ІНСТИТУТ СПЕЦІАЛЬНОГО ЗВ’ЯЗКУ ТА ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНИЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

І. Ф. Скіцько, О. В. Корнейко, О. І. Скіцько

ФІЗИКА
практикум

Частина ІІ

ЗАГАЛЬНА ФІЗИКА ТА ОСНОВИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ ТВЕРДИХ ТІЛ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямами підготовки «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і «Телекомунікації»

Київ
Видавництво Інституту спеціального зв’язку
та захисту інформації НТУУ «КПІ»
2013

УДК 538.9
ББК 22.36
Ф 48

Рецензенти:
Л. П. Гермаш, д окт. техн. наук, професор, завідувач кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут»;
Г. Ф. Конахович, докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри телекомунікаційних систем Інституту аеронавігації Національного авіаційного університету;
С. І. Покутний, докт. фіз.-мат. наук, професор, директор науково-дослідного центру теоретичної та прикладної фізики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова.

Гриф надано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України, лист № 1/11-4507 від 27.02.2013 р.

Ф 48 **Фізика**. Практикум. В 2 ч. Частина 2. Загальна фізика та основи зонної теорії твердих тіл: навч. посібник / І. Ф. Скіцько, О. В. Корнейко, О. І. Скіцько.; за заг. ред. І. Ф. Скіцька – К. : Вид-во ІСЗЗІ НТУУ «КПІ», 2013. – 400 с.

ISBN 000-000-0000-00-0

У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів в рамках курсу загальної фізики, основ фізики твердого тіла і фізики напівпровідників, який викладається для майбутніх фахівців у сфері телекомунікацій та захисту інформації, наведені методичні вказівки та приклади розв'язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Посібник призначений для студентів (курсантів), які навчаються у вищих навчальних закладах і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки за напрямами 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і 6.050903 «Телекомунікації».

Посібник може буде корисним для науково-педагогічних працівників, які викладають курс фізики для інших напрямів інженерної підготовки, під час планування та підготовки завдань до практичних занять.

УДК 538.9
ББК 22.36

ISBN 000-000-0000-00-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Знання основ загальної фізики, особливо фізики металів і напівпровідників, дуже важливі для оволодіння сучасними принципами побудови та функціонування засобів захисту інформації та телекомунікаційного обладнання. Тому цей розділ загального курсу фізики включений до відповідних модулів освітньо-професійних програм галузевих стандартів вищої освіти щодо підготовки бакалаврів за напрямами 6.170101 «Безпека інформаційних і комунікаційних систем» і 6.050903 «Телекомунікації».

Навчальний посібник призначений для застосування студентами (курсантами), які навчаються у вищих навчальних закладах за цими напрямами підготовки і вивчають нормативну навчальну дисципліну «Фізика» з циклу математичної та природничо-наукової підготовки.У посібнику подаються основні закони і формули, які необхідні для опанування відповідних тем та розділів типового курсу фізики стосовно загальної фізики, фізики металів і напівпровідників, наведені методичні вказівки та приклади розв'язування типових практичних завдань, містяться контрольні питання і задачі для самостійної роботи та підготовки до модульного контролю.

Навчальний посібник повинен допомогти студентові (курсантові) в самостійному оволодінні методикою розв'язування типових задач в рамках курсу загальної фізики, який вивчається у вищих інженерно-технічних вузах, у підготовці до практичних занять і модульного контролю з цієї навчальної дисципліни.

Значна частина цього начального посібника присвячена відповідним темам щодо основ фізики твердого тіла і фізики напівпровідників.

Створення цього посібника стало можливим завдяки цінним зауваженням, творчим дискусіям і науково-методичній підтримці, які надали авторам викладачі кафедри загальної та теоретичної фізики НТУУ «КПІ», викладачі кафедр Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації НТУУ «КПІ», дисципліни яких базуються на відповідних розділах курсу фізики.

Автори висловлюють щиру подяку рецензентам посібника докторам технічних наук, професорам Л. П. Гермаш і Г.Ф. Конаховичу та доктору фізико-математичних наук, професору С. І. Покутному, змістовні зауваження і рекомендації яких були враховані під час підготовки книги.

Окрему подяку автори висловлюють співробітнику кафедри загальної та теоретичної фізики НТУУ «КПІ» Войченко Надії Євгеніївні за комп'ютерний набір і оформлення тексту посібника.

ДЕКІЛЬКА ПОРАД ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ

1. Перш за все познайомтесь з таблицями додатків, так як розв'язування багатьох задач без них неможливе. Крім того, матеріал, який міститься в таблицях, значно полегшить Вашу роботу і зекономить час.

2. Приступаючи до розв'язування задачі, добре вникніть в її зміст і постановку питання. Вияснiть, чи всі дані, які необхідні для розв'язування задачі, приведені. Дані, яких не вистачає, приведені в таблицях додатків. Якщо дозволяє характер задачі, обов'язково зробіть схематичний рисунок, який пояснює її суть,– це у багатьох випадках різко полегшує як пошук розв'язку, так і самий розв'язок.

