R значно менший довжини нитки.

1.57. Рівномірно заряджена нескінченно довга нитка, на одиницю довжини якої приходить заряд λ , має конфігурацію, як показано на рисунку 1.23. Знайти модуль вектора напруженості електричного поля в точці О.

1.58. Рівномірно заряджена дуже довга пряма нитка розташована по осі круга, радіус якого $R = 10\text{ см}$, і одним своїм кінцем впирається в його

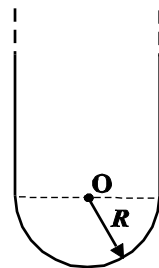


Рис. 1.23

центр. Заряд нитки на одиницю довжини дорівнює $\lambda = 8,85 \text{ нКл/м}$. Знайти потік вектора \vec{E} через площу круга.

1.59. Знайти модуль і напрямок напруженості поля \vec{E} в центрі кільця, радіус якого R , по якому рівномірно розподілений заряд $q > 0$, а в кільці зроблений проріз шириною $b \ll R$.

1.60. Дуже тонка пластина має форму кільця з внутрішнім радіусом a і зовнішнім радіусом b . По пластинці рівномірно розподілений заряд q . Приймаючи вісь пластинки за вісь x , знайти потенціал ϕ і напруженість поля E_x по осі пластинки як функцію x (початок відріку x розмістити в центр кільця). Дослідити випадок $|x| \gg b$.

1.61. Два однакових круглих диски, радіуси яких $R = 10 \text{ см}$, заряджені різнойменними зарядами, розподіленими івномірно з поверхневою густиною $|\sigma| = 8,85 \text{ нКл/м}^2$ і знаходяться на відстані $d = 1 \text{ см}$ один від одного. Знайти напруженість поля в точці A , яка знаходиться на спільній осі дисків на відстані $h = 5 \text{ см}$ від ближнього диска (див. рис. 1.24).

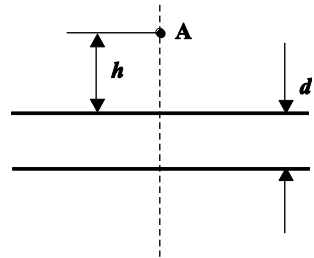


Рис. 1.24

1.62. Два однакових коаксіальних диски, радіуси яких $R = 10 \text{ см}$, заряджені рівномірно з густинами заряду $\sigma_1 = +5 \text{ мкКл/м}^2$ і $\sigma_2 = -5 \text{ мкКл/м}^2$. Диски зближені до відстані $d = 2 \text{ мм}$ (утворився плоский конденсатор). Визначити силу взаємодії дисків, нехтуючи кривими неоднорідностями електричного поля.

1.63. Сферичною поверхнею, радіус якої R , рівномірно розподілені заряди з поверхневою густиною σ . Знайти потенціал φ і напруженість поля E зарядів в залежності від відстані r до центра сфери. Побудувати графіки залежності цих величин від r .

1.64. Сфера рівномірно заряджена з поверхневою густиною заряду $\sigma = 354 \text{ нКл/м}^2$. Радіус сфери $R = 0,5 \text{ м}$. Визначити напруженість \vec{E} та потенціал поля φ в центрі сфери.

1.65. Знайти модуль і напрямок напруженості поля \vec{E} в центрі сфери, радіус якої R , по поверхні якої рівномірно розподілений заряд $q > 0$, а в сфері зроблений маленький отвір, площа якого $S \ll R^2$.

1.66. Приймаючи Землю за кулю, радіус якої $R = 6400 \text{ км}$, визначити заряд Землі, якщо напруженість електричного поля біля поверхні Землі дорівнює $E = 130 \text{ В/м}$. Визначити потенціал поверхні Землі, приймаючи потенціал на нескінченності $\varphi_\infty = 0$.

1.67. Заряд $q = 593 \text{ нКл}$, розподілений рівномірно в об'ємі кулі, радіус якої 80 мм . Знайти потенціал φ і напруженість поля \vec{E} в центрі кулі.

1.68. Яка була би напруженість електричного поля в центрі сферичної поверхні, якщо одна половина цієї поверхні була би покрита зарядами з постійною густиною σ , а інша половина теж рівномірно покрита зарядами такого ж знаку, але з удвічі меншою густиною?

1.69. Куля рівномірно заряджена електрикою з об'ємною густиною ρ . Всередині кулі зроблена порожнина, центр якої O' , зміщений відносно центра кулі O на відстань a . Визначити електричне поле всередині порожнини.

1.70. Два заряди $+q$ і $-q$ знаходяться в точках з координатами $(l/2, 0, 0)$ і $(-l/2, 0, 0)$ відповідно. Яку роботу виконують сили поля, які створюються цими зарядами, при видаленні заряду q_1 із початку координат на нескінченність? Як зміниться відповідь, якщо обидва заряди однакові і дорівнюють $+q$?

1.71. Знайти роботу, яку виконують сили однорідного поля з напруженістю \vec{E} над зарядом q при його переміщенні довільною траєкторією із точки 1 з радіус-вектором \vec{r}_1 в точку 2 з радіус-вектором \vec{r}_2 .

1.72. Яку роботу необхідно виконати, щоб повернути диполь з моментом \vec{p} із положення по полю \vec{E} в положення проти поля?

1.73. В електричному полі точкового заряду $q = 1$ мКл на відстані $r = 5$ см знаходиться електричний диполь з дипольним моментом $p = 1,6 \cdot 10^{-26}$ Клм, який може вільно повертатись в полі. Яку роботу треба виконати, щоб видалити диполь на нескінченність? Вважати, що довжина диполя дуже мала порівняно з відстанню r .

2. ДІЕЛЕКТРИКИ ТА ПРОВІДНИКИ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ ПОЛІ

2.1. Питання теми

1. Поляризація діелектриків та електричне поле всередині діелектриків.
2. Властивості провідників в електричному полі.
3. Електроємність.
4. Енергія електричного поля.

2.2. Основні визначення та формули

1. Основною характеристикою поляризації діелектрика в електричному полі є вектор поляризації

$$\vec{P} = \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

де $\sum_{\Delta V} \vec{p}_i$ – сумарний дипольний момент всіх молекул в об'ємі ΔV .

ΔV – фізично безмежно малий об'єм, тобто об'єм, достатньо малий, щоб в його межах можна було вважати постійним макроскопічні величини (наприклад: напруженість поля, густину, температуру та інше), а з другої сторони повинен містити достатньо велику для усереднення кількість молекул.

2. Потік вектора поляризації \vec{P} через замкнуту поверхню \vec{S} :

$$\oint_S \vec{P} d\vec{S} = -q', \quad (2.2)$$

де q' – алгебраїчна сума зв'язаних (поляризаційних) зарядів всередині цієї поверхні, а

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = -\rho', \quad (2.3)$$

де ρ' – об'ємна густина зв'язаних зарядів.

