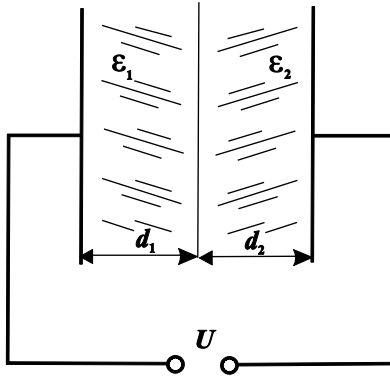


**Задача 2.12.** Плоский конденсатор, площа пластин якого  $S = 500 \text{ см}^2$ , заповнений двома шарами із діелектриків. Межа між ними паралельна обкладкам. Перший шар слюда ( $\epsilon_1 = 7,5$ ) товщиною



**Рис. 2.17**

напруженості електричного поля треба скористатись співвідношенням (1.18), з якого

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (1)$$

**Розв'язок.** Так як поле в конденсаторі однорідне, то рівність (1) можна записати так:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \quad (2)$$

де  $E_1$  – напруженість поля в слюді,  $E_2$  – напруженість поля в склі. Межа розділу діелектриків паралельна обкладкам конденсатора і тому вона нормальна силовим лініям поля. Згідно (2.7)

$$D_1 = D_2 \quad \text{і} \quad \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2. \quad (3)$$

Рівняння (2) і (3) представляють собою систему рівнянь відносно невідомих  $E_1$  і  $E_2$ . Розв'язок цих рівнянь дає:

$$E_1 = \epsilon_2 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2); \quad E_2 = \epsilon_1 U / (\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2). \quad (4)$$

В межах кожного шару густина енергії постійна і згідно (2.15):

$$\omega_1 = \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{2}. \quad (5)$$

Тоді за формулою (2.16) енергія конденсатора

$$W = \omega_1 V_1 + \omega_2 V_2,$$

де  $V_1 = Sd_1$ , а  $V_2 = Sd_2$ . Із урахуванням (4) і (5) отримаємо:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 U^2 S}{2(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)} = \frac{7,5 \cdot 6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 16 \cdot 10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{2(6 \cdot 10^{-3} + 7,5 \cdot 3 \cdot 10^{-3})} \text{ Дж} = \\ &= 56 \text{ мкДж}. \end{aligned}$$

Для знаходження енергії цього зарядженого конденсатора за формулою (2.17) розрахуємо його ємність. Даний конденсатор можна розглядати як два послідовно з'єднані конденсатори, ємність кожного з яких  $\epsilon$  :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d_1}; \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_2}.$$

Тоді ємність комбінованого конденсатора буде

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

і за (2.17) отримаємо вираз для енергії конденсатора, який буде співпадати із раніше отриманим.

**Задача 2.13.** Повітряний конденсатор, ємність якого  $C_1 = 0,4 \text{ мкФ}$ , заряджений до різниці потенціалів  $U_0 = 1000 \text{ В}$ . Знайти зміну енергії конденсатора і роботу сил поля при заповненні конденсатора рідким діелектриком (чиста вода  $\varepsilon = 81$ ). Розрахунок виконати для двох випадків: 1) заповнення конденсатора рідиною

відбувається при відключеному джерелі напруги; 2) заповнення конденсатора рідиною відбувається при включеному джерелі напруги.

**Аналіз.** Робота  $A$  сил кулонівського поля конденсатора може бути розрахована із рівняння енергетичного балансу:

$$\Delta W = -A + A_{\text{джер}}, \quad (1)$$

де  $\Delta W$  – зміна енергії конденсатора,  $A_{\text{джер}}$  – робота джерела напруги по перенесенню заряду в колі.

При внесенні діелектрика в електричне поле конденсатора сили поля здійснюють позитивну роботу  $A$  незалежно від того, відключений попередньо конденсатор від джерела чи ні. Сили кулонівського поля поляризують діелектрик, втягують його в область більшої напруженості. Таким чином  $A > 0$ .

В першому випадку за рахунок цієї позитивної роботи сил поля енергія конденсатора зменшується. В другому випадку напруга на обкладинках конденсатора залишається незмінною, значить при внесенні діелектрика заряд конденсатора повинен зростати. Це значить, що джерело напруги «посилає» додатковий заряд конденсатору, здійснюючи позитивну роботу і характер зміни енергії конденсатора наперед невідомий.

Очевидно, що в першому випадку ( $q = \text{const}$ ) і зміну енергії конденсатора зручно розраховувати за формулою (2.17)

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_2} - \frac{q^2}{2C_1}, \quad (2)$$

а в другому ( $U = \text{const}$ ) –

$$\Delta W = \frac{C_2 U_0^2}{2} - \frac{C_1 U_0^2}{2}, \quad (3)$$

де  $C_2 = \epsilon C_1$ , оскільки діелектрик повністю заповнює весь конденсатор.

**Розв'язок.** 1. В першому випадку  $A_{\text{джер}} = 0$  (джерело відключене при заповненні конденсатора діелектриком) і рівняння (1) з урахуванням (2) запишеться:

$$\Delta W = \frac{q^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon C_1} - \frac{1}{C_1} \right) = -A_1,$$

або, врахувавши, що  $q = C_1 U_0$  –

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0^2}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2} \left( \frac{1}{81} - 1 \right) = -0,2 \text{ Дж};$$

$$A_1 = 0,2 \text{ Дж}.$$

2. Конденсатор весь час підключений до джерела напруги. Згідно (3) зміна енергії конденсатора буде:

$$\Delta W = \frac{C_1 U_0^2}{2} (\varepsilon - 1) = \frac{0,4 \cdot 10^{-6} \cdot 10^6}{2} (81 - 1) \text{ Дж} = 16 \text{ Дж}.$$

Звернемо увагу на те, що в цьому випадку хоч сили кулонівського поля здійснювали позитивну роботу, енергія конденсатора суттєво збільшилась, що можливо тільки за рахунок роботи джерела живлення по перенесенню заряду  $\Delta q = C_2 U_0 - C_1 U_0 = C_1 U_0 (\varepsilon - 1)$ . Ця робота дорівнює

$$A_{\text{джер}} = \Delta q \cdot U_0 = C_1 U_0^2 (\varepsilon - 1) = 2\Delta W.$$

Тоді згідно (1)

$$A_2 = A_{\text{джер}} - \Delta W = \Delta W = 16 \text{ Дж}.$$

Як видно,  $A_2 \gg A_1$ . Це пояснюється тим, що в першому випадку в процесі заповнення конденсатора діелектриком сили поля слабшають.

**Задача 2.14.** Заряд  $q$ , рівномірно розподілений в вакуумі по об'єму, який має форму кулі, радіус якої  $R$ . Розрахувати енергію електричного поля.

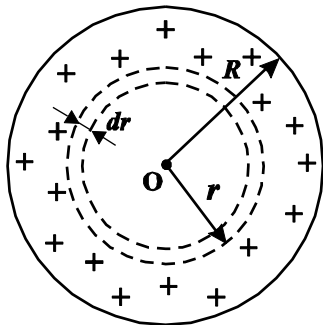


Рис. 2.18

Напруженість поля в середині кулі знайдемо за законом (2.5)

$$E_1(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (1)$$

де  $\rho = q / (\frac{4}{3}\pi R^3)$  – густина заряду. Тоді об'ємна густина енергії

$$\omega_1 = \frac{\epsilon_0 E_1(r)^2}{2} = \frac{q^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \quad (r < R). \quad (2)$$

Для випадку, коли ( $r > R$ ), напруженість поля визначається за формулою для точкового заряду, а саме:

$$E_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

а об'ємна густина заряду –

$$\omega_2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} \quad (r > R). \quad (3)$$

**Аналіз.** Заряд  $q$  створює електричне поле як в області, яку займає він сам, так і поза нею. За формулою (2.16) можемо розрахувати енергію електричного поля, де об'ємну густину енергії електричного поля будемо визначати за формулою (2.15).

**Розв'язок.** 1. Розглянемо випадок  $r \leq R$ , де  $r$  відстань, що відраховується від центра кулі.

Так як залежність  $\omega(r)$  різна для областей простору всередині і зовні заряду  $q$ , інтеграл (2.16) в правій частині розіб'ємо на два:

$$W = \int_{V_1} \omega_1 dV + \int_{V_2} \omega_2 dV, \quad (4)$$

де  $V_1$  – об'єм простору, який займає заряд  $q$ ;  $V_2$  – об'єм простору поза кулею. Враховуючи симетрію задачі, за об'єм  $dV$  необхідно вибрати тонкий кульовий шар, товщина якого  $dr$ , а радіус  $r$  (в межах такого об'єму  $W$  і  $\omega$  постійні):

$$dV = 4\pi r^2 dr. \quad (5)$$

Підставляючи вирази (2), (3) і (5) в (4) отримаємо, що

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right) = \frac{3q^2}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

**Задача 2.15.** Пояснити, чому всі заряди, які знаходяться на пластині плоского конденсатора, не дивлячись на їхнє взаємне відштовхування, розташовуються на внутрішній поверхні пластини (тобто на тій поверхні, яка повернута до сусідньої пластини).