3. Кожну задачу розв'язуйте, як правило, в загальному вигляді (тобто в буквенних позначеннях), так щоб величина, яку шукаємо, була виражена через задані величини. Розв'язок в загальному вигляді надає кінцевому результату особливу цінність, так як дозволяє встановити певну закономірність, яка показує, як залежить невідома величина від заданих величин. Крім того, відповідь, яка отримана в загальному виді, дозволяє судити в значній мірі про правильність самого розв'язку (див. наступний пункт).

4. Отримавши розв'язок в загальному вигляді, необхідно перевірити, чи правильну він має розмірність. Неправильна розмірність має явний признак, що розв'язок помилковий.

5. Якщо можливо, то дослідіть поведінку розв'язку при граничних частинних випадках. Наприклад, який би вид не мали формули з квантової механіки, при умові, що стала Планка $\hbar \to 0$, вони повинні переходити у формули класичної фізики. В противному випадку можна зразу стверджувати, що розв'язок неправильний.

6. Приступаючи до розрахунків, пам'ятайте, що числові значення фізичних величин завжди є наближеними. Тому при розрахунках керуйтесь правилами дій з наближеними числами. В числовому значенні величини, яку розрахували, необхідно зберегти останнім той знак, одиниця якого ще перевищує похибку цієї величини. Всі наступні цифри необхідно відкинути.

7. Отримавши відповідь у вигляді числового значення, оцініть його правдоподібність. Така оцінка може в ряді випадків виявити помилковість отриманого результату. Так наприклад, ймовірність проходження мікрочастинки через потенціальний бар'єр не може перевищувати 100%; довжина хвилі видимої області спектру не може бути більшою 0,7 мкм, чи меншою 0,4 мкм і т.п.

1. ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ

1. 1. Питання теми

1. Рівняння гармонічних коливань.
2. Геометричне зображення гармонічних коливань.
3. Додавання однаково спрямованих та взаємно перпендикулярних гармонічних коливань.
4. Електричні коливання в ідеалізованому контурі.

1. 2. Основні визначення та формули

Механічні коливання

1. Рівняння гармонічних коливань:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_1) \tag{1.1}$$

або

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_2), \tag{1.2}$$

де x – зміщення точки, яка коливається, від положення рівноваги; t – час, A – амплітуда коливання, ω_0 – циклічна частота; φ_1 та φ_2 – початкові фази коливань; $(\omega_0 t + \varphi_1)$ та $(\omega_0 t + \varphi_2)$ – фази коливань.

2. Циклічна частота

$$\omega_0 = 2\pi\,\nu_0, \tag{1.3}$$

або

$$\omega_0 = 2\pi / T_0, \tag{1.4}$$

де ν_0 – лінійна частота коливань (кількість коливань за одиницю часу), T_0– період гармонічних коливань (час, за який здійснюється одне повне коливання).

3. Швидкість точки, яка здійснює гармонічні коливання:

$$\upsilon = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_1), \tag{1.5}$$

або

$$\upsilon = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_2). \qquad (1.6)$$

4. Прискорення при гармонічному коливанні:

$$a = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \qquad (1.7)$$

або

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2). \qquad (1.8)$$

5. Сила, що діє на тіло при вільному гармонічному коливанні (квазіпружна сила), завжди пропорційна зміщенню і спрямована в сторону, яка є протилежною цьому зміщенню. Тобто

$$F = m\,a = -m\omega_0^2 x = -kx, \qquad (1.9)$$

де k – коефіцієнт квазіпружної сили, m – масса тіла, яке коливається.

6. Повна енергія точки, що коливається, визначається як сума кінетичної та потенціальної енергій:

$$W = W_{К} + W_{П} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad (1.10)$$

де $W_{К} = \dfrac{m\omega_0^2 A^2}{2}$ – максимальна кінетична енергія, $W_{П} = \dfrac{kA^2}{2}$ – максимальна потенціальна енергія.

7. Період гармонічних коливань дорівнює:

а) для тіла, яке підвішене на пружині

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}, \qquad (1.11)$$

де m – маса тіла, k – жорсткість пружини;

б) для математичного маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (1.12)$$

де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння.

8. Амплітуда результуючого коливання, що отримується при додаванні двох однаково спрямованих коливань з однаковими частотами, знаходиться за формулою:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (1.13)$$

де A – амплітуда результуючого коливання, A_1 та A_2 – амплітуди коливання, які додаються, φ_1 та φ_2 – їхні початкові фази.

9. Початкова фаза результуючого коливання знаходиться за формулою:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (1.14)$$

10. При складанні двох однаково спрямованих гармонічних коливань (1.2) з однаковими амплітудами A і нульовими початковими фазами, але з різними частотами, результуюче коливання називається биттям, а рівняння биття має вид:

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t \cdot \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t, \qquad (1.15)$$

де ω_1 і ω_2 – частоти коливань, які додаються.

11. Рівнянням траєкторії точки, що приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, є

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1.16)$$

Електричні коливання

12. Формули, які описують електричні коливання в ідеалізованому контурі, легко отримати із формул, для механічних коливань. При цьому необхідно вважати, що зміщенню від положення рівноваги x відповідає q – заряд на обкладинці конденсатора,

швидкості υ – сила струму I, масі m – індуктивність котушки L, жорсткості пружинки $k - 1/C$, де C – ємність конденсатора, кінетичній енергії $m\upsilon^2/2$ – енергія магнітного поля котушки $LI^2/2$, потенціальній енергії пружинки $kx^2/2$ – енергія зарядженого конденсатора $q^2/(2C)$.