3. Поверхнева густина зв'язаних (поляризаційних) зарядів σ' на межі діелектрик – вакуум дорівнює проекції вектора \vec{P} на нормаль \vec{n} до поверхні діелектрика (\vec{n} направлений назовні діелектрика):

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n, \quad (2.4)$$

4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum q_i, \quad (2.5)$$

де $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ – вектор електричного зміщення (індукції), \vec{E} – напруженість електричного поля всередині діелектрика, $\sum q_i$ – алгебраїчна сума сторонніх (вільних) зарядів всередині замкнутої поверхні S .

5. Для ізо тропного діелектрика

$$\vec{P} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + \alpha, \quad (2.6)$$

де α – діелектрична сприйнятливість, а ϵ – відносна діелектрична проникність діелектрика.

6. На границі розділу двох діелектриків у випадку відсутності сторонніх (вільних) зарядів мають місце співвідношення:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma', \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (2.7)$$

де σ' – поверхнева густина зв'язаних зарядів, орт нормалі \vec{n} направлений із середовища 1 в середовище 2, D_n, E_τ – нормальна і тангенційна складові векторів \vec{D} і \vec{E} відповідно.

7. Для випадку ізотропного однорідного діелектрика, який заповнює весь простір між екіпо тенціальними поверхнями:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 / \epsilon, \quad (2.8)$$

де \vec{E} – напруженість поля всередині діелектрика, \vec{E}_0 – напруженість поля зовні діелектрика, ϵ – відносна діелектрична проникність діелектрика.

8. Напруженість електричного поля біля поверхні провідника у вакуумі:

$$E_n = \sigma / \epsilon_0, \quad (2.9)$$

де σ – густина зарядів поверхні провідника.

9. При умові рівноваги надлишкові заряди в провіднику розподіляються по поверхні таким чином, щоб потенціал поверхні був однаковим, а напруженість поля всередині провідника дорівнювала нулю.

10. Ємність провідника

$$C = q / \phi, \quad (2.10)$$

де q – надлишковий заряд на провіднику, ϕ – потенціал провідника.

11. Ємність

а) провідної кулі:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R, \quad (2.11)$$

де R – радіус кулі, ϵ – діелектрична проникність середовища, що оточує кулю;

б) плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad (2.12)$$

де S – площа поверхні пластин, d – відстань між пластинами, ϵ – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між пластинами;

в) циліндричного конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)}, \quad (2.13)$$

де l – довжина циліндричних електродів, R_1 – радіус внутрішнього, а R_2 радіус зовнішнього циліндрів, ϵ – діелектрична проникність діелектрика між циліндрами;

г) сферичного конденсатора:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1), \quad (2.14)$$

де R_1 – радіус внутрішньої, R_2 – радіус зовнішньої сфери, ϵ – діелектрична проникність діелектрика, що повністю заповнює простір між концентричними сферами.

12. Об'ємна густина енергії електричного поля (енергія одиниці об'єму):

$$\omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.15)$$

13. Загальна формула для енергії електричного поля:

$$W = \int_V \omega dV, \quad (2.16)$$

де V – об'єм, в якому існує електричне поле, ω – об'ємна густина енергії поля.

14. Енергія зарядженого конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.17)$$

де U – різниця потенціалів між обкладинками конденсатора, C – ємність конденсатора, q – заряд пластини конденсатора.

2.3. Питання на самопідготовку

1. Вектор поляризації та його фізичний зміст.
2. Яким чином можна визначити поляризаційні (зв'язані) заряди за допомогою вектора поляризації?
3. Вектор електричного зміщення (індукції) та його фізичний зміст.
4. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектриках.
5. Зв'язок між векторами електричного зміщення та вектором напруженості електричного поля.
6. Електричне поле на межі двох діелектриків.
7. Основні властивості провідників в електричному полі.
8. Напруженість електричного поля біля поверхні зарядженого провідника.
9. Які властивості провідника дають можливість ввести поняття його ємності?
10. Конденсатори. Їх властивості та вимоги до конструкцій. Типи конденсаторів.
11. Енергія зарядженого провідника та конденсатора.
12. Об'ємна густина енергії електричного поля та загальна формула для розрахунку енергії.

2.4. Методичні вказівки

При розрахунку електричного поля в діелектриках доцільно використовувати наступні два методи.

Перший метод базується на принципі суперпозиції полів:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' ,$$

де \vec{E} – напруженість поля в діелектрику, \vec{E}_0 – напруженість поля вільних (сторонніх) зарядів, \vec{E}' – напруженість поля зв'язаних (поляризаційних) зарядів. Спочатку розраховують поле вільних

(сторонніх) зарядів \vec{E}_0 , потім визначають поле зв'язаних зарядів \vec{E}' .

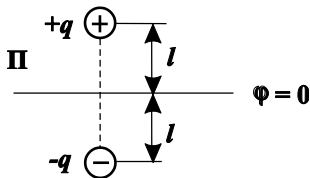
Тоді знаходять напруженість \vec{E} поля в діелектрику. Таким же чином можна отримати вираз для потенціалу ϕ поля в діелектрику.

Зауважимо, що не все так просто в цій методиці, як може здаватися на перший погляд. Нерідко приходится застосовувати метод диференціювання і інтегрування, зустрічаються труднощі при визначенні густини зв'язаних зарядів σ' і їх напруженості \vec{E}' і т.п.

Другий метод базується на теоремі Остроградського-Гаусса (2.5). Спочатку за допомогою (2.5) знаходять вектор електричного зміщення \vec{D} , потім за формулою (2.6) визначають напруженість електричного поля \vec{E} в діелектрику і далі (якщо необхідно) із співвідношень (1.16), (1.17) розраховують потенціал ϕ . Цим методом часто простіше досягнути цілі, ніж методом суперпозиції. Проте в деяких випадках другий метод застосовувати неможливо і використовують метод суперпозиції.

Електричне поле, яке створюється зарядженими провідниками.

Складність розрахунку напруженостей і потенціалів полів, які створюються в присутності провідників або самими зарядженими провідниками обумовлена тим, що розподіл зарядів на провідниках, як наданих їм, так і індукованих, наперед не відомий. Відомо тільки, що заряди ці розподіляються по поверхні так, що в всередині металу (в умовах електростатичної рівноваги) напруженість поля тотожно дорівнює нулеві. Ця умова разом з наслідками із неї дозволяє в деяких випадках знайти розподіл індукованих і наданих провідникам зарядів простими в математичному відношенні методами.