**Розв'язок.** Пластини конденсатора є провідниками. Допустимо,

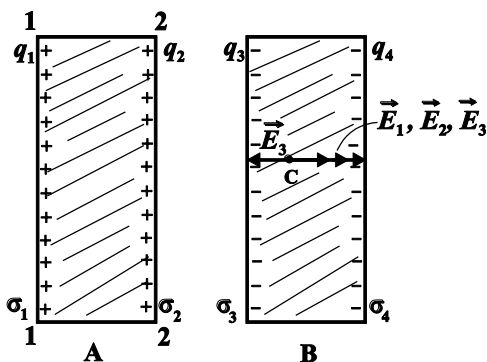


Рис. 2.19

що заряди розподілені і по зовнішній 1 – 1 і по внутрішній 2 – 2 площині пластини А (всередині провідника при електричній рівновазі зарядів не має). Якщо вважати пластини безмежними (відстань між пластинами і їхня товщина є набагато меншими порівно з

лінійними розмірами пластин), то заряди розподіляються по поверхнях рівномірно. Тому заряджений конденсатор можна представити як систему чотирьох рівномірно заряджених площин. Нехай заряди на них  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , а поверхневі густини зарядів  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  (рис. 2.19). Тоді напруженість поля в будь-якій точці С всередині пластини В згідно принципу суперпозиції (1.4) та формули(1.9) буде:

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_4| - |\sigma_3|) = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (|q_1| + |q_2| + |q_4| - |q_3|),$$

де  $S$  – площа пластин.

Так як  $|q_1| + |q_2| = |q_3| + |q_4|$ , то

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} (|q_3| + |q_4| + |q_4| - |q_3|) = \frac{|q_4|}{\varepsilon_0 S}.$$

З другої сторони напруженість в точці С всередині провідника дорівнює нулеві, тобто  $E_c = 0$  і як наслідок  $q_4 = 0$ . Це означає, що на зовнішній поверхні пластини В зарядів не має, всі заряди розподіляються по внутрішній поверхні пластини. Із симетрії задачі зрозуміло, що і на пластині А заряди розподіляються тільки по її

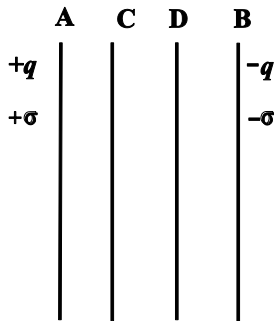


Рис.2.20

**Задача 2.16.** В поле плоского конденсатора АВ розміщують дві, паралельні пластинам А і В, провідні незаряджені пластини С і D (рис. 2.20). Відстані  $AC = CD = DB = d/3 = 1$  см. Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U = 90$  В.

Пластинки С і D з'єднують провідником, а

потім роз'єднують. Після цього цю ж процедуру проводять із пластинами А і В. Визначити: а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В? б) Чи є заряди на пластинах С і D? в) Яка напруженість поля між пластинами А і С, С і D, D і В?

**Розв'язок.** Електричне поле конденсатора зосереджене між пластинами А і В. Напруженість поля

$$E = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{d} = \frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

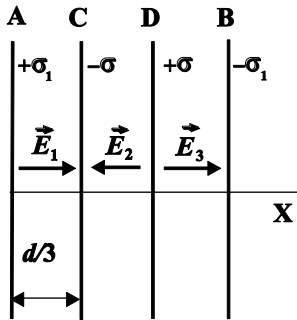


Рис. 2.21

Звідки знайдемо, що початкова густина заряду на пластинах А і В за модулем дорівнює  $\sigma = \epsilon_0 U / d$ . На пластинах С і D зарядів не має. Коли з'єднати пластини С і D провідником, то потенціали їх повинні стати однаковими. Для цього відбудеться переміщення заряду по провіднику до тих пір, поки напруженість поля між пластинами С і D не стане дорівнювати нулеві. Це буде тоді, коли пластина С зарядиться

негативно з поверхневою густиною  $-\sigma$ , а пластина D – позитивно з поверхневою густиною  $+\sigma$ . Різниця потенціалів між пластинами С і D  $\varphi_C - \varphi_D = 0$ . Коли пластини С і D роз'єднати, то заряди на них залишаються (рис. 2.21).

Коли з'єднати провідником пластини А і В, то різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ , це означає, що на цих пластинах відбудеться перерозподіл зарядів і густина заряду пластини А стане  $+\sigma_1$ , а пластини В –  $-\sigma_1$ . Напруженості полів між пластинами А і С та D і В будуть однаковими  $\vec{E}_1 = \vec{E}_3$ .

$$E_1 = \frac{+\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{|-\sigma|}{2\epsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}.$$



Напруженість поля між пластинами С і D буде:

$$E_2 = \frac{+\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{|-\sigma|}{2\varepsilon_0} - \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{|-\sigma_1|}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Так як  $\varphi_A - \varphi_B = 0$ , то формально (маючи на увазі, що  $|\sigma_1| < |\sigma|$  і  $E_2 < 0$ )

$$E_1 \cdot \frac{d}{3} + E_2 \cdot \frac{d}{3} + E_3 \cdot \frac{d}{3} = (2E_1 + E_2) \frac{d}{3} = 0,$$

або

$$2\sigma_1 + \sigma_1 - \sigma = 0.$$

Звідки знаходимо, що  $\sigma_1 = \sigma/3$ . Тоді

$$E_1 = E_3 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} = \frac{U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ кВ/м},$$

а

$$E_2 = \frac{\sigma}{3\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{2U}{3d} = \frac{90}{3 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = -2 \text{ кВ/м}.$$

Знак «-» означає, що напруженість поля  $\vec{E}_2$  направлена проти осі X (рис.2. 21). Різниця потенціалів між пластинами А і С і D і B буде:

$$\varphi_A - \varphi_C = \varphi_D - \varphi_B = E_1 \frac{d}{3} = \frac{U}{9} = 10 \text{ В},$$

а між пластинами С і D –

$$\varphi_C - \varphi_D = E_2 \frac{d}{3} = -\frac{2U}{9} = -20 \text{ В}.$$

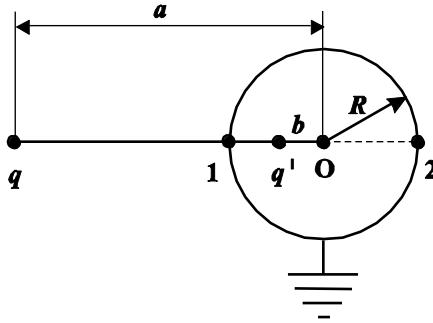


Рис. 2.22

**Задача 2.17.** Точковий заряд  $q = 0,1$  мкКл знаходиться на відстані  $a = 10$  см від центру заземленої провідної кулі, радіус якої  $R = 5$  см. З якою силою  $F$  заряд  $q$  притягується до кулі? Яку роботу  $A$  треба затратити, щоб точковий

заряд видалити на безмежність?

**Аналіз.** Поле заряду  $q$  наводить на кулі заряд  $q'$ . Враховуючи симетрію кулі, поле наведеного на кулі заряду можна замінити полем точкового заряду, який розміщений на відстані  $b$  від центру кулі (рис. 2.22.) Величину заряду  $q'$  і відстань  $b$  знайдемо із умови, що потенціал заземленої кулі дорівнює нулеві. Тоді сила взаємодії заряду  $q$  із кулею дорівнює силі взаємодії між зарядами  $q$  і  $q'$ .

**Розв'язок.** Потенціали точок 1 і 2 (рис. 2.22) дорівнюють нулеві. Згідно принципу суперпозиції

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a-R)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R-b)} = 0, \quad (1)$$

$$\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(a+R)} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R+b)} = 0. \quad (2)$$

Розв'язуючи ці два рівняння відносно  $q'$  і  $b$  знаходимо:

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad (3)$$

$$b = R^2 / a. \quad (4)$$

Тоді сила взаємодії заряду  $q$  і кулі буде:

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)^2} = -\frac{q^2R/a}{4\pi\epsilon_0(a-\frac{R^2}{a})^2} =$$

$$= -\frac{q^2Ra}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)^2} = -8 \text{ мН.}$$

Знак « $\rightarrow$ » означає, що заряд  $q$  притягується до кулі.

Так як заряд  $q$  буде переміщуватись в електричному полі, то

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1,$$

де  $W_2 = 0$  (потенціальну енергію на безмежності приймаємо за нуль),  
а

$$W_1 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(a-b)}.$$

Враховавши (3) і(4) даної задачі, отримаємо, що

$$A = -\frac{q^2R}{4\pi\epsilon_0(a^2-R^2)} = -0,6 \text{ мДж.}$$

Знак « $\rightarrow$ » означає, що роботу повинні виконати ми , щоб перенести заряд  $q$  на безмежність.