Наприклад: Період електромагнітних коливань в контурі, що складається з ємності C та індуктивності L визначається за формулою:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{1.17}$$

де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ – циклічна частота.} \tag{1.18}$$

Сила струму в такому контурі,

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \tag{1.19}$$

або

$$I = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_2), \tag{1.20}$$

де

$$I_m = q_m \omega_0. \tag{1.21}$$

Тут q_m – максимальний заряд конденсатора.

1. 3. Питання на самопідготовку

1. Дати визначення коливального руху.
2. Які коливання називаються гармонічними? Записати рівняння гармонічних коливань.
3. Характеристики гармонічних коливань: амплітуда, фаза, циклічна частота, лінійна частота, початкова фаза. Дати їх визначення.
4. Як проявляється закон збереження енергії при гармонічних коливаннях?

5. Геометричне зображення гармонічного коливання.

6. Додавання однаково спрямованих гармонічних коливань з однаковими та різними частотами. При якій умові утворюються коливання, що носять назву «биття»?

7. Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань з однаковими та різними частотами. Що таке фігури Ліссажу?

8. Яка відповідність між гармонічними механічними коливаннями і коливаннями, які виникають в ідеалізованому електричному контурі?

1. 4. Методичні вказівки

1. При складанні n (n > 2) однаково спрямованих коливань з однаковими періодами амплітуду та початкову фазу результуючого коливання можна знаходити за формулами (1.13) і (1.14) послідовно застосовуючи їх (n – 1) разів. Однак ефективним в цьому випадку буде застосування графічного методу додавання коливань.

2. В задачах, де необхідно визначити траєкторію точки, яка приймає участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях, треба виключити час t з рівнянь коливань, які додаються.

3. Основна задача в теорії електричних коливань – це знаходження закону зміни з часом якої небудь електричної або магнітної фізичної величини.

Наприклад: заряду конденсатора $q(t)$, сили струму в контурі $I(t)$, енергії магнітного поля котушки $W_H(t) = LI^2/2$ і т. п. Потім використання рівнянь, які зв'язують між собою різні фізичні величини, дозволить визначити невідомі величини.

4. В задачах на коливання час t вимірюється в секундах.

1.5. Приклади розв'язування задач

Задача 1.1. Матеріальна точка, маса якої m = 5 г, здійснює гармонічні коливання з частотою ν_0 = 0,5 с$^{-1}$, амплітудою коливань A = 3 см. Визначити 1) швидкість υ точки в момент часу, коли зміщення x = 1,5 см; 2) максимальну силу F_m, яка діє на точку; 3) повну енергію W точки.

Розв'язок. 1) Знайдемо зв'язок між швидкістю υ точки і її зміщенням від положення рівноваги за допомогою формул (1.1) і (1.5). Піднесемо ці формули справа і зліва до квадрату і почленно складемо. Тоді отримаємо, що

$$x^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega_0^2} = A^2 .$$

Звідки знаходимо, що

$$\upsilon = \pm\,\omega_0\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 2\pi\nu_0\sqrt{A^2 - x^2} .$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо, що

$$\upsilon = \pm 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5\sqrt{9 \cdot 10^{-4} - 2{,}25 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \pm 8{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с} = \pm 8{,}2\ \text{см/с}.$$

Знак "+" відповідає випадку, коли напрямок швидкості співпадає з додатнім напрямком осі X. Знак "–" відповідає випадку, коли напрямок швидкості співпадає з від'ємним напрямком осі X.

2) Силу, що діє на точку, знайдемо за другим законом Ньютона і з допомогою (1.7):

$$F_m = ma_m = mA\omega_0^2 = 4\pi^2\nu_0^2 mA;$$

$$F_m = 4 \cdot 9{,}87 \cdot 0{,}25 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}03\ \text{мН} = 1{,}49\ \text{мН}.$$

3) Повна енергія: $W = m\upsilon^2{}_m/2$, де згідно формули (1.5) $\upsilon_m = 2\pi\nu_0 A$. Тому

$$W = 2\pi^2 m\nu_0^2 A^2 =$$

$$= 2 \cdot 9{,}87 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}25 \cdot 9 \cdot 10^{-11} = 22{,}1\ \text{мкДж}.$$

Задача 1.2. Матеріальна точка приймає участь в трьох коливаннях, які відбуваються вздовж однієї прямої і мають вид:

$$x_1 = 3\cos t;\ x_2 = 3\cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right);\ x_3 = 3\sin\left(t + 7\frac{\pi}{6}\right).$$

Визначити амплітуду та початкову фазу результуючого коливання. Написати його рівняння. (Зміщення x вимірюється у відносних одиницях).