Наприклад. Так, як напруженість поля всередині провідника дорівнює нулеві, то поверхня провідника є екіпотенціальною. На цій властивості провідника базується метод

дзеркальних зображень. Суть його в наступному. Якщо в довільному електростатичному полі замінити еквіпотенціальну поверхню металічною поверхню такої ж форми і створити на ній такий же потенціал, то дане електростатичне поле не зміниться. Наприклад, розглянемо електричне поле між точковим зарядом $+q$ і безмежною металічною площиною Π , потенціал якої дорівнює нулю. Згідно методу дзеркальних зображень це поле еквівалентне електричному полю, що створюється даним точковим зарядом $+q$ і точковим зарядом $-q$, який є дзеркальним зображенням даного заряду $+q$ в металічній площині (див. рисунок).

2.5. Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Два безмежно довгих тонкостінних коаксіальних циліндри, радіуси яких $R_1 = 2$ см і $R_2 = 4$ см рівномірно заряджені з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = +5$ нКл/м² і $\sigma_2 = -10$ нКл/м². Простір між циліндрами заповнений парафіном ($\epsilon = 2$). Визначити напруженість E електричного поля в точках, які знаходяться на

відстанях $r_1 = 1$ см, $r_2 = 3$ см і $r_3 = 6$ см від осі циліндрів, тобто в точках А, В і С відповідно (рис.2.1).

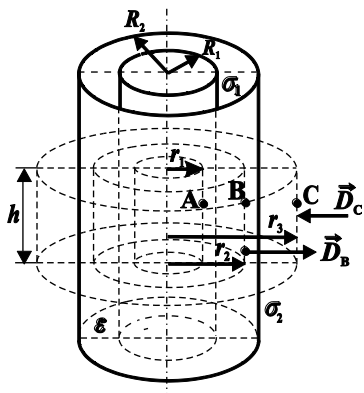


Рис. 2.1

поверхню S вибираємо коаксіальні циліндри, висота яких h , а бічні поверхні проходять через точки А, В, С відповідно (рис. 2.1). За теоремою (2.5) циліндр, на бічній поверхні, якого знаходиться точка А не охоплює зарядів, тому індукція поля на відстані $r_1 = 1$ см

Розв'язок. Застосуємо теорему Остроградського-Гаусса (2.5). Електричне поле, яке створюється зарядженими циліндрами має циліндричну симетрію, тобто вектори зміщення \vec{D}_B і \vec{D}_C є перпендикулярні до поверхні циліндрів. За замкнуту

дорівнює нулю. Тобто $D_A = 0$ і $E_A = 0$. Для точки В теорема (2.5) запишеться так:

$$D_B \cdot 2\pi r_2 h = 2\pi R_1 \cdot h \sigma_1.$$

Звідки

$$D_B = \frac{R_1 \sigma_1}{r_2}. \quad (1)$$

З урахуванням (2.6) $D_B = \varepsilon_0 E_B$ і

$$E_B = \frac{R_1 \sigma_1}{\varepsilon_0 r_2} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^{-2}} \text{ \AA} \hat{\lambda} = 188 \text{ \AA} \hat{\lambda}.$$

Аналогічно для точки С запишемо:

$$D_C \cdot 2\pi r_3 h = 2\pi R_1 \sigma_1 h + 2\pi R_2 \sigma_2 h.$$

Звідки

$$D_C = \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{r_3},$$

або з урахуванням (2.6)

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{R_1 \sigma_1 + R_2 \sigma_2}{\varepsilon_0 r_3} = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}} \text{ \AA} \hat{\lambda} = -565 \text{ \AA} \hat{\lambda}. \end{aligned}$$

Знак «мінус» означає, що вектор \vec{E}_C направлений до циліндрів, протилежно вектору \vec{E}_B .

Задача 2.2. Плоский шар із діелектрика з діелектричною проникністю ε рівномірно заряджений з об'ємною густиною $\rho > 0$ (рис. 2.2.) Товщина шару l . Визначити поверхневу густина зв'язаних зарядів, різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, між поверхнею і точкою, яка лежить на відстані l від середини шару.

Побудувати графіки залежності $D_x(x)$, $E_x(x)$, $P_x(x)$, (\vec{P} – вектор поляризації) і $\varphi(x)$, де x – відстань по перпендикуляру до шару від його середини до точки, що розглядається. Вважати, що лінійні розміри шару значно більші його товщини.

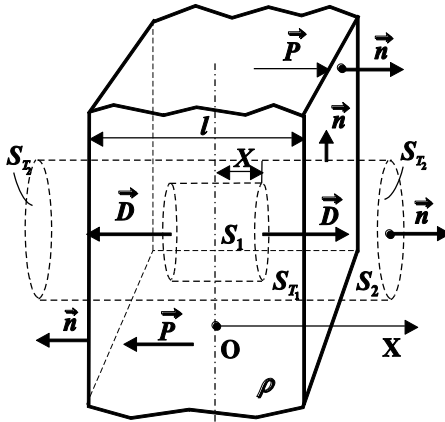


Рис. 2.2

Аналіз. Так як лінійні розміри бічних поверхонь шару значно більші його товщини, то можна вважати, що в точках достатньо віддалених від країв шару, як всередині його, так і зовні (поблизу) силові лінії є прямі, які нормальні до бічних поверхонь шару. Така плоскосиметрична конфігурація поля дозволяє знайти напруженість поля за допомогою теореми

Остроградського-Гаусса. Знаючи напруженість поля як функцію координат, можна визначити різницю потенціалів між заданими точками.

Так як об'ємний заряд розподілений по діелектрику, то використаємо узагальнену теорему (2.5). Щоб знайти електричне зміщення D і напруженість E всередині і зовні шару, проведемо дві допоміжні поверхні S_1 і S_2 у вигляді циліндричних поверхонь, торці яких паралельні середній площині шару, симетричні відносно неї і значно менші за площу.

Розв'язок. Розглянемо ліву частину рівняння (2.5). Так як конфігурація поля плоско симетрична, то у всіх точках бічних поверхонь циліндрів S_1 і S_2 вектори \vec{D} і $d\vec{S} = \vec{n}dS$ взаємно перпендикулярні і тому $\vec{D}d\vec{S} \equiv 0$. Для торцевих поверхонь вектори \vec{D} і $d\vec{S}$ колінеарні і $\vec{D}d\vec{S} = DdS$. Тому

$$\oint_{S_{1,2}} \vec{D}d\vec{S} = \int_{S_{T_{1,2}}} DdS = 2DS_T, \quad (1)$$

де S_T – площа основи (торця) допоміжної поверхні інтегрування. Рівність (1) справедлива, тому що обидва торці розташовані симетрично відносно зарядженого шару і D у всіх точках обох торців можна вважати однаковим. Індокси 1 і 2 означають, що всі проведені міркування справедливі як для першої S_1 , так і для другої S_2 поверхонь.

Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею S_1 , залежить від висоти h цієї циліндричної поверхні. Якщо ввести вісь OX , то $h = 2|x|$, де x – координата торця. Для поверхні S_1 ($|x| < l/2$)

$$\sum q_i = 2|x|S_{T_1} \cdot \rho. \quad (2)$$

Тоді згідно теореми (2.5) і рівностей (1) і (2) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_1} = 2|x|S_{T_1} \rho.$$

Звідки

$$D = \rho|x|,$$

а

$$D_x = \rho x \quad (D_y = D_z = 0). \quad (3)$$

Сума вільних зарядів, що охоплюються поверхнею S_2 ($|x| > l/2$), вже не залежить від координати торців і $\sum q_i = S_{T_2} l \rho$.

Тоді згідно теореми (2.5) і рівності (1) отримаємо:

$$D \cdot 2S_{T_2} = S_{T_2} l \rho.$$

Звідки

$$D = \rho l / 2$$

і

$$D_x = \frac{\rho l}{2} \cdot \frac{x}{|x|} \quad (D_y = D_z = 0). \quad (4)$$

Знак D_x у виразах (3) і (4) визначається знаком координати x і об'ємної густини ρ .

Врахуємо співвідношення (2.6) між векторами \vec{P} , \vec{D} і \vec{E} . Тоді згідно рівностей (3) і (4) отримуємо, що:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\rho x}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ для } |x| < l/2 \\ E_x &= \frac{\rho l}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|} \text{ для } |x| > l/2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

і

а

$$E_y = E_z = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho x \text{ для } |x| < l/2, \\ P_x &= 0 \text{ для } |x| > l/2, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а

$$P_y = P_z = 0.$$

Графіки $D_x(x)$, $E_x(x)$, $P_x(x)$ побудовані за виразами (3), (4), (5), (6) приведені на рис. 2.3.

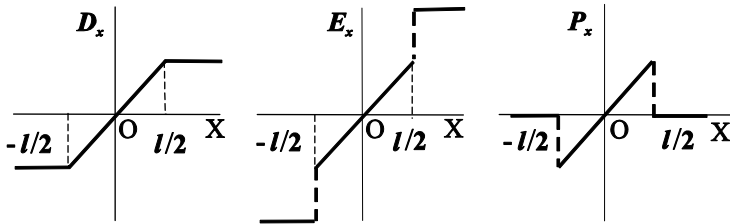


Рис. 2.3

На границі шару терплять розрив E_x і P_x (нормальні складові векторів \vec{E} і \vec{P}), але не терпить розриву D_x . Це означає, що на поверхні діелектричного шару, який заряджений по об'єму, поверхнева густина вільних зарядів дорівнює нулеві, але внаслідок поляризації діелектрика виникають зв'язані заряди. Поверхневу густину зв'язаних зарядів можна визначити за формулою (2.4) і рівності (6) при $x = l/2$, а саме

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\rho l}{2}.$$

Так як кут між нормальми \vec{n} до бічних поверхонь шару і вектором поляризації \vec{P} дорівнює нулю, то на обох поверхнях шару поверхнева густина зв'язаних зарядів $\sigma' > 0$. Це означає, що в середині шару повинен існувати від'ємний зв'язаний заряд (сумарний зв'язаний заряд дорівнює нулю). Цим і пояснюється розрив E_x і P_x . Графік потенціалу $\varphi(x)$ можна побудувати за графіком $E_x(x)$. Початок відліку потенціалу на безмежності вибрати не можна так як плоско симетрична конфігурація поля не зберігається на великих відстанях від шару. Тому будемо вважати, що $\varphi = 0$ для точок середньої площини шару ($x = 0$). Тоді для всієї області $x > 0$

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} > 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} < 0 \text{ і це означає, що } \varphi(x) \text{ зменшується із ростом}$$

$$x. \text{ Для всієї області } x < 0 \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx} < 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} > 0 \text{ і це означає}$$

$\varphi(x)$ збільшується із ростом x . Таким чином, крива $\varphi(x)$ симетрична відносно початку координат і в точці $x = 0$ має максимум

$$(E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = 0). \text{ Для області } 0 < x < l/2 \text{ з урахуванням рівності}$$

(5) можемо записати, що

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_0} \int_0^x x dx.$$

Звідки отримаємо, що

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_0}. \quad (7)$$

Для області $-\frac{l}{2} < x < 0$ аналогічно запишемо:

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon_0} \int_x^0 x dx.$$

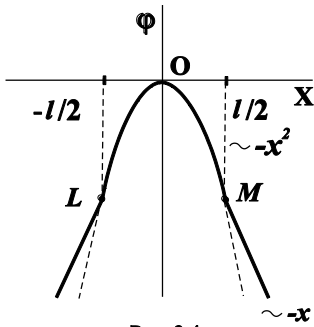


Рис. 2.4

Звідки теж отримаємо співвідношення (7). Для області $|x| > l/2$, $E_x = \text{const}$.

Це означає що функція $\varphi(x)$ є лінійна.

Точкам $|x| = l/2$, де E_x терпить розрив, на графіку $\varphi(x)$ відповідають

точки згину (L, M) (рис. 2.4). Співвідношення (7) дозволяє знайти

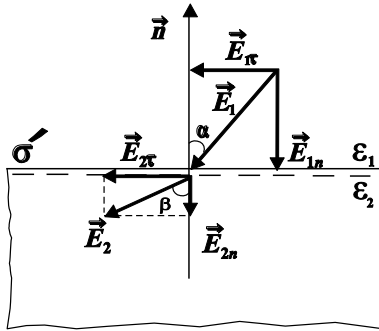
різницю потенціалів між серединою шару і його поверхнею, а саме

$$\varphi(0) - \varphi(l/2) = \frac{\rho l^2}{8\varepsilon\varepsilon_0}. \quad \text{Рівність (5) дозволяє знайти різницю}$$

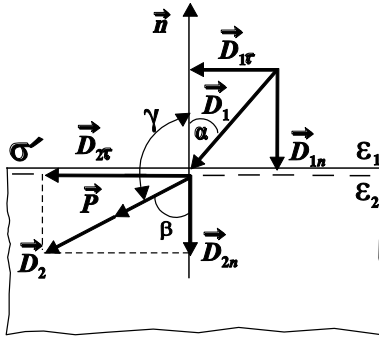
потенціалів між поверхнею шару і точкою, яка знаходиться на відстані l від середини шару.

$$\varphi(l/2) - \varphi(l) = \int_{l/2}^l E_x dx = \frac{\rho l}{2\varepsilon_0} \int_{l/2}^l dx = \frac{\rho l^2}{4\varepsilon_0}.$$

Задача 2.3. В просторі, який наполовину заповнений парафіном ($\varepsilon_2 = 2$), створене однорідне електричне поле, напруженість якого в повітрі $E_1 = 10$ В/м. Вектор \vec{E}_1 утворює кут 150° з нормаллю \vec{n} до



а)



б)

Рис. 2.5

межі парафін - повітря, яку можна вважати плоскою, рис. 2.5,а. Визначити вектори електричного зміщення, напруженості, поляризації та поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів в парафіні. Парафін вважати однорідним діелектриком.