## 2.6. Задачі

**2.18.** В деякій точці ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  електричне зміщення має значення  $D = 14 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити поляризованість  $P$  діелектрика в цій точці.

**2.19.** Всередині діелектрика відомі його поляризованість

$$\vec{P} = a(2x\vec{i} + 4y\vec{j} + 6z\vec{k})$$

і напруженість поля

$$\vec{E} = a(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k})/\varepsilon_0,$$

де  $a$  – константа. а) Визначити густину  $\rho'$  зв'язаних зарядів і густину  $\rho$  сторонніх зарядів всередині діелектрика. б) Чому дорівнює діелектрична проникність  $\varepsilon$  матеріалу діелектрика?

**2.20.** Є дві безмежні паралельні площини, які заряджені з густинами заряду  $+\sigma$  і  $-\sigma$ . Спочатку вони знаходились у вакуумі. Потім зазор між площинами заповнюється однорідним ізотропним діелектриком з проникністю  $\varepsilon$ . Що відбувається при цьому з: а) напруженістю  $\vec{E}$  поля в зазорі, б) зміщенням  $\vec{D}$ , в) різницею потенціалів  $U$  між площинами?

**2.21.** В однорідному електричному полі з напруженістю  $E_0 = 100 \text{ В/м}$  розташована безмежна плоскопаралельна пластинка із однорідного і ізотропного діелектрика з проникністю  $\varepsilon = 2$ . Пластинка розташована перпендикулярно до  $\vec{E}_0$ . Визначити а) напруженість поля  $E$  і електричне зміщення  $D$  всередині пластинки, б) поляризованість діелектрика  $P$ , в) поверхневу густину зв'язаних зарядів  $\sigma'$ .

**2.22.** Скляна пластинка, проникність якої  $\varepsilon_2 = 6$ , розташована в однорідному електричному полі з напруженістю  $E_1 = 10 \text{ В/м}$  і розташована так, що кут  $\alpha_1$  між напрямком нормалі до пластинки і напрямком зовнішнього поля дорівнює  $150^\circ$ . Знайти напруженість  $E_2$  поля в пластинці, кут  $\alpha_2$ , який це поле утворює з нормаллю до пластинки, а також густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів, що виникають на поверхні пластинки. Вважати діелектричну проникність середовища поза пластинкою  $\varepsilon_1 = 1$ .

**2.23.** Плоский конденсатор, між обкладками якого розміщена скляна пластинка ( $\varepsilon = 6$ ) товщиною  $d = 2$  мм, заряджений до напруги  $U = 200$  В. Нехтуючи величиною зазору між пластинкою і обкладками, знайти поверхневу густину  $\sigma$  вільних зарядів на обкладках конденсатора, а також поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на склі.

**2.24.** Показати, що на межі однорідного, ізотропного діелектрика з провідником, поверхнева густина зв'язаних зарядів  $\sigma' = -(\varepsilon - 1)\sigma/\varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність діелектрика,  $\sigma$  поверхнева густина заряду на провіднику.

**2.25.** В середині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з  $\varepsilon = 5$  створене однорідне електричне поле з напруженістю  $E = 100$  В/м. Знайти максимальну поверхневу густину  $\sigma'_{\max}$  зв'язаних зарядів і середнє значення  $\sigma'$  одного знаку.

**2.26.** В середині кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\varepsilon = 7$  створене однорідне електричне поле, напруженість якого  $E = 100$  В/м. Радіус кулі  $R = 3$  см. Знайти повний зв'язаний заряд одного знаку.

**2.27.** Скляна пластинка ( $\varepsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 100$  В/м, і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає  $150^\circ$ . Визначити вектор поляризації скла. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\varepsilon_1 = 1$ .

**2.28.** Скляна пластинка ( $\varepsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 1$  кВ/м, і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і напрямком поля складає  $135^\circ$ . Визначити поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\varepsilon_1 = 1$ .

**2.29.** Скляна пластинка з проникністю ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, напруженість якого  $|\vec{E}| = 10/\text{м}$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до поверхні пластинки і напрямком поля складає  $120^\circ$ . Визначити вектор електричного зміщення  $\vec{D}$  в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 2$ .

**2.30.** Скляна пластинка з проникністю ( $\epsilon_2 = 6$ ) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого  $|\vec{D}| = 8,85 \text{ нКл/м}^2$ , і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до площини пластинки і вектором  $\vec{D}$  складає  $135^\circ$ . Знайти вектор  $\vec{E}$  напруженості електричного поля в пластинці. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 3$ .

**2.31.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) внесена в однорідне електричне поле, вектор індукції якого  $\vec{D}$  складає кут  $\alpha = 150^\circ$  з напрямком нормалі до поверхні пластинки.  $|\vec{D}| = 17,6 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити поверхневу густину  $\sigma'$  зв'язаних зарядів на поверхні пластинки. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.32.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) внесена в однорідне електричне поле і розташована так, що кут  $\alpha$  між напрямком нормалі до поверхні пластинки і напрямком поля складає  $120^\circ$ . Який кут складає вектор поляризації  $\vec{P}$  із напрямком нормалі до поверхні пластинки? Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 1$ .

**2.33.** Пластинка із однорідного ізотропного діелектрика ( $\epsilon_2 = 8$ ) знаходиться в однорідному електричному полі, вектор індукції якого  $|\vec{D}| = 35,4 \text{ нКл/м}^2$  і розташована так, що кут  $\alpha$  між

напрямок нормалі до поверхні пластинки і вектором  $\vec{D}$  складає  $30^\circ$ . Орт нормалі направлений із середовища 1 в середовище 2. Визначити поверхневу густину зв'язаних зарядів. Діелектрична проникність середовища поза пластинкою  $\epsilon_1 = 2$ .

**2.34.** Однорідно поляризована ізотропна діелектрична пластинка ( $\epsilon_2 = 8$ ) знаходиться в повітрі. Вектор поляризації  $\vec{P}$  складає кут  $135^\circ$  з напрямком нормалі до поверхні пластинки.

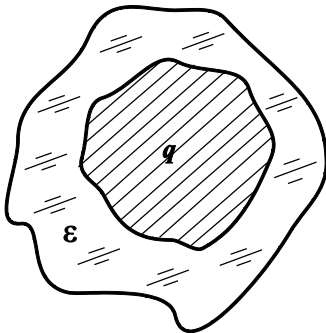


Рис. 2.23

$|\vec{P}| = 17,6 \text{ нКл/м}^2$ . Визначити вектор напруженості електричного поля в повітрі біля пластинки.

**2.35.** Провідник довільної форми, який має заряд, оточений однорідним діелектриком з проникністю  $\epsilon$  (рис. 2.23). Знайти сумарні поверхневі зв'язані заряди на внутрішній і зовнішній поверхнях діелектрика.

**2.36.** Точковий заряд  $q$  знаходиться в центрі кулі із однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon$ . Знайти поляризованість діелектрика, як функцію радіус-вектора  $\vec{r}$  відносно центру системи, а також заряд  $q'$  всередині сфери, радіус якої менший радіуса кулі.

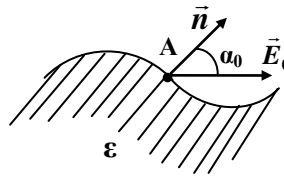


Рис. 2.24

**2.37.** Біля точки А (рис. 2.24) на межі розділу скло – вакуум напруженість електричного поля в вакуумі  $E_0 = 10 \text{ В/м}$ , причому кут між вектором  $\vec{E}_0$  і нормаллю  $\vec{n}$  до границі розділу  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Знайти напруженість

$E$  поля в склі біля точки  $A$ , кут  $\alpha$  між вектором  $\vec{E}$  і  $\vec{n}$ , а також поверхневу густану зв'язаних зарядів в точці  $A$ .

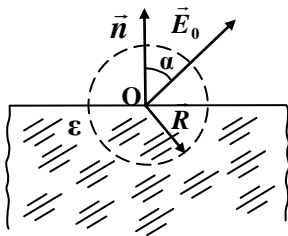


Рис. 2.25

$\alpha = 60^\circ$  з нормаллю до поверхні діелектрика (рис. 2.25). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним, знайти потік вектора  $\vec{E}$  через сферу, радіус якої  $R = 2$  см, а центр  $O$  знаходиться на поверхні діелектрика.

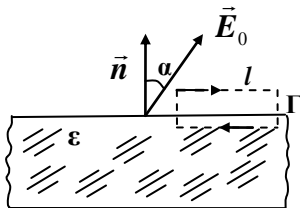


Рис. 2.26

$E_0 = 20$  В/м, причому вектор  $\vec{E}_0$  складає кут  $\alpha = 30^\circ$  з нормаллю до поверхні діелектрика (рис. 2.26.). Вважаючи поле всередині і зовні діелектрика однорідним знайти циркуляцію вектора  $\vec{D}$  по контуру  $\Gamma$ , довжина якого  $l = 1$  см. Площина контуру перпендикулярна до поверхні діелектрика і паралельна вектору  $\vec{E}_0$ .