Розв'язок. Перепишемо третє рівняння таким чином:

$$x_3 = 3\cos\left(t + 7\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Початкові фази коливань: $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$; $\varphi_3 = \frac{2\pi}{3}$. Складаємо перші два коливання. Результуюча амплітуда за формулою (1.13) буде:

$$A' = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = A_1\sqrt{2[1 + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]} =$$
$$= 3\sqrt{2\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)} = 3\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)} = 3\sqrt{3}\,.$$

Початкова фаза результуючого коливання за формулою (1.14) буде:

$$\mathrm{tg}\varphi' = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{3}}{\cos 0 + \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\varphi' = \frac{\pi}{6}.$$

Результуюче коливання буде мати вид:

$$x' = 3\sqrt{3}\cos\left(\mathrm{t} + \frac{\pi}{6}\right).$$

Додамо до x' коливання x_3, тоді

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A'\sin\varphi' + A_3\sin\varphi_3}{A'\cos\varphi' + A_3\cos\varphi_3} = \frac{\sqrt{3}\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,;\ \ \varphi = \frac{\pi}{3},$$

а

$$A = \sqrt{A'^2 + A_3^2 + 2A'\,A^2\cos(\varphi_3 - \varphi')} =$$

$$= 3\sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{4} = 6.$$

Тоді результуюче коливання буде:

$$x = 6\cos(t + \frac{\pi}{3})\,.$$

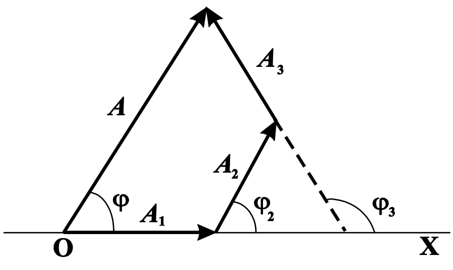

Рис. 1.1

Цей же результат можемо швидше отримати за допомогою графічного методу додавання коливань. Довжина кожного вектора дорівнює амплітуді коливання, а кут між вектором та віссю ОХ – початковій фазі. Тоді отримаємо (див. рис. 1.1):

$$\varphi = \frac{\pi}{3};\ A = 2A_1 = 6.$$

Задача 1.3. Точка приймає участь одночасно у двох взаємно перпендикулярних коливаннях:

$$x = 2\sin \pi t \text{ см},$$

$$y = \cos \pi t \text{ см}.$$

Знайти рівняння траєкторії точки і вказати напрямок руху точки. Визначити швидкість та прискорення точки в момент часу t = 0,5 с.

Розв'язок. Скориставшись формулою (1.16) отримаємо, що при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$ рівняння траєкторії точки буде:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Це рівняння еліпса з півосями a = 2 см та b = 1 см. Для того, щоб визначити напрямок руху точки врахуємо, що в момент t = 0, x = 0, а y= = +1 см. При збільшенні t збільшується x, а y зменшується. Це означає, що точка рухається траєкторією за годинниковою стрілкою. Швидкість $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$, а прискорення $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, де

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi\cos\pi t\ ,$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = -\pi\sin\pi t\ ,$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -2\pi^2\sin\pi t\ ,$$

$$a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = -\pi^2\cos\pi t\ .$$

Підставляючи ці значення в формули для швидкості та прискорення знайдемо:

$$\upsilon = \sqrt{4\pi^2\cos^2\pi t + \pi^2\sin^2\pi t}\ ,$$

$$a = \sqrt{4\pi^4\sin^2\pi t + \pi^4\cos^2\pi t}\ .$$

В момент часу t = 0,5 с отримаємо: υ = 3,14 см/с, a = 19,7см^2/с.

Задача 1.4. При складанні двох гармонічних коливань одного напрямку результуюче коливання точки має вид

$$x = a\cos(2{,}1t)\cdot\cos(50t),$$

де t в секундах. Знайти циклічні частоти коливань, які складаються, та період биття результуючого коливання.

Розв'язок. Порівнюючи дане в умові задачі рівняння результуючого коливання із формулою (1.15), отримаємо співвідношення:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = 2{,}1, \qquad \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 50.$$

Звідки знаходимо, що

$$\omega_1 = 47{,}9 \text{ рад/с, а } \omega_2 = 52{,}1 \text{ рад/с.}$$

Амплітуда биття

$$A = \left| a\cos(2{,}1t) \right|,$$

а значить період биття

$$T = \frac{2\pi}{2 \cdot 2{,}1} = 1{,}5 \text{ с.}$$

Задача 1.5. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого $C = 5$ мкФ, та котушки, індуктивність якої $L = 0{,}2$ Гн. Визначити максимальну силу струму I_m в контурі, якщо максимальна різниця потенціалів на обкладинках конденсатора $U_m = 90$ В. Опором контура знехтувати.

Розв'язок. Рівняння, яке визначає заряд на обкладинках конденсатора для випадку $R = 0$ є $q = q_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$. Сила струму $I = dq/dt = q_m\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Амплітуда сили струму $I = q_m\omega_0$, де

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; q_m = CU_m.$$

Тоді

$$I_m = CU_m\frac{1}{\sqrt{LC}} = U_m\sqrt{\frac{C}{L}} = 0{,}45 \text{А.}$$

Задача 1.6. До вертикальної невагомої пружини, верхній кінець якої закріплений, підвісили тягарець, маса якого $m = 50$ г. Жорсткість пружини $k = 50$ Н/м. Записати рівняння малих вертикальних коливань системи, які виникнуть, якщо вивести тягарець із положення рівноваги. Вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ тягарець відтягнули вниз на відстань $x_0 = 2$ см і надали йому початкову швидкість $\upsilon_0 = 0{,}707$ м/с, яка направлена вниз (вгору).