Розв'язок. За умовою задачі відомі модуль і напрямок вектора напруженості \vec{E}_1 в повітрі ($\epsilon_1 = 1$), а значить, і вектор електричного зміщення. Тому мета задачі зводиться до використання співвідношень між нормальними і тангенціальними (дотичними) складовими векторів \vec{E} і \vec{D} при переході через межу повітря-діелектрик. Згідно співвідношень (2.7) нормальна складова вектора \vec{D} і дотична складова вектора \vec{E} при переході через межу повітря-діелектрик не змінюються. Знаючи нормальні і дотичні складові векторів \vec{E} і \vec{D} , можна знайти

модулі і напрямки цих векторів в парафіні.

Вектор \vec{D}_1 колінеарний вектору \vec{E}_1 (напрямок останнього заданий). Електричні властивості повітря практично співпадають із властивостями вакууму. Тому $D_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_1$, а $D_{1n} = D_1 \cos \alpha = \epsilon_0 E_1 \cos \alpha$ (рис. 2.5б), а значить згідно (2.7)

$$D_{2n} = \epsilon_0 E_1 \cos \alpha, \quad (1)$$

де $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Так як згідно (2.7) і (рис. 2.5,а) $E_{1\tau} = E_{2\tau} = E_1 \sin \alpha$, то врахувавши (2.6), отримаємо:

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_1 \sin \alpha . \quad (2)$$

Тоді

$$\begin{aligned} D_2 &= \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \sqrt{\cos^2 30^\circ + 2^2 \sin^2 30^\circ} \hat{E} \hat{E} / \hat{i}^2 = 117 \text{ пКл/м}^2. \end{aligned}$$

При цьому вектор \vec{D}_2 утворює кут β з лінією нормалі \vec{n} , який знайдемо із співвідношення:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}} = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_1 \sin \alpha}{\varepsilon_0 E_1 \cos \alpha} = \varepsilon_2 \operatorname{tg} \alpha = 1,155.$$

Звідки $\beta = 49,1^\circ$ Діелектрик є ізотропним, тому вектори \vec{E}_2 і \vec{D}_2 колінеарні і в діелектрику. Тому згідно (2.6)

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{117 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \text{ В/м} = 6,6 \text{ В/м}.$$

Вектор поляризації \vec{P} і \vec{E}_2 теж колінеарні (ізо тропність діелектрика). Тому згідно (2.6)

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = \\ &= (\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 \cdot \frac{D_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} D_2 = \frac{D_2}{2} = 58,5 \text{ і} \hat{E} \hat{E} / \hat{i}^2 . \end{aligned}$$

Поверхневу густину σ' зв'язаних (поляризаційних) зарядів знайдемо за формулою (2.4), тобто

$$\begin{aligned} \sigma' &= P \cos \gamma = P \cos(\pi - \beta) = \\ &= -P \cos \beta = -58,5 \cdot \cos 49,1^\circ \text{ і} \hat{E} \hat{E} / \hat{i}^2 = -38,3 \text{ і} \hat{E} \hat{E} / \hat{i}^2 . \end{aligned}$$

Задача 2.4. Одній із пластин плоского конденсатора, площа якої $S=0,1 \text{ м}^2$, наданий заряд $q=+1 \text{ нКл}$ (інша пластина з'єднана тонким провідником із землею). Між пластинами (паралельно до них) знаходяться скляна ($\epsilon_1 = 7$) і фарфорова ($\epsilon_2 = 6$) пластинки, які щільно прилягають одна до одної і до пластин конденсатора. Визначити напруженість електричного поля в склі і фарфорі, а також поверхневі густини σ'_1 і σ'_2 зв'язаних зарядів на них (рис. 2.6).

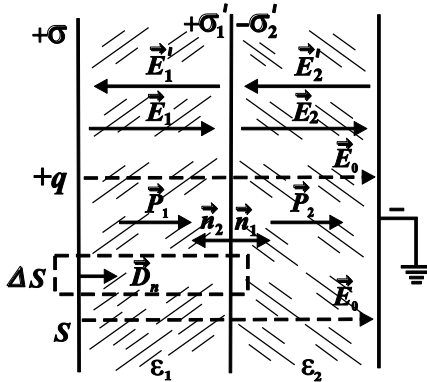


Рис. 2.6

Розв'язок. Фізична система складається із конденсатора, на пластинах якого розподілені вільні електричні заряди з густиною $\sigma = q/S$ і двох діелектриків, на яких виникають зв'язані електричні заряди з густинами σ'_1 і σ'_2 . Необхідно визначити напруженості E_1 і E_2 електричного поля в діелектриках, а також густини σ'_1 і σ'_2 зв'язаних зарядів.

Метод суперпозиції

Поле в кожному діелектрику створюється вільними зарядами розташованими на пластинах конденсатора, напруженість якого дорівнює

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (1)$$

і відповідно зв'язаними зарядами σ'_1 і σ'_2 , розташованими на двох діелектричних пластинах, напруженості яких дорівнюють

$$E'_1 = \frac{\sigma'_1}{\epsilon_0} \text{ і } E'_2 = \frac{|\sigma'_2|}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Зауважимо, що зв'язані заряди створюють поле, відмінне від нуля тільки в «своєму» діелектрику. Як видно із рис. 2.6. результуюче поле в діелектриках буде:

$$E_1 = E_0 - E'_1 \text{ і } E_2 = E_0 - E'_2.$$

За формулою (2.8) $E_1 = E_0 / \varepsilon_1$, $E_2 = E_0 / \varepsilon_2$. Тоді

$$\frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma'_1}{\varepsilon_0}, \text{ а } \frac{E_0}{\varepsilon_2} = E_0 - \frac{|\sigma'_2|}{\varepsilon_0}.$$

Врахувавши формули (1) і (2) цієї задачі, отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}; E_2 = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}; \sigma'_1 = \frac{(\varepsilon_1 - 1)q}{\varepsilon_1 S}; |\sigma'_2| = \frac{(\varepsilon_2 - 1)q}{\varepsilon_2 S}.$$

Після підстановки числових значень знаходимо:

$$E_1 = \frac{10^{-9}}{8,89 \cdot 10^{-12} \cdot 7 \cdot 0,1} = 161 \text{ В/м}; E_2 = 188 \text{ В/м};$$

$$\sigma'_1 = \frac{(7-1) \cdot 10^{-9}}{7 \cdot 0,1} \text{ Кл/м}^2 = 8,57 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2;$$

$$|\sigma'_2| = \frac{(6-1) \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 0,1} \text{ Кл/м}^2 = 8,33 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

Метод Остроградського-Гауса. За теоремою (2.5) і співвідношенням (2.7) визначаємо вектор електричного зміщення в будь-якому діелектрику (рис. 2.6):

$$D_n \Delta S = \sigma \Delta S, \quad D_n = \sigma = q / S.$$

За формулою (2.7) будемо мати, що

$$D_{1n} = D_{2n} = q/S,$$

а із врахування (2.6)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = q/S.$$