**2.40.** Безмежна площина рівномірно заряджена позитивним зарядом з поверхневою густиною  $\sigma = 7,1$  нКл/м<sup>2</sup>. Знайти різницю

**2.38.** Біля плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює  $\vec{E}_0 = 10$  В/м, причому вектор  $\vec{E}_0$  складає кут

**2.39.** Біля плоскої поверхні однорідного ізотропного діелектрика з проникністю  $\epsilon = 7$  напруженість електричного поля в вакуумі дорівнює



**2.42.** Два точкових заряди  $q_1 = +7,91$  нКл і  $q_2 = +2,63$  нКл знаходяться на відстані  $d_1 = 4$  см один від одного. Між ними на однакових від них відстанях розташована провідна, заземлена пластина, товщина якої  $d_2 = 2$  см. Поверхні пластини перпендикулярні до прямої, яка з'єднує заряди.

а) Визначити силу, яка діє на пластину.

б) Як зміниться відповідь, якщо один із зарядів замінити таким же за величиною негативним зарядом?

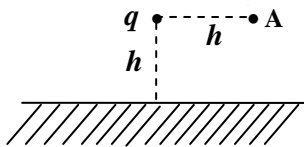


Рис. 2.27

**2.43.** На відстані  $h = 5$  м від провідної безмежної площини знаходиться точковий заряд  $q = 10$  нКл. Визначити напруженість поля в точці А (рис. 2.27), яка знаходиться на відстані  $h$  від заряду і площини.

**2.44.** Металічна куля, радіус якої  $R$ , з'єднана дуже тонким проводом із Землею. На відстані  $d = 2R$  від центра цієї кулі знаходиться електричний заряд  $+q$ . Чому дорівнює негативний заряд  $Q$  кулі? Поверхню Землі і всі інші предмети можна вважати досить віддаленими, а впливом проводу знехтували.

**2.45.** Металічна куля, радіус якої  $R$ , має заряд  $Q$ . Точковий заряд  $q$  розмішений на відстані  $d$  від центра кулі (рис. 2.28). Знайти потенціал кулі.

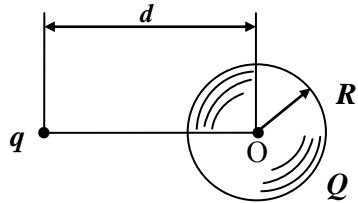


Рис. 2.28

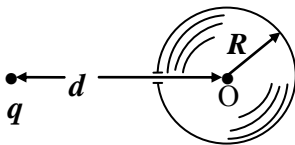


Рис. 2.29

**2.46.** Порожниста куля, радіус якої  $R$ , має заряд  $Q$ ; в кулі є малий отвір (рис. 2.29). Як буде змінюватись потенціал кулі, якщо точковий заряд

переміщувати із нескінченності через отвір всередину кулі?

**2.47.** Заряджений провідник знаходиться всередині замкнутої металічної оболонки.

1) Чи зміниться електричне поле всередині оболонки, якщо зовні піднести до неї заряджений провідник?

2) Чи зміниться поле зовні і всередині оболонки, якщо заряджений провідник, що знаходиться всередині оболонки, переміщувати всередині неї?

**2.48.** Система складається із двох концентричних провідних сфер, радіуси яких  $a$  і  $b$ . На внутрішній сфері знаходиться позитивний заряд  $q_1$ . Який заряд необхідно надати зовнішній сфері, щоб потенціал внутрішньої сфери став дорівнювати нулеві? Як буде залежати при цьому потенціал  $\varphi$  від відстані  $r$  до центра системи?

**2.49.** Із трьох – концентричних безмежно тонких металічних сфер, радіуси яких  $R_1 < R_2 < R_3$  відповідно, крайні заземлені, а середній надано заряд  $q$ . Сфери знаходяться у вакуумі. Знайти напруженість електричного поля у всьому просторі.

**2.50.** Показати, що робота при перенесенні першого точкового заряду від однакового за величиною, але протилежного за знаком другого точкового заряду на безмежність в 4 рази більша від роботи по перенесенню першого заряду на безмежність від безмежної провідної стінки, розташованої на такій же відстані, як і другий заряд.

**2.51.** Точковий заряд  $q = 1$  мкКл знаходиться на відстані  $l = 1$  см від безмежної провідної площини. Яку роботу необхідно виконати, щоб повільно видалити цей заряд на дуже велику відстань від площини?

**2.52.** Точковий заряд  $q$  знаходиться на відстані  $l$  від провідної безмежної площини. Визначити поверхневу густину зарядів, індукованих на площині, як функцію відстані  $r$  від основи перпендикуляра, що опущений із заряду на площину.

**2.53.** Точковий заряд  $q = 5,655$  мкКл знаходиться на відстані  $a = 3$  см від заземленої металічної стінки. Знайти поверхневу густину індукованого заряду на стінці:

- в точці, яка найближча до заряду;
- в точці, яка знаходиться на відстані  $r = 5$  см від заряду;
- довести, що сумарний індукований заряд на поверхні стінки дорівнює  $-q$ .

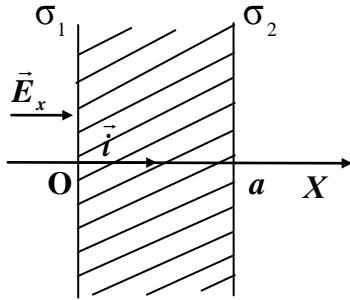


Рис.2.30

напруженість якого  $\vec{E}_x = E_0 \vec{i}$ , де  $E_0 = 565$  В/м, перпендикулярна площині пластини (рис. 2.30). Визначити напруженість поля  $\vec{E}'$  всередині і зовні пластинки, поверхневу густину зарядів  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , яка виникне на лівій і правій сторонах пластинки.

**2.55.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві паралельні провідні пластини С і D (рис. 2.31). Відстань  $AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $U$ . Визначити:

- Різницю потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В.
- Чи є заряди на пластинах С і

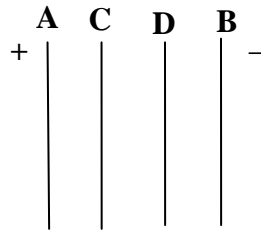


Рис. 2.31

**2.54.** Велику металічну пластинку, товщина якої  $a = 0,5$  см, зарядили так, що густина заряду на поверхні кожної сторони пластини дорівнює  $\sigma = 10$  нКл/м<sup>2</sup>. Потім пластинку розмістили в однорідне електричне поле,

D?

в) Напруженість поля між А і С, С і D, D і В.

**2.56.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві паралельні провідні пластини С і D (рис. 2.31). Відстань  $AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В спочатку є різниця потенціалів  $U$ . Пластини С і D з'єднуються провідником, а потім роз'єднуються.

Визначити:

- Різницю потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В;
- Чи є заряди на пластинках С і D ?;
- Напруженість поля між А і С, С і D, D і В.

**2.57.** Для умови задачі № 2.55 пластини D і В з'єднують провідником, а потім роз'єднують.

**2.58.** Для умови задачі № 2.55 пластини А і D з'єднують провідником, а потім роз'єднують.

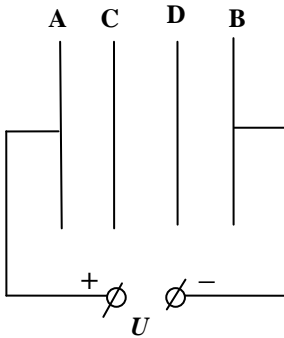


Рис. 2.32.

**2.59.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві провідні пластини С і D, які паралельні до пластин А і В (рис.2.32). Відстані  $AC = CD = DB = d/3$ . Між пластинами А і В підтримується різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U$ . Пластини D і В з'єднують провідником, а потім роз'єднують. Визначити: а) Яка буде різниця потенціалів між пластинами А і С, С і D, D і В? б) Чи є заряди на пластинках С і D? в) Напруженість

поля між А і С, С і D, D і В.

**2.60.** В поле плоского конденсатора АВ розмішують дві провідні пластини С і D, які паралельні до пластин А і В (рис.2.33). Відстані  $AC = CD = DB = d/3 = 1$  см. Між пластинами А і В підтримується

різниця потенціалів  $\varphi_A - \varphi_B = U = 90$  В. Пластинки С і D з'єднуються провідником, а потім роз'єднуються. Визначити:

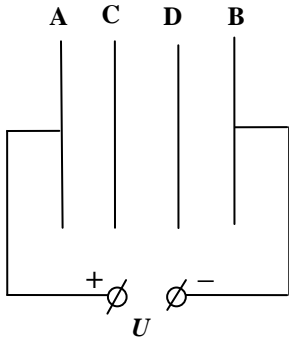


Рис. 2.33

а) Яка буде різниця потенціалів між пластинками А і С, С і D, D і В?