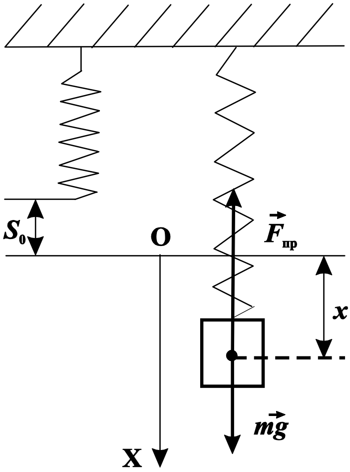

Рис. 1.2

Аналіз. Під дією тягарця пружина розтягнеться на величну S_0, яку знайдемо із умови стійкої рівноваги

$$mg = kS_0. \qquad (1)$$

Це стійке положення тягарця приймемо за початок відліку зміщення тягарця. Якщо тягарець змістити вниз на величину x, то повний розтяг пружини буде $x + S_0$ і сила пружності

$$F_{пр} = -k\,(x+S_0). \qquad (2)$$

Тоді рівняння руху тягарця (друге рівняння Ньютона) в скалярній формі можна записати так:

$$m\ddot{x} = mg - k(x+S_0).$$

Врахувавши (1) і (2) отримаємо, що

$$m\ddot{x} = -kx. \qquad (3)$$

Це є диференціальне рівняння гармонічних коливань, яке дозволяє визначити циклічну частоту коливань, а саме $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Амплітуду коливань A можна знайти, розглядаючи зміну енергії при переході із положення, в якому система знаходилась в момент $t = 0$, в положення, при якому $x = A$. Повна енергія системи складається із кінетичної енергії тягарця, потенціальної енергії тягарця в полі тяжіння Землі (пружинка невагома) і потенціальної енергії пружної деформації. Оскільки сили тертя не враховуються і зовнішніх сил не має, то зміна повної енергії системи дорівнює нулеві, тобто

$$\Delta W_{\text{к}} + \Delta W_{\text{птяж}} + \Delta W_{\text{ппруж}} = 0, \qquad (4)$$

де $\Delta W_{\text{к}}$ – зміна кінетичної енергії, $\Delta W_{\text{птяж}}$ – зміна потенціальної енергії в полі тяжіння Землі, $\Delta W_{\text{ппруж}}$ – зміна потенціальної енергії пружної деформації.

Після визначення амплітуди коливань початкову фазу φ_0 можна знайти, виходячи із початкових умов, тобто значення зміщення x і швидкості υ_x в момент часу $t = 0$.

Розв'язок. Циклічна частота коливань

$$\omega_0 = \sqrt{50/50\cdot 10^{-3}} = 10\sqrt{10} \text{ рад/с.}$$

Розпишемо рівняння (4). В початковий момент часу ($t = 0$) зміщення $x = x_0$, а швидкість $\upsilon_x = \upsilon_0$. В кінцевому положенні $x = A$, $\upsilon_x = 0$ Тому

$$\Delta W_{\text{к}} = -m\upsilon_0^{\,2}/2,\ \Delta W_{\text{птяж}} = -mg(A - x_0), \qquad (5)$$

$$\Delta W_{\text{ппруж}} = k(S_0 + A)^2/2 - k(S_0 + x_0)^2/2.$$

Зміна потенціальної енергії системи буде:

$$\Delta W_{\text{птяж}} + \Delta W_{\text{ппруж}} =$$

$$= -mg(A - x_0) + kA^2/2 - kx_0^{\,2}/2 + kS_0(A - x_0)$$

(члени які містять $S_0^{\,2}$, взаємно скорочуються). Враховуючи рівність (1) , отримаємо, що

$$\Delta W_{\text{птяж}} + \Delta W_{\text{ппруж}} = kA^2/2 - kx_0^{\,2}/2. \qquad (6)$$

Підставимо (6) і вираз $\Delta W_к$ із (5) в (4), і отримаємо, що

$$-m\upsilon_0^{\ 2}/2+kA^2/2-kx_0^{\ 2}/2=0.$$

Звідки знаходимо амплітуду коливань:

$$A=\sqrt{m\upsilon_0^{\ 2}/k+x_0^{\ 2}}=0{,}03\ \text{м}.$$

Запишемо тепер вираз для $x(t)$ і $\upsilon_x(t)$:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0),$$

$$\upsilon_x=\dot{x}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0).$$

При $t=0$

$$x(0)=A\cos\varphi_0=x_0,\ \upsilon_x(0)=\dot{x}=-A\omega_0\sin\varphi_0=\pm\upsilon_0. \quad (7)$$

Значить $\varphi_0=\arccos(x_0/A)=0{,}268\ \pi$ (або $1{,}732\ \pi$). Якщо швидкість υ_0 направлена вгору, то $\upsilon_x(0)=-0{,}707$ м/с і із (7) $\sin\varphi_0=\dfrac{0{,}707}{0{,}3\sqrt{10}}$. Звідки знаходимо, що $\varphi_0=0{,}841$ рад $=0{,}268\ \pi$. Тоді рівняння коливань запишеться так:

$$x(t)=0{,}03\cos(10\sqrt{10}t+0{,}268\pi)\ \text{м}.$$

Якщо швидкість в момент $t=0$ направлена вниз, то у виразі (7)

$$\upsilon_0=+0{,}707\ \text{м/с} \ \text{ і } \ \sin\varphi_0=-\frac{0{,}707}{0{,}3\sqrt{10}}$$