Звідки отримаємо:

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}; \quad E_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}.$$

За формулами (2.4) і (2.6) знаходимо:

$$\sigma'_1 = P_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{q}{S}$$

і

$$\sigma'_2 = P_{2n} = -\varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2 = -(\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_0 E_2 = -\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{S}.$$

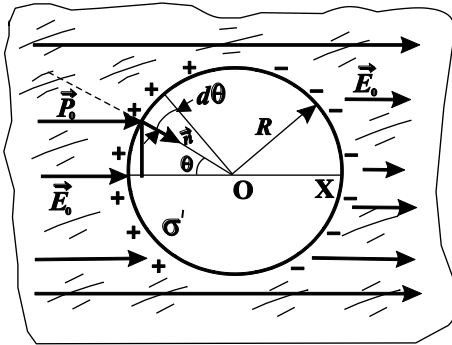


Рис. 2.7

Задача 2.5. В безмежному однорідному і ізотропному діелектрику, в якому створене відоме однорідне поле, напруженість якого E_0 , є сферична порожнина, радіус якої R (рис. 2.7). Знайти напруженість електричного поля в центрі порожнини.

Розв'язок. Задача дуже подібна до задачі 1.8 з тією різницею, що поверхнева густина заряду σ' за формулою (2.4) буде:

$$\sigma' = P_0 \cos \theta = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Як і в задачі 1.8, розділимо порожнину на тонкі кільця. Заряд такого кільця

$$dq = 2\pi R^2 \sigma' \sin \theta d\theta.$$

Проекція напруженості поля кільця на вісь OX в точці O буде:

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta.$$

Звідки після інтегрування знаходимо напруженість однієї напівсфери:

$$E_{1x} = \frac{P_0}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\epsilon - 1}{6} E_0.$$

Напруженість поля двох напівсфер

$$E_{2x} = 2E_{1x} = \frac{\epsilon - 1}{3} E_0.$$

Сумарна напруженість поля в точці O

$$E = E_0 + E_{2x} = \frac{\epsilon + 2}{3} E_0.$$

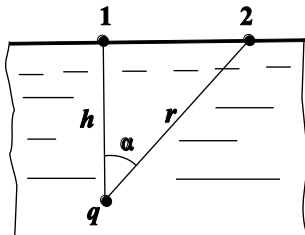


Рис. 2.8

Задача 2.6. У гас ($\epsilon = 2$) на глибині $h = 4$ см від вільної поверхні (поверхня, що межує з повітрям), знаходиться точковий заряд $q = 30$ нКл (рис. 2.8). Визначити густину поляризаційних (зв'язаних) зарядів на поверхні гасу: а) над зарядом в точці 1 і б) на відстані $r = 8$ см від заряду в точці 2; в) визначити сумарну величину зв'язаних зарядів на поверхні гасу.

Аналіз. Під дією електричного поля заряду q гас буде поляризуватись, що викличе появу поляризаційних (зв'язаних)

зарядів на вільній поверхні гасу. Для розв'язку задачі будемо користуватись формулами: (2,4), (2,6), (2,7).

Розв'язок. а) Розглянемо спочатку точку 1. За формулами (2.4) і (2.6) поверхнева густина зв'язаних зарядів в цій точці буде

$$\sigma'_1 = P_{n1} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_{1n},$$

де E_{1n} – проекція напруженості електричного поля в гасі на нормаль \vec{n} в точці 1 (рис. 2.9). $E_{1n} = E_1 - E'_1$, де $E_1 = q/(4\pi\varepsilon_0 h^2)$ – напруженість поля, яку в точці 1 створює заряд q , $E'_1 = \sigma'_1/2\varepsilon_0$ – напруженість, що створюється зарядженою поверхнею в точці 1. Тоді

$$\sigma'_1 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2} - \frac{\sigma'_1}{2\varepsilon_0} \right).$$

Звідки знаходимо:

$$\sigma'_1 = \frac{q}{2\pi h^2} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (1)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma'_1 = \frac{30 \cdot 10^{-9}}{2\pi(4 \cdot 10^{-2})^2} \cdot \frac{2 - 1}{2 + 1} \frac{\text{Ев}}{\text{м}} = 1 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Ев}}{\text{м}}^2.$$

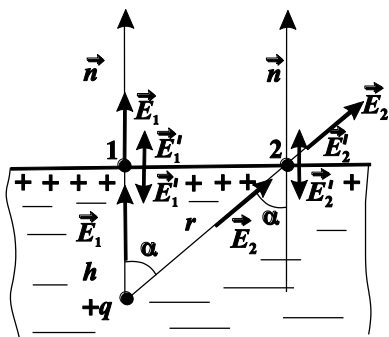


Рис. 2.9

Формулу (1) можна отримати із формули (2.7), а саме $D_{1n} = D_{2n}$.

Гас будемо вважати першим середовищем, а повітря другим середовищем. Тоді згідно рисунка 2.9 і формули (2.6)

$$(E_1 - E'_1)\varepsilon_0 = (E_1 + E'_1)\varepsilon_0.$$

Із цього співвідношення можна отримати формулу (1).

б) Для точки 2 аналогічно як і для точки 1 можемо записати:

$$\sigma'_2 = P_{2n} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0(E_2 \cos \alpha - E'_2),$$

де $E_2 = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ – напруженість поля, яку створює заряд q в точці 2, σ'_2 – густина зв'язаних зарядів, $E'_2 = \sigma'_2/(2\varepsilon_0)$, $\cos \alpha = h/r$. Тоді

$$\sigma'_2 = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \frac{h}{r} - \frac{\sigma'_2}{2\varepsilon_0} \right).$$

З цього співвідношення знаходимо, що

$$\sigma'_2 = \frac{qh}{2\pi r^3} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}. \quad (2)$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\sigma'_2 = \frac{30 \cdot 10^{-9} \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2\pi(8 \cdot 10^{-2})^3} \cdot \frac{2 - 1}{2 + 1} \hat{\varepsilon} = 0,124 \hat{\varepsilon} \text{ нКл/м}^2.$$

Формулу (2) можна отримати за допомогою співвідношення (2.7) для точки 2, а саме

$$(E_2 \cos \alpha - E'_2)\varepsilon_0 = (E_2 \cos \alpha + E'_2)\varepsilon_0.$$

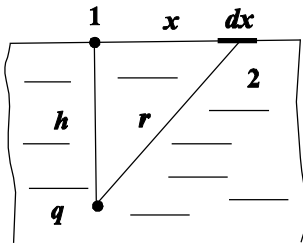


Рис. 2.10

З цього співвідношення легко отримати формулу (2).