б) Яка буде густина заряду на пластинах С і D?

в) Яка стане напруженість поля між пластинами А і С, С і D, D і В?

**2.61.** Для умови попередньої задачі пластинки А і В від'єднують від джерела напруги. Проводять маніпуляції із пластинами С і D такі як в задачі 2.60. Потім пластини А і В з'єднують провідником, а потім їх

роз'єднують. Дати відповіді на запитання попередньої задачі.

**2.62.** В установках для очистки повітря від пилюки повітря пропускають через металічні трубки, по осі яких протягується металічний провід. Між проводом і трубою створюють сильне електричне поле, причому провід має негативний потенціал, а труба заземляється. Як будуть вести себе порошинки:

а) незаряджені?

б) заряджені негативно або позитивно? Відповідь пояснити.

**2.63.** Як відомо, кут розходження листочків електроскопа, який з'єднаний із зарядженим провідником, залежить від потенціалу провідника. Оцінити співвідношення між електроємностями провідника і електроскопа, щоб похибка вимірювання потенціалу провідника не перевищувала 5 %.

**2.64.** Показати, що формули для ємності циліндричного і сферичного конденсаторів переходять у формулу для ємності плоского конденсатора при малій різниці між радіусами внутрішньої та зовнішньої обкладок.

**2.65.** Плоский конденсатор складається із двох пластин, що знаходяться на відстані 0,5 мм одна від одної. Як зміниться ємність конденсатора, якщо його розмістити в ізолювану металічну коробку («екранувати»), стінки якої будуть знаходитись на відстані 0,25 мм від пластин (рис. 2.34). Спотворенням поля біля країв конденсаторів знехтувати.

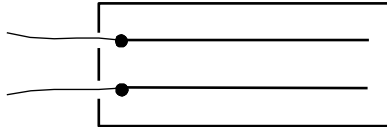


Рис. 2.34

**2.66.** Як зміниться ємність конденсатора (див. попередню задачу), якщо коробку з'єднати з однією із пластин конденсатора?

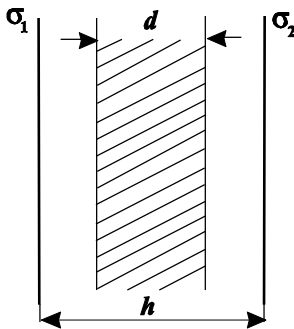


Рис. 2.35

**2.67.** Яка напруженість електричного поля  $E$  в повітряному зазорі плоского конденсатора, якщо різниця потенціалів між пластинами  $U = 200$  В? Відстань між пластинами  $d = 0,2$  см і між ними знаходиться лист скла ( $\epsilon = 7$ ), товщина якого  $h = 0,1$  см.

**2.68.** Дві паралельні пластини дуже малої товщини заряджені однойменно, причому поверхнева густина заряду на одній пластині  $\sigma_1 = 236$  нКл/м<sup>2</sup>, а на другій

$\sigma_2 = 72$  нКл/м<sup>2</sup>. Відстань між пластинами  $h = 1$  см мала порівняно з лінійними розмірами пластин. Між пластинами розміщена парафінова плоско – паралельна пластинка, товщина якої  $d = 5$  мм (рис. 2.35). Діелектрична проникність парафіну  $\epsilon = 2$ . Визначити різницю потенціалів між пластинами.

**2.69.** Для умови попередньої задачі визначити:

- 1) напруженість поля  $E_1$  між пластинами поза діелектриком;
- 2) напруженість поля  $E_2$  всередині діелектрика;
- 3) електричне

зміщення  $D$  між пластинами поза діелектриком і всередині діелектрика; 4) поляризованість  $P$  діелектрика.

**2.70.** Металічне тіло розміщують між пластинами плоского повітряного зарядженого конденсатора. На поверхні тіла виникають внаслідок електризації позитивні і негативні заряди. Після цього простір між пластинами заповнюють гасом ( $\epsilon = 2$ ). Чи зміниться величина наведених на тілі зарядів у випадках:

- заряд конденсатора залишається незмінним?
- напруга на конденсаторі підтримується незмінною?

**2.71.** До пластин плоского конденсатора, відстань між якими дорівнює  $d = 3$  см, подана різниця потенціалів  $U = 1000$  В. Простір між пластинами заповнюється діелектриком ( $\epsilon = 7$ ). Знайти:

- на скільки зміниться поверхнева густина заряду на пластинах при заповненні конденсатора діелектриком;
- поверхневу густину зв'язаних (поляризаційних) зарядів.

Задачу розв'язати для двох випадків: 1) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при включеному джерелі живлення; 2) заповнення конденсатора діелектриком відбувається при виключеному джерелі живлення.

**2.72.** Як зміниться різниця потенціалів між обкладинками усамітненого плоского конденсатора, якщо на одній із обкладинок заряд буде збільшений у два рази?

**2.73.** Плоский конденсатор має ємність 600 пФ. Як зміниться ємність цього конденсатора, якщо розмістити між обкладинками паралельно їм мідний лист, товщина якого дорівнює  $\frac{1}{4}$  відстані між обкладинками? Чи буде впливати на результат положення листа?

**2.74.** Два конденсатори, ємності яких  $C_1$  і  $C_2$ , з'єднані послідовно і підключені до джерела з е.р.с.  $\mathcal{E}$ . Визначити спад напруги  $U_1$  на конденсатор  $C_1$  і спад напруги  $U_2$  на конденсаторі  $C_2$ .

**2.75.** Металічна куля, радіус якої  $R_1 = 5$  см, оточена сферичним шаром діелектрика ( $\epsilon = 7$ ) товщиною  $d = 1$  см, що щільно прилягає до кулі. Куля разом із шаром діелектрика оточена

концентрично металічною сферою із внутрішнім радіусом  $R_2 = 7$  см. Визначити ємність такого конденсатора.

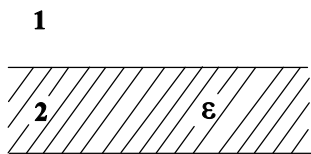


Рис. 2.36

$\vec{E}$  і  $\vec{D}$  в обох частинах зазору (1 і 2), якщо при заповненні діелектриком:

- а) напруга між обкладками не змінювалась;
- б) заряди на обкладках залишались незмінними.

**2.77.** Розв'язати попередню задачу з тією відмінністю, що діелектриком заповнили половину зазору, так як показано на рис. 2.37.



Рис. 2.37

**2.78.** Половину простору між двома концентричними обкладками сферичного конденсатора заповнено, як показано на рис. 2.38, однорідним ізотропним діелектриком з проникністю  $\epsilon$ . Заряд конденсатора дорівнює  $q$ . Знайти модуль вектора напруженості електричного поля між обкладками як функцію відстані  $r$  від центра кривизни цих обкладок.

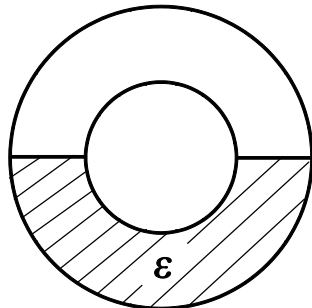


Рис. 2.38

**2.79.** Повітряний циліндричний конденсатор складається із прямого проводу, діаметр якого  $d = 5$  мм, і коаксіального з ним циліндра, діаметр якого  $D = 5$  см. До якої різниці потенціалів  $U$  можна зарядити цей



конденсатор, якщо діелектрична міцність повітря при заданих умовах дорівнює  $E = 30$  кВ/см?

**2.80.** Зазор між пластинами плоского повітряного конденсатора заповнили діелектриком з діелектричною проникністю  $\epsilon = 3$ . Як зміниться: а) заряд на пластинах; б) напруженість поля в конденсаторі; в) енергія конденсатора; г) густина енергії поля в конденсаторі? Розглянути два випадки. 1. Конденсатор весь час підключений до джерела живлення. 2. Конденсатор зарядили від джерела і тут же відключили від нього, а потім заповнили діелектриком.

**2.81.** Електрична проникність речовин суттєво змінюється при підвищенні температури (як правило зменшується). Допустимо, що заряджений конденсатор, який відключений від джерела зарядки, охолоджується, внаслідок чого його електрична енергія змінюється (наприклад зменшується). Куди щезає енергія конденсатора?

**2.82.** В кулі із однорідного ізотропного діелектрика, радіус якої  $R = 10$  см, а проникність  $\epsilon = 2$ , створена однорідна поляризованість  $|\vec{P}| = 3,25$  кКл/м<sup>2</sup>. Знайти енергію електричного поля, яка зосереджена всередині кулі.

**2.83.** Металева куля, радіус якої  $R = 3$  см, заряджена зарядом  $q = 0,02$  мкКл. Куля оточена шаром парафіну, товщина якого  $d = 2$  см. Визначити енергію електричного поля, яке зосереджене в шарі діелектрика.