Звідки знаходимо, що $\varphi_0=1{,}732\,\pi$. Тоді рівняння коливання запишеться так:

$$x(t)=0{,}03\cos(10\sqrt{10}t+1{,}732\pi)\ \text{м}.$$

1.6 Задачі

Механічні коливання

1.7. Визначити максимальну швидкість та максимальне прискорення точки, що коливається за законом

$$x = 2\cos \pi(t+1) \text{ см.}$$

1.8. Рівняння руху точки задається у вигляді $x = 2\sin(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$ см. Знайти період коливань, максимальну швидкість та максимальне прискорення точки.

1.9. Рівняння руху точки дано у вигляді $x = \sin\frac{\pi}{6}t$. Знайти моменти часу t, в яких досягається максимальна швидкість й максимальне прискорення.

1.10. Точка виконує гармонічне коливання. Період коливань T = 2 с, амплітуда A = 50 мм. Знайти швидкість υ точки в момент часу, коли зміщення точки від положення рівноваги x = 25 мм.

1.11. Написати рівняння гармонічного коливального руху, якщо максимальне прискорення точки a_{max}= 49,3 см/с^2, період коливань T = 2 с і зміщення точки від положення рівноваги в початковий момент часу x_0 = 25 мм.

1.12. При зміщенні точки від положення рівноваги на величину x_1 = 2,4 см швидкість точки υ_1 = 3 см/с, а при зміщенні x_2 = 2,8 см її швидкість υ_2 = 2 см/с. Знайти амплітуду і період цього коливання.

1.13 Частинка здійснює гармонічні коливання вздовж осі X біля положення рівноваги $x = 0$. Частота коливань ω_0 = 4 рад/с. В деякий момент часу координата частинки x_0 = 25 см, а швидкість υ_{x_0} = 100 см/с. Знайти координату x і швидкість υ_x частинки через t = 2,4 с після цього моменту.

1.14 Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T. Знайти: а) час t_1, за який зміщення частинки змінюється від 0 до $A/2$, б) час t_2, за який зміщення частинки змінюється від $A/2$ до A.

1.15. Частинка коливається вздовж осі X за законом $x = 0{,}1 \sin 6{,}28\, t$ (м). Визначити середнє значення модуля швидкості частинки: а) за період коливань T, б) за першу 1/8 частину T, в) за другу 1/8 частину T. Співставити отримані результати.

1.16. За який час від початку руху точка, яка здійснює коливальний рух, рівняння якого $x = 7 \sin 0{,}5\, \pi\, t$, пройде шлях від положення рівноваги до максимального зміщення ?

1.17. Початкова фаза гармонічних коливань дорівнює нулю. Через яку долю періоду швидкість точки буде дорівнювати половині її максимального значення.

1.18. Залежність координати x від часу t має вид $x = a\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$. Визначити залежність $\dot{x}(x)$ (швидкості від координати) і $\ddot{x}(x)$ (прискорення від координати). Намалювати графіки цих залежностей.

1.19. Залежність координати x від часу t має вид $x = A\sin(5\pi t + \varphi_0)$. В початковий момент часу $t = 0$ значення координати $x_0 = 2$ см, а швидкості $\dot{x}_0 = 35$ см/с. Визначити амплітуду A і початкову фазу φ_0.

1.20. Кулька підвішена на довгій нитці. Один раз її піднімають по вертикалі до точки підвісу, другий раз її відхиляють, як маятник на невеликий кут. В якому із цих випадків кулька швидше повернеться в початкове положення, якщо її відпустити?

1.21. Точка здійснює гармонічні коливання вздовж деякої прямої з періодом $T_0 = 0{,}60$ с і амплітудою $A = 10{,}0$ см. Знайти середню швидкість точки за час, на протязі якого вона проходить шлях $A/2$: а) із крайнього положення; б) із положення рівноваги.

1.22. В момент t = 0 частинка починає рухатись вздовж осі x так, що проекція її швидкості змінюється за законом $\upsilon_x = 35\cos\pi t$ см/с, де t в секундах. Знайти шлях, який пройде ця частинка за перші t = 2,80 с після початку руху.

1.23. Мідна кулька, яка підвішена на пружині, здійснює гармонічні коливання. Як зміниться період коливань, якщо до пружини підвісити замість мідної алюмінієву кульку такого ж радіусу?

1.24. В молекулі азоту N_2 частота пружних коливань атомів $\omega_0 = 4{,}45 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, маса одного атома $m = 2{,}32 \cdot 10^{-26}$ кг. Знайти коефіцієнт k квазіпружної сили, яка діє між атомами.

1.25. До спіральної пружинки підвішують знизу тягарець, маса якого значно більша маси пружинки. При цьому пружинка розтягується на 4 см. З якого частотою буде коливатись тягарець, якщо йому надати поштовх у вертикальному напрямку?

1.26. Рух поршня у двигуні внутрішнього згорання можна прийняти як гармонічні коливання. Визначити силу, яка діє на колінчатий вал зі сторони поршня, коли він знаходиться у „мертвій" точці. Маса поршня m = 1,2 кг, частота обертів колінчатого валу f = 200 об/хв, хід поршня a = 12 см.