в) Для розрахунку сумарної величини зв'язаних зарядів розглянемо нескінченно вузьке кільце, радіус якого x , центр знаходиться в точці 1, а ширина кільця dx (рис. 2.10). Площа такого

кільця $dS = 2\pi x dx$. Заряд на ньому дорівнює $dq' = \sigma'_2 dS$. Якщо використати формулу (2) із врахуванням, що $r = \sqrt{h^2 + x^2}$, то

$$dq' = \frac{qh(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{xdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Повний заряд на всій поверхні:

$$q' = \frac{qh(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1} \int_0^\infty \frac{xdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} = 10 \text{ іФЕ}.$$

При отриманні цього результату враховано, що інтеграл дорівнює $1/h$.

Задача 2.7. Визначити ємність провідника у вигляді кулі, радіус якої $R_1 = 10$ см. Куля оточена концентричним шаром однорідного діелектрика ($\varepsilon = 6$) із зовнішнім радіусом $R_2 = 15$ см, який щільно прилягає до кулі (рис. 2.11). Порівняти значення ємності кулі з ємністю конденсатора з такими ж параметрами.

Розв'язок. Надамо кулі деякий заряд q . Тоді біля поверхні провідника ззовні нього виникає електричне поле. Якщо знайдемо потенціал провідника $\varphi(R_1)$, то за формулою (2.10) зможемо знайти електроємність C .

Перемістимо уявно деякий пробний заряд із точки 1 в точку 3. При цьому згідно формули (1.12) буде виконана робота

$$A_{13} = \frac{qq_{i\delta}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} - \frac{qq_{i\delta}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{qq_{i\delta}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} - \frac{qq_{i\delta}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}.$$

Тоді різниця потенціалів між точками 1 і 3 згідно (1.13) буде:

$$\varphi(R_1) - \varphi(R_3) = \frac{A_{13}}{q_{i\delta}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon R_1} - \frac{1}{\varepsilon R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right).$$

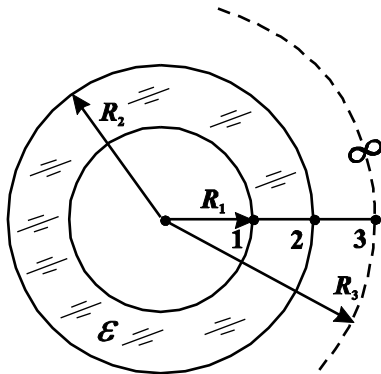


Рис. 2.11

Якщо прийняти $\varphi(R_3) = 0$ при умові, що $R_3 \rightarrow \infty$, то потенціал в точці 1 (тобто потенціал кулі) буде:

$$\varphi(R_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}(\epsilon - 1)\right).$$

Звідки знаходимо, що електроємність кулі

$$C = \frac{q}{\varphi(R_1)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(\epsilon - 1)} = 15,4 \text{ і Ф.}$$

За формулою (2.14) електроємність конденсатора буде:

$$\tilde{N}' = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 200 \text{ і Ф.}$$

Задача 2.8. Визначити ємність сферичного конденсатора з радіусами обкладок $R_1 = 10$ см і $R_2 = 15$ см (рис. 2.12), який заповнений ізотропним діелектриком, проникність якого змінюється за законом $\epsilon = a/r^2$, де $a = 0,006 \text{ м}^2$ – постійна, r – відстань від центру конденсатора ($R_1 \leq r \leq R_2$).

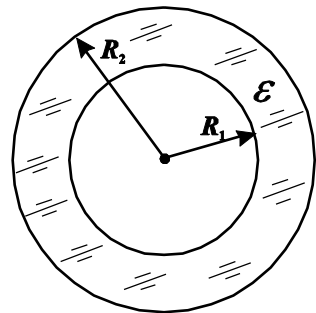


Рис. 2.12

Розв'язок: Надамо внутрішній обкладці заряд q . Тоді напруженість поля всередині діелектрика буде:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Так як $E = -\frac{d\varphi}{dr}$, то $d\varphi = -E dr$ і різниця потенціалів між сферами:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} (R_1 - R_2).$$

Звідки знаходимо, що ємність такого конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}} \text{ Ô} = 133,5 \text{ Ô}$$

Задача 2.9. Циліндричний конденсатор, радіуси обкладинок якого $R_1 = 1$ см, $R_2 = 1,5$ см, заповнений двома коаксіальними шарами діелектрика (рис. 2.13). Перший шар просякнутий папір ($\epsilon_1 = 4$), другий – кераміка ($\epsilon_2 = 7$). Радіус межі розділу діелектриків $R_0 = 1,3$ см. При якій різниці потенціалів між обкладинками почнеться пробій конденсатора? Гранична напруженість поля для паперу $E_{1\max} = 12$ МВ/м; для кераміки $E_{2\max} = 10$ МВ/м.

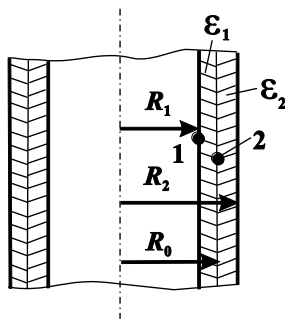


Рис. 2.13

Аналіз. Граничною або пробійною називається така напруженість електричного поля при якій починається руйнування молекул діелектрика. Сам процес пробію дуже складний, тому в електростатиці можна говорити тільки про початок пробію і не розглядати подальший розвиток процесу.

В даній задачі необхідно перш за все визначити, який із двох шарів діелектрика при підвищенні різниці потенціалів між обкладинками буде пробитий першим, тобто в якому діелектрику напруженість досягне граничного

значення. Поле всередині конденсатора неоднорідне і напруженість зменшується із збільшенням відстані від осі системи. Тому пробій може початись в точках, найбільш близьких до осі системи, тобто в першому шарі при $r = R_1$, в другому – при $r = R_0$.

Аналогічно як в задачах 1.3, 2.1 можемо отримати, що модуль вектора електричного зміщення

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}, \quad (1)$$

де λ – лінійна густина заряду на внутрішній обкладинці, r – відстань від якої точки конденсатора до осі системи. При цьому вектор \vec{D} нормальний до межі розділу і вираз (1) справедливий в будь-якій точці конденсатора. Врахувавши (2.6) отримаємо вираз для напруженості поля у вказаних вище точках:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 R_1} \quad (r = R_1), \\ E_2 &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 R_0} \quad (r = R_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Значення цих напруженостей залежить від λ , тобто зростають із збільшенням заряду, а значить, і різниці потенціалів на обкладинках, але їх відношення залишається незмінним, так як згідно (2.7) $D_{1n} = D_{2n}$. Тобто:

$$E_1 / E_2 = \varepsilon_2 R_0 / \varepsilon_1 R_1 = 7 \cdot 1,3 / (4 \cdot 1) = 2,275.$$