**2.84.** Три конденсатори, ємність яких  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_3 = 3$  мкФ підключені до джерела живлення з напругою  $U = 1100$  В. Визначити енергію кожного конденсатора у випадку а) послідовного і б) паралельного їх підключення.

**2.85.** Два конденсатори ( $C_1 = 600$  пФ і  $C_2 = 1000$  пФ) з'єднані послідовно. Батарею заряджають до напруги  $U = 20$  кВ. Потім, не

розряджаючи конденсатори, з'єднують їх паралельно. Визначити роботу розряду, який відбувається при такому з'єднанні.

**2.86.** Повітряний конденсатор заряджається до деякого потенціалу і в зарядженому стані заливається гасом ( $\epsilon = 2$ ), від чого енергія конденсатора зменшується в  $\epsilon$  раз. Куди щезає частина енергії?

**2.87.** Заряджений конденсатор з'єднується паралельно з точно таким же незарядженим конденсатором. Показати, що при такому з'єднанні конденсаторів електрична енергія зменшується у два рази. Пояснити це.

**2.88.** В середині плоского конденсатора, площа пластин якого  $S = 200 \text{ см}^2$  і відстань між ними  $d = 0,1 \text{ см}$ , знаходиться пластинка із скла ( $\epsilon = 5$ ), яка повністю заповнює простір між пластинами конденсатора. Як зміниться енергія конденсатора, якщо видалити склянку пластику? Яка механічна робота затрачується на видалення пластини. Задачу розв'язати при умові, що конденсатор весь час під'єднаний до джерела напруги  $U = 300 \text{ В}$ .

**2.89.** Попередню задачу розв'язати при умові, що конденсатор спочатку був під'єднаний до джерела живлення, потім відключений і тільки після цього пластинка була видалена.

**2.90.** Пластинки повітряного плоского конденсатора мають площу  $S = 300 \text{ см}^2$  і віддалені одна від одної на відстань  $d_1 = 3 \text{ мм}$ . Між ними, паралельно до них, знаходиться металічна пластинка з такою ж площею і товщиною  $d_2 = 1 \text{ мм}$ , яка ізольована від Землі. Конденсатор заряджають до напруги  $U = 600 \text{ В}$  і від'єднують від джерела напруги. Яку роботу необхідно виконати, щоб вийняти пластину?

**2.91.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли замість металічної пластинки знаходиться скляна пластинка ( $\epsilon = 7$ ) тих же розмірів.

**2.92.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги.

**2.93.** Задачу 2.90 розв'язати для випадку, коли конденсатор постійно підключений до джерела напруги, а замість металічної пластинки знаходиться скляна пластинка ( $\epsilon = 7$ ) тих же розмірів.

**2.94.** Один конденсатор ( $C_1 = 600$  пФ) зарядили до напруги  $U_1 = 3000$  В, інший конденсатор ( $C_2 = 800$  пФ) зарядами до напруги  $U_2 = 4000$  В. Полюси конденсаторів, які мають протилежні знаки, з'єднали провідниками. Визначити роботу розряду конденсаторів.

**2.95.** Батарея із  $n = 5$  послідовно з'єднаних конденсаторів, ємність кожного з яких  $C = 445$  пФ підтримується при постійній напругі  $U = 60$  кВ. Один із конденсаторів пробивається. Визначити: а) міну енергії батареї конденсаторів; б) роботу розряду; в) роботу джерела напруги.

**2.96.** Два однакових повітряних конденсатори, ємності яких однакові і дорівнюють  $1$  нФ заряджені до напруги  $U = 900$  В. Один із конденсаторів в зарядженому стані занурюється в гас. Після чого конденсатори з'єднуються паралельно. Визначити роботу розряду, який при цьому відбудеться.

### **3. ЗАКОНИ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ**

#### **3.1. Питання теми:**

1. Електричний струм та основні його характеристики.
2. Закони Ома.
3. Визначення сили струму, напруги та опору в електричних колах.
4. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа.

#### **3.2. Основні визначення та формули**

1. Сила струму – це кількість заряду, що проходить через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Сила струму вимірюється в Амперах (А). Сила струму дорівнює 1А, якщо через поперечний переріз провідника за одну секунду проходить заряд один Кулон. Зауважимо, що одиниця сили струму один Ампер встановлюється із магнітної взаємодії провідників зі струмом.

2. Густина струму  $j$  є векторна фізична величина, яка чисельно дорівнює силі струму, що протікає через одиничну площу поперечного перерізу провідника. Переріз вважається перпендикулярним до напрямку протікання струму.

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (3.2)$$

Густина струму вимірюється в одиницях: А/м<sup>2</sup> або в похідних одиницях, наприклад: мА/мм<sup>2</sup>.

3. Опір  $R$  однорідного провідника, довжина якого  $l$ , а площа поперечного перерізу  $S$  розраховується за формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.3)$$

де  $\rho$  – питомий опір матеріалу провідника, тобто опір провідника, для якого  $l = 1$  м, а  $S = 1$  м<sup>2</sup>. Питомий опір залежить від якості кристалічної структури провідника, кількості домішок (інші атоми хімічних речовин порівняно з атомами матеріалу провідника) в провіднику, температури провідника. Для чистих (без домішок) провідників (металів) залежність питомого опору від температури лінійна, тобто

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (3.4)$$

де  $\rho_0$  – питомий опір при  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = \frac{d\rho}{\rho_0 dt}$  – температурний коефіцієнт опору, значення якого для різних металів приводиться у справочних таблицях. Питома електропровідність

$$\sigma = 1/\rho. \quad (3.5)$$

4. Електрорушійна сила (е.р.с.) – робота сторонніх сил, які мають не електростатичну природу, по переміщенню одиночного позитивного заряду в колі:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{нв}}}{q}. \quad (3.6)$$

Одиниця вимірювання е.р.с. – Вольт.

5. Закон Ома для однорідної ділянки кола, яка не містить електрорушійної сили (е.р.с.):

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \text{ або } I = \frac{U}{R}, \quad (3.7)$$

де  $I$  – сила струму пропорційна різниці потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  (або напрузі  $U$ ) на кінцях ділянки (провідника) і обернено пропорційна опору  $R$  провідника.

6. Закон Ома для неоднорідної ділянки кола, яка містить е.р.с. (узагальнений закон Ома):

$$I = \frac{U_{12}}{R_{12}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i}{R_{12}}, \quad (3.8)$$

де  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i$  – спад напруги на даній ділянці кола 1–2,  $\varphi_1 - \varphi_2$  – різниця потенціалів на кінцях ділянки кола,  $\sum_i \mathcal{E}_i$  – алгебраїчна сума\* усіх е.р.с на цій ділянці кола,  $R_{12} = \sum_k R_k$  – загальний опір ділянки кола.

7. Закон Ома для замкнутого кола (кінці ділянки 1–2 з’єднані між собою і як наслідок  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ ):

$$I = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i}{\sum_k R_k}, \quad (3.9)$$

де  $\sum_i \mathcal{E}_i$  – алгебраїчна сума\* усіх е.р.с., які діють у колі,  $\sum_k R_k$  – повний опір кола, який включає і внутрішні опори е.р.с.

8. Закон Ома у диференціальній формі (для точки провідника):

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E}_{\text{е}} + \vec{E}_{\text{нд}}), \quad (3.10)$$

де  $\vec{E}_{\text{е}}$  – вектор напруженості кулонівського електричного поля,  $\vec{E}_{\text{нд}}$  – вектор напруженості сторонніх сил, що діють на носії заряду,  $\vec{j}$  – вектор густини струму,  $\sigma$  – електропровідність для даної точки провідника.

9. Вектор густини струму для металів

$$\vec{j} = en\vec{v}_{\text{д}}, \quad (3.11)$$

де  $e$  – заряд електрона,  $n$  – концентрація електронів,  $\vec{v}_{\text{д}}$  – середня швидкість направленої руху електронів (або дрейфова швидкість).

10. Перше правило Кірхгофа – алгебраїчна сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю ( це правило є наслідком закону збереження заряду):

\* Знак е.р.с. на даній ділянці кола або в замкнутому колі визначається за правилом, яке розглядається в методичних вказівках до даної теми.

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.12)$$

11. Друге правило Кірхгофа – алгебраїчна сума\*\* спадів напруг для замкнутого контура (кола) дорівнює алгебраїчній сумі\*\* е.р.с., що діють у контурі:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i. \quad (3.13)$$

12. Потужність струму на ділянці кола 1–2:

$$P = IU_{12} = I(\varphi_1 - \varphi_2 + \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_i). \quad (3.14)$$

13. Теплова потужність  $P_Q$  на даній ділянці кола 1 – 2:

$$P_Q = I^2 R_{12}. \quad (3.15)$$

14. Питома потужність струму  $P_{\text{пит}}$ :

$$P_{\text{ієд.}} = \vec{j}(\vec{E}_{\text{е}} + \vec{E}_{\text{ієд}}), \quad (3.16)$$

де  $\vec{E}_{\text{е}}$  –напруженість електростатичних кулонівських сил,  $\vec{E}_{\text{ієд}}$  –напруженість сторонніх сил.