1.27. Тягарець, маса якого m = 50 г, підвішений на пружині, жорсткість якої k = 49,3 Н/м. Тягарець піднімають до такого положення, при якому пружина не напружена (x = 0), і відпускають без поштовху. Нехтуючи тертям і масою пружини, а) знайти період T_0 і амплітуду A коливань, що виникли; б) вважати, що вісь x направлена вниз і, прийнявши точку $x = 0$ за початкове положення тягарця, написати рівняння руху тягарця.

1.28. Визначити: а) силу, яка діє на частинку, що здійснює гармонічні коливання, при проходженні нею положення рівноваги; б) її швидкість в той момент, коли вона знаходиться „в крайньому" положенні.

1.29. Деяка точка рухається вздовж осі x за законом $x = a\sin^2(\omega_0 t - \pi/4)$. Знайти: а) амплітуду і період коливань; зобразити графік $x(t)$; б) проекцію швидкості як функцію координати x; зобразити графік $\upsilon_x(x)$.

1.30. В кабіні ліфта підвішений маятник, період коливань якого, коли ліфт нерухомий, дорівнює T_0.

а) Який буде період T коливань маятника, якщо ліфт буде опускатися з прискоренням, яке дорівнює $3g/4$, де g – прискорення вільного подення.

б) З яким прискоренням a необхідно піднімати ліфт для того, щоб період коливань маятника дорівнював $T_0/2$.

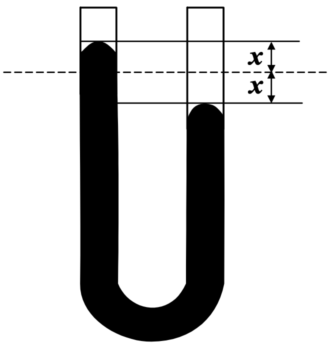

Рис.1.3.

1.31. Нехтуючи тертям, визначити період малих коливань ртуті, яка налита в U – подібну трубку із внутрішнім перерізом S = 0,5 см^2 (рис. 1.3). Маса ртуті m = 338 г.

1.32. Дерев'яне поліно намокло у воді і занурилось у воду так, що над водою знаходиться тільки дуже незначна його частина (порівняно із довжиною). Переріз поліна по всій довжині вважати однаковим. При слабому вертикальному поштовху поліна воно починає коливатись. Період цих вертикальних коливань поліна T_0 = 3 с. Визначити довжину поліна.

1.33. Зобразити на векторній діаграмі коливання а) $x = a\cos(\omega_0 t + \pi/4)$, б) $x = -2a\cos(\omega_0 t - \pi/6)$ в моменти часу $t_1 = 0$ і $t_2 = \pi/(2\omega_0)$. Константа $a > 0$.

1.34. Зобразити на векторній діаграмі в моменти часу $t = 0$ зміщення $x = a\cos(\omega_0 t + \pi/3)$, швидкість $\dot{x}$, прискорення $\ddot{x}$ і похідну $d^{11}x/dt^{11}$.

1.35. Залежність координати x від часу t має вид: а) $x = a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \sin\omega_0 t$; б) $x = a\sin^2\omega_0 t$; в) $x = at\sin\omega_0 t$; г) $x = 3 - 4\sin(\omega_0 t - \pi/6)$; д) $x = a\sin^3\omega_0 t$. Які із цих залежностей описують гармонічні коливання? Визначити для цих випадків значення $x = x_0$, які відповідають положенню рівноваги, амплітуду A, частоту Ω і початкову фазу φ_0 для залежності $x = A\cos(\Omega t + \varphi_0)$.

1.36. Написати рівняння результуючого коливання, яке отримується в результаті додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з однаковою частотою $\nu_1 = \nu_2 = 5$ Гц і з однаковою початковою фазою $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/3$. Амплітуди коливань дорівнюють A_1= 0,1 м і A_2= 0,05 м.

1.37. Точка бере участь одночасно у двох коливаннях. Періоди і початкові фази однакові. Амплітуди коливань дорівнюють A_1= 3 см, A_2= 4 см. Знайти амплітуду результуючого коливання, якщо коливання виконуються:

а) в одному напрямку; б) у взаємно перпендикулярних напрямках.

1.38. Знайти графічним методом амплітуди коливань, які виникають при складанні наступних коливань одного напрямку:

а) $x_1 = 3\cos(\omega_0 t + \pi/3)$, $x_2 = 8{,}0\sin(\omega_0 t + \pi/6)$;

б) $x_1 = 3{,}0\cos\omega_0 t$, $x_2 = 5{,}0\cos(\omega_0 t + \pi/4)$,

$x_3 = 6{,}0\sin\omega_0 t$.

1.39. Визначити амплітуду і початкову фазу гармонічного коливання, яке отримується від додавання однаково направлених коливань, що задаються рівняннями $x_1 = 0{,}02\sin(5\pi t + \pi/2)$ м і $x_2 = 0{,}03\sin(5\pi t + \pi/4)$ м.

1.40. В результаті додавання двох однаково направлених гармонічних коливань с однаковими амплітудами і однаковими періодами отримується результуюче коливання з тим же періодом і тією ж амплітудою. Знайти різницю фаз коливань, які додаються.