Це відношення дозволяє визначити в якому шарі почнеться пробій. Прирівнявши E_1 або E_2 відповідній пробійній напруженості поля, визначимо значення λ_{\max} , при якій настає пробій. Різницю потенціалів при цьому знайдемо за формулою (1.18):

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr. \quad (3)$$

Розв'язок. Відношення пробивних значень напруженостей $E_{1\max}/E_{2\max} = 1,2$, а відношення цих напруженостей при лобій різниці потенціалів $E_1/E_2=2,275$. Це означає, що коли в точці 1 (папір) напруженість буде пробійною (12 МВ/м), то в точці 2 (кераміка) напруженість буде 5,275 МВ/м, тобто меншою, ніж пробійна напруженість кераміки. Таким чином, пробій почнеться в папері. Тоді із (2) отримаємо:

$$\lambda_{\max} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_1 R_1 E_{1\max}. \quad (4)$$

Щоб знайти різницю потенціалів, необхідно знайти $E(r)$. Із (1) отримаємо:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r} \quad (R_1 < r < R_0),$$

$$E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 r} \quad (R_0 < r < R_2).$$

$E(r)$ терпить розрив при $r = R_0$. Тому інтеграл в (3) розбиваємо на два:

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \int_{R_1}^{R_0} \frac{dr}{r} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \int_{R_0}^{R_2} \frac{dr}{r}.$$

Враховавши, що $\int \frac{dr}{r} = \ln r$, отримаємо, що

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).$$

Підставимо $\lambda = \lambda_{\max}$ із (4):

$$U_{\max} = \varepsilon_1 R_1 E_{1\max} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \ln \frac{R_0}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_0} \right).$$

Підставимо числові значення:

$$U_{\max} = 4 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{4} \ln \frac{1,3}{1} + \frac{1}{7} \ln \frac{1,5}{1,3} \right) \text{В} = 41,3 \text{ В}.$$

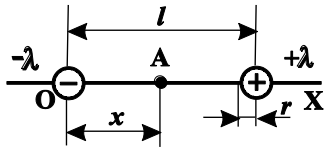


Рис. 2.14

Задача 2.10. Визначити електроємність двопровідної лінії, що приходить на одиночну довжину. Вважати, що інші тіла знаходяться далеко від лінії і їхнім впливом на електричне поле між провідниками можна знехтувати. Прийняти, що

радіуси проводів $r = 0,5$ мм, а відстань між ними $l = 10$ мм.

Розв'язок. Будемо вважати, що провідники прямі, тонкі, безмежно довгі і паралельні. Нехай вони заряджені з лінійними густинами $-\lambda$ і $+\lambda$. Тоді напруженість електричного поля в точці А (рис. 2.14) згідно формули (1.11) і принципу суперпозиції (1.4) буде:

$$\vec{A} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 \tilde{\sigma}} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(l - \tilde{\sigma})}.$$

Враховуючи зв'язок між напруженістю і потенціалом (1.17) знайдемо різницю потенціалів між проводами:

$$|\Delta\varphi| = \int_r^{l-r} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left(\int_r^{l-r} \frac{dx}{x} + \int_r^{l-r} \frac{dx}{l-x} \right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{l-r}{r}.$$

Тоді ємність лінії одиничної довжини буде:

$$C = \frac{\lambda}{|\Delta\phi|} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{l-r}{r}} = \frac{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\ln \frac{10-0,5}{0,5}} \text{ Ф/л.} = 9,45 \text{ і Ф/м.}$$

Задача 2.11. Тонка нескінченно довга нитка рівномірно заряджена електрикою з лінійною густиною $\lambda = 10,55 \text{ нКл/м}$ і розташована паралельно

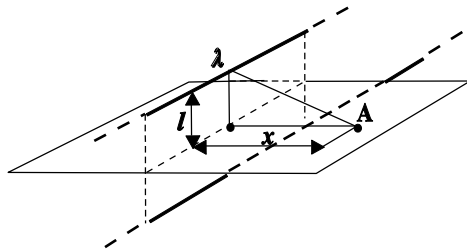


Рис. 2.15

безмежній провідній площині на відстані $l = 10 \text{ см}$ від неї (рис. 2.15). Знайти: а) модуль вектора сили, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини;

б) розподіл поверхневої густини заряду на площині, де x – відстань від площини, яка проходить через нитку і перпендикулярна до провідної площини.

Розв'язок. Для визначення сили, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини, необхідно розрахувати поле її зображення. За формулою (1.11) напруженість цього поля

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(2l)}.$$

Тоді сила, яка діє на ділянку нитки одиничної довжини,

$$F = E\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{(10,55 \cdot 10^{-9})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} \text{ Н} = 10 \text{ мкН.}$$

Для відповіді на друге питання задачі необхідно визначити напруженість поля в точці А. Для цього розглянемо рис. 2.15 в іншій проекції. „Дзеркальне” зображення нитки в провідній площині будемо вважати ниткою зарядженою негативним зарядом рис. 2.16. Як видно з рис. 2.16. напруженість поля в точці А згідно принципу суперпозиції

$$\vec{E}_A = \vec{E}^+ + \vec{E}^-,$$

де $|\vec{E}^+| = |\vec{E}^-| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\sqrt{l^2 + x^2}}$ – напруженості полів створюваних

кожного ниткою. Внаслідок симетрії задачі $|\vec{E}_A| = 2|\vec{E}^-| \cos \alpha$, де

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}.$$

Тоді напруженість поля в точці А буде

$$|\vec{E}_A| = \frac{\lambda l}{\pi\epsilon_0(l^2 + x^2)}. \quad (1)$$

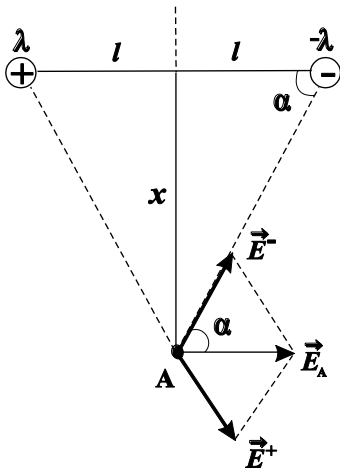


Рис. 2.16

Напруженість поля індукованих зарядів біля провідної поверхні (поза нею) за формулою (2.9) буде:

$$E' = \sigma / \epsilon_0. \quad (2)$$

Індуквані заряди розподіляються так, що їхнє поле всередині площини компенсує зовнішнє поле E_A (напруженість поля всередині провідника, який розташований в електростатичному полі, дорівнює

нулю):

$$\vec{E}_A + \vec{E}' = 0, \text{ або } |\vec{E}_A| = |\vec{E}'|. \quad (3)$$

Підставивши (1) і (2) в (3) отримаємо:

$$\sigma = \frac{\lambda l}{\pi(l^2 + x^2)} \approx \frac{0,336}{0,01 + x^2} \text{ іВм}^2.$$