15. Питома тепла потужність струму  $Q_{\text{пит}}$ :

$$Q_{\text{ієд}} = \rho j^2. \quad (3.17)$$

Питома потужність – це кількість енергії, що виділяється в одиниці об'єму провідника за одиницю часу. Питома потужність вимірюється таких одиницях: Дж/(м<sup>3</sup>.с) або Вт/м<sup>3</sup>.

\*\* Правило визначення знаків напруги і е.р.с. розглядається у методичних вказівках до даної теми.

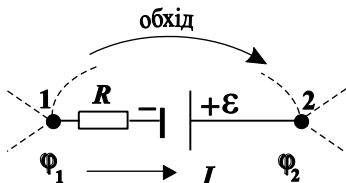
### 3.3. Питання на самопідготовку

1. Визначення струму. Умови існування струму провідності. Характеристики струму.
2. Причини існування електричного опору металів.
3. Визначення електрорушійної сили сторонніх сил. В чому різниця між е.р.с. та різницею потенціалів?
4. Закон Ома в інтегральній та диференціальній формах для неоднорідної ділянки кола.
5. Закон Ома в інтегральній та диференціальній формах для однорідної ділянки кола.
6. Закон Ома для замкнутого кола.
7. Вектор густини струму. Дрейфова швидкість носіїв заряду та її фізичний зміст.
8. Перше правило Кірхгофа. На основі якого фізичного закону воно базується?
9. Друге правило Кірхгофа. На основі якого фізичного закону воно базується?
10. Потужність та теплова потужність струму на ділянці кола.

### 3.4. Методичні вказівки

Задачі даної теми присвячені застосуванню законів постійного електричного струму: законів Ома, правил Кірхгофа та закону Джоуля-Ленца.

1. При використанні узагальненого закону Ома (3.8) в інтегральній формі





$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \sum_i \mathcal{E}_i$$

необхідно звернути увагу на принципіальну відмінність між різницею потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$ , електрорушійною силою  $\mathcal{E}$  і напругою  $U_{12} = IR_{12}$ . Кожна із цих величин визначається як питома робота  $A/q$  електричного поля. Але різниця потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  – це робота кулонівського потенціального поля  $\vec{E}_e$ , яка не залежить від шляху інтегрування. Електрорушійна сила – робота непотенціального стороннього поля  $\vec{E}_{\text{п\o}}^{\leftarrow}$  (локалізованого всередині джерела) і тому залежить від шляху інтегрування. Під напругою розуміють питому роботу  $A/q$  результуючого електричного поля ( $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{\text{c\o}}$ ) і згідно узагальненого закону Ома вона дорівнює добутку сили струму на повний опір ділянки кола 1–2 (рис. 3.1). Таким чином, напруга повинна залежати від шляху інтегрування, тому на паралельних ділянках кола, які містять різні джерела е.р.с., добуток  $IR$  буде теж різним.

2. При використанні узагальненого закону Ома і другого правила Кірхгофа рекомендується дотримуватися наступного правила знаків: добуток  $IR$  береться із знаком «+», якщо напрямок струму (який задаємо) співпадає з вибраним напрямком обходу ділянки 1–2 кола або контуру.

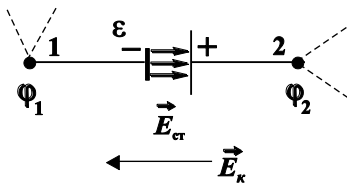


Рис. 3.2

Окремо розглянемо джерело е.р.с.  $\mathcal{E}$  (рис. 3.2). Всередині любого джерела існує стороннє електричне поле  $E_{\text{п\o}}$ , під дією якого на полюсах джерела відбувається накопичення зарядів протилежних знаків. Вектор  $\vec{E}_{\text{п\o}}^{\leftarrow}$  направлений завжди від «–» до

«+». Кулонівське поле  $\vec{E}_e$  створюється зарядами, що накопичились на полюсах джерела. Якщо в колі не має інших джерел, то кулонівське поле  $\vec{E}_e$  направлене назустріч сторонньому  $\vec{E}_{\text{п\o}}^{\leftarrow}$ , причому

$$E_{\epsilon} \leq E_{\text{п\ddot{o}}}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq \mathcal{E}.$$

Очевидно, знак рівності відповідає розімкнутому колу.

При наявності інших джерел в колі різниця потенціалів  $\varphi_2 - \varphi_1$  може бути і менша, і більша, ніж е.р.с.  $\mathcal{E}$ , може виявитись і від'ємною величиною. В останньому випадку  $\varphi_2 < \varphi_1$  і вектори  $\vec{E}_{\epsilon}$  і  $\vec{E}_{\text{п\ddot{o}}}$  мають однаковий напрямок.

Напрямок струму, який протікає через джерела, визначається напрямком результуючого поля

$$\vec{E} = \vec{E}_{\epsilon} + \vec{E}_{\text{с\ddot{o}}}$$

(згідно закону Ома в диференціальній формі  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  формула (3.10)).

Враховуючи вище викладене, прийнято е.р.с.  $\mathcal{E}$  джерела в рівняннях закону Ома, чи правила Кірхгофа брати зі знаком «+», якщо напрямок  $\vec{E}_{\text{п\ddot{o}}}$  співпадає з вибраним напрямком обходу. Тобто можна вважати, що джерело  $\mathcal{E}$  діє від «+» зовні самого джерела (рис. 3.2). У виразі закону Ома (3.8)  $\varphi_1 - \varphi_2$  є різниця потенціалів між початковою і кінцевою точками ділянки кола, тобто знову таки залежить від вибраного напрямку обходу.

### **Правила при користуванні законом Ома для неоднорідної ділянки кола:**

- 1) довільно вибрати обхід ділянки;
- 2) початок ділянки (точка 1) вважати такою, що має потенціал  $\varphi_1$ , а кінець ділянки (точка 2) такою, що має потенціал  $\varphi_2$ ;
- 3) якщо напрямок струму на ділянці не вказаний, то вибрати його довільно (за або проти обходу). Струм, напрямок якого співпадає з обходом в рівнянні (3.8) приймати зі знаком «+», струм, напрямок якого не співпадає з обходом в рівнянні (3.8) брати зі знаком «-»;

4) знак е.р.с.  $\mathcal{E}$  в рівнянні (3.8) визначається так, як написано вище. Якщо при обході на ділянці кола спочатку зустрічається негативний полюс джерела, а потім – позитивний, то така е.р.с. в рівнянні (3.8) береться зі знаком «+». В протилежному випадку – зі знаком «-». Якщо в результаті розрахунку значення струму буде число зі знаком «-», то це означатиме, що попередній вибір напрямку струму необхідно змінити на протилежний.

### **Правила при використанні правил Кірхгофа до розрахунку розгалужених електричних кіл:**

- 1) визначити вузли та замкнуті контури електричних кіл;
- 2) вибрати (довільно) напрямки струмів на всіх ділянках замкнутого контуру позначивши їх стрілочками;
- 3) записати перше правило Кірхгофа (3.12) для всіх незалежних вузлів. Вважати струми, що входять у вузол – додатніми, а струми, що виходять із вузла, – від'ємними. Число незалежних рівнянь складених за (3.12) на одиницю менше числа вузлів;
- 4) вибрати напрям обходу замкнутого контуру (за годинниковою стрілкою чи проти);
- 5) при складанні рівнянь за другим правилом Кірхгофа (3.13) знаки струмів і е.р.с. на ділянках замкнутого контуру вибирати згідно правил користування законом Ома для неоднорідної ділянки кола (пункти 3) і 4));
- 6) щоб усі рівняння, які складені на основі другого правила Кірхгофа, були незалежними, необхідно кожен раз розглядати контури, що містять хоча б одну ділянку кола, що не входила у вже розглянуті контури;
- 7) якщо деякі розв'язки складених рівнянь на основі правил Кірхгофа є від'ємними, то це означає, що напрямки струмів на ділянках кола, або полярність включення цих е.р.с. треба змінити на протилежні.

3. Закон Ома в диференціальній формі (3.10) рекомендується використовувати для розрахунку струмів і опорів при наявності провідних безмежних середовищ. Важливим є те, що напруженість електричного поля  $E$  при наявності струму можна розрахувати методом електростатики. Це можливо тому, що напруженість електричного поля при сталій напрузі між електродами не залежить від того, чи провідне чи непровідне середовище між ними.

### 3.5. Приклади розв'язування задач

**Задача 3.1.** Сила струму в провіднику зменшується від 36 А до нуля, причому через кожні 0,005 с вона зменшується у три рази. Яка кількість електрики переноситься через поперечний переріз провідника при цьому?

**Розв'язок.** Згідно визначення сили струму (3.1.), кількість електрики, що переноситься струмом за проміжок часу від  $t$  до  $t+dt$ , дорівнює

$$dq = Idt.$$

Тоді кількість електрики, що переноситься струмом, можна визначити за загальною формулою:

$$q = \int I(t)dt,$$

де  $I(t)$  – залежність сили струму від часу.

Для умови нашої задачі можемо записати, що

$$I(t) = 36 \cdot 3^{-200t} \text{ А.}$$

Тоді

$$q = 36 \int_0^{\infty} 3^{-200t} dt = -36 \cdot \frac{3^{-200t}}{200 \ln 3} \Big|_0^{\infty} = \frac{36}{200 \ln 3} = 0,164 \text{ Кл.}$$

**Задача 3.2.** Для вимірювання опору ізоляції в провадах, які знаходяться під напругою, вимірюють за допомогою вольтметра з великими внутрішнім опором  $R$  напругу: 1) між першим і другим провадами ( $U$ ); 2) між першим проводом і землею ( $U_1$ ); 3) між другим проводом і землею ( $U_2$ ). Визначити опори ізоляції першого і другою проводів відносно землі  $R_1$  і  $R_2$  при таких даних:  $R = 20$  кОм;  $U = 120$  В;  $U_1 = 8$  В;  $U_2 = 10$  В.

**Розв'язок.** Процес вимірювання опору ізоляції представлений на рис. 3.3, а, б і в.

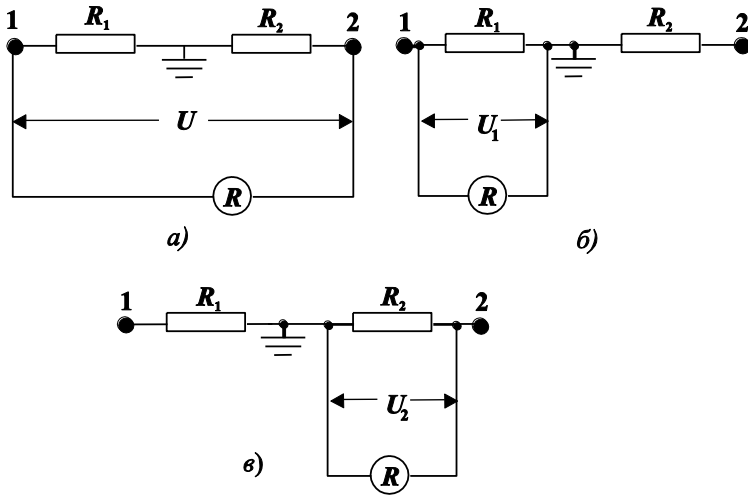


Рис. 3.3

На рис. 3.3 такі позначення: 1 – перший провід, 2 – другий провід,  $R_1$  – опір ізоляції між першим проводом і землею,  $R_2$  – опір ізоляції між другим проводом і землею,  $R$  – внутрішній опір вольтметра. Проводи направлені перпендикулярно до площини рис. 3.3.

Для рис.3.3,б струм через опір  $R_2$  згідно (3.7) можемо записати як

$$I_2 = \frac{U_1}{\frac{R_1 R}{R_1 + R}} = \frac{U}{R_2 + \frac{R_1 R}{R_1 + R}}, \quad (1)$$

а через опір  $R_1$  (рис. 3.3,в) –

$$I_1 = \frac{U_2}{\frac{R_2 R}{R_2 + R}} = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 R}{R_2 + R}}. \quad (2)$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо:

$$\frac{R_1 R}{U_1} = \frac{R_2 R_1 + R(R_1 + R_2)}{U}, \quad (1')$$

$$\frac{R_2 R}{U_2} = \frac{R_2 R_1 + R(R_1 + R_2)}{U}. \quad (2')$$

Праві частини співвідношень (1') і (2') однакові, тому однакові і їхні ліві частини. Тобто

$$R_2 = \frac{U_2}{U_1} R_1. \quad (3)$$

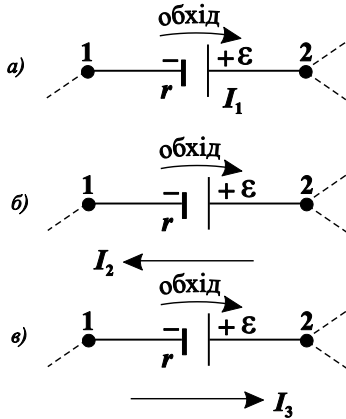
Підставимо (3) в (1') і отримаємо, що

$$R_1 = \frac{R(U - U_1 - U_2)}{U_2} = 204 \text{ кОм}. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3) і знайдемо, що

$$R_2 = \frac{R(U - U_1 - U_2)}{U_1} = 255 \text{ кОм}.$$

**Задача 3.3.** Визначити різницю потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  на затискачах джерела е.р.с. ( $\varepsilon = 4,2$  В; внутрішній опір  $r = 0,2$  Ом), який включений в деяке коло. Напрямки струмів, що протікають через джерело, показані на рис. 3.4 а, б, в ( $I_1 = 0$ ,  $I_2 = 1$  А,  $I_3 = 4$  А).



**Розв'язок.** Для запису рівняння на основі закону Ома (3.8) виберемо напрямок обходу ділянки кола від точки 1 до точки 2. Тоді для першого випадку а) ( $I_1 = 0$ ) (3.8) запишеться так:

$$0 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Рис. 3.4

Звідки знаходимо, що

$\varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon = -4,2$  В. Для випадку б) ( $I_2 = 1$  А) (3.8) запишеться так:

$$-I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Звідки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I_2 r - \varepsilon = (-0,2 - 4,2) \text{ В} = -4,4 \text{ В}.$$

Для третього випадку в) ( $I_3 = 4$  А) (3.8) запишеться так:

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon}{r}.$$

Звідки

$$\varphi_1 - \varphi_2 = I_3 r - \varepsilon = (0,8 - 4,2) \text{ В} = -3,4 \text{ В}.$$

**Аналіз отриманих результатів.** В першому випадку а)  $I = 0$ , це означає, що сумарне електричне поле

$$\vec{E} = \vec{E}_{\varepsilon} + \vec{E}_{\text{нд}} = 0.$$

Значить,

$$\vec{E}_{\varepsilon} = -\vec{E}_{\text{нд}} \text{ і } \varphi_1 - \varphi_2 = -\varepsilon.$$

Це може бути як при розімкненому колі, так і при наявності в колі ще одного джерела з е.р.с.  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , яке включене назустріч джерелу  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  і  $\varepsilon_1$  з'єднані однойменними полюсами).

Для другого випадку б), судячи із напрямку струму  $I_2$ , результуючий вектор  $\vec{E} = \vec{E}_{\varepsilon} + \vec{E}_{\text{нд}}$  і вектор  $\vec{E}_{\text{нд}}$  мають протилежні напрямки (методичні вказівки). Значить кулонівське поле протилежне сторонньому, тобто  $\vec{E}_{\varepsilon} > \vec{E}_{\text{нд}}$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 > \varepsilon$ . Це справедливо при наявності в колі хоча би ще одного джерела  $\varepsilon_1$ , яке включене назустріч джерелу  $\varepsilon$ ; очевидно, що  $\varepsilon_1 > \varphi_2 - \varphi_1$ .

В третьому випадку в), судячи із напрямку струму  $I_3$ , результуючий вектор  $\vec{E}$  і вектор  $\vec{E}_{\text{нд}}$  мають однаковий напрямок, хоч вектор  $\vec{E}_{\varepsilon}$  і вектор  $\vec{E}_{\text{нд}}$  мають протилежні напрямки. Це означає, що  $\vec{E}_{\varepsilon} < \vec{E}_{\text{нд}}$ , тобто  $\varphi_2 - \varphi_1 < \varepsilon$ . Це має місце тоді, коли зовнішнє коло складається тільки із навантаження.

Кулонівське поле  $\vec{E}_{\varepsilon}$  може мати такий же напрямок як і стороннє поле  $\vec{E}_{\text{нд}}$ . Для цього в колі повинно бути ще одне джерело е.р.с. включене послідовно (узгоджено) з джерелом  $\varepsilon$ .

**Задача 3.4.** В кінці зарядки акумулятора при силі струму в колі  $I_1 = 1 \text{ А}$  показ вольтметра, був  $U_1 = 12,40 \text{ В}$  (рис. 3.5,а). Коли акумулятор замкнули накоротко (процес розрядки), то напочатку розрядки при силі струму в колі  $I_2 = 9 \text{ А}$  показ вольтметра був



$U_2 = 12,00 \text{ В}$  (рис. 3.5,б). Визначити е.р.с.  $\mathcal{E}$  і внутрішній опір  $r$  акумулятора.

**Аналіз.** Акумулятори є багаторазовими хімічними джерелами струму. На протязі роботи вони поступово розряджаються, тобто їхня е.р.с. зменшується. Акумулятори можуть бути знову заряджені при пропусканні електричного струму від зовнішнього джерела