1.41 Рух частинки – це суперпозиція двох гармонічних коливань вздовж осі X. Частоти цих коливань $\nu_1 =$ 100 Гц і ν_2 = 101 Гц. Визначити частоту $\nu_б$ і період $T_б$ биття. Скільки повних коливань здійснює частинка за один період биття?

1.42. Точка приймає участь одночасно у двох коливаннях одного напрямку, які відбуваються за законом $x_1 = A\cos\omega_0 t$ і $x_2 = A\cos 2\omega_0 t$. Знайти максимальну швидкість точки.

1.43. Точка приймає участь одночасно в трьох коливаннях, що відбуваються вздовж однієї прямої: $x_1 = 2\cos t;$ $x_2 = 2\sin(t - \pi/4);$ $x_3 = 2\cos(t + \pi/2)$ (зміщення дано в сантиметрах). Визначити амплітуду і початкову фазу результуючого коливання.

1.44. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = 2\sin\omega_0 t$ і $y = 2\cos\omega_0 t$. Знайти траєкторію результуючого руху точки.

1.45. Точка бере участь в двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \cos\pi t$ і $y = \cos\frac{\pi}{2}t$. Знайти траєкторію результуючого руху точки.

1.46. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \sin\pi t$ і $y = 2\sin(\pi t + \pi/2)$. Знайти траєкторію результуючого руху точки і накреслити її графік з нанесенням масштабу.

1.47. Точка бере участь у двох взаємно перпендикулярних коливаннях $x = \sin\pi t$ і $y = 4\sin(\pi t + \pi)$. Знайти траєкторію результуючого руху точки і накреслити її графік з нанесенням масштабу.

1.48. Енергія частинки, маса якої m, є функція її координати x і швидкості $\dot{x}$: а) $W = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$;б) $W = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2 + æx$; в) $W = m\dot{x}^2/2 + kx^4/2$, де $k > 0$ і æ

– константи. В яких випадках частинка здійснює гармонічні коливання? Знайти для цих випадків частоту власних коливань ω_0.

1.49. Матеріальна точка (наприклад, кулька на пружині) під дією квазіпружної сили $F = -kx$ здійснює коливання вздовж осі X навколо положення рівноваги. Показати, що середнє по часу значення кінетичної і потенціальної енергії при таких коливаннях однакове.

1.50. Матеріальна точка, маса якої 10 г, коливається згідно рівняння $x = 5\sin(\pi t/5 + \pi/4)$ см. Знайти максимальну силу, яка діє на точку, і її повну енергію.

1.51. Повна енергія тіла, яке здійснює гармонічний коливальний рух, W = 12 мкДж, максимальна сила, яка діє на тіло F_{max} = 1,5 мН. Написати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань T_0 = 2 с і початкова фаза $\varphi_0 = \pi/3$.

1.52. Амплітуда гармонічних коливань матеріальної точки A = 2 см, повна енергія коливань W = 0,3 мкДж. При якому зміщенні x від положення рівноваги на цю точку буде діяти сила F = 22,5 мкН?

1.53. До пружини підвішений тягар. Максимальна кінетична енергія коливань тягаря дорівнює 1 Дж. Амплітуда коливань A = 5 см. Знайти жорсткість пружини.

1.54. Частинка, маса якої $m = 20$ г, здійснює гармонічні коливання вздовж осі X біля точки x = 0 з частотою ω_0 = 2 рад/с. В початковий момент часу $t = 0$ її координата x і швидкість $\dot{x}$ дорівнюють відповідно: а) $x(0)$ = 0, $\dot{x}(0)$ = –5 см/с; б) $x(0)$ = – 4 см, $\dot{x}(0)$ = 0; в) $x(0)$ = – 4 см, $\dot{x}(0)$ = 5 см/с. Визначити для цих випадків повну механічну енергію частинки, амплітуду коливань A і амплітуду швидкості $\dot{x}_m$.

1.55. Написати залежність $x(t)$ у випадках а), б), в) задачі 1.54 із урахуванням вказаних там початкових умов.

1.56. Для випадків а) і б) – задачі 1.54 написати залежність від часу кінетичної і потенціальної енергії частинки.

1.57. Енергія частинки, яка здійснює гармонічні коливання, має вид $W = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$, де m – маса частинки, k – коефіцієнт квазіпружної сили. Знайти амплітуду A коливань і максимальну швидкість частинки $\dot{x}_m$.

1.58. Для гармонічного маятника, маса якого m, а координата $x = a\cos(\omega_0 t + \pi/4)$, намалювати графіки залежностей: а) кінетичної енергії $W_к(t)$, потенціальної енергії $W_п(t)$, повної механічної енергії $W(t)$; б) $W_к(W_п)$, $W_к(x)$, $W_п(x)$.

1.59. Знайти відношення кінетичної енергії $W_к$ точки, що виконує гармонічне коливання, до її потенціальної енергії $W_п$ для моментів часу: а) $t = T_0/12$; б) $t = T_0/8$; б) $t = T_0/6$. Початкова фаза коливань $\varphi_0 = 0$.

1.60. Знайти відношення кінетичної енергії $W_к$ точки, що здійснює гармонічне коливання, до її потенціальної енергії $W_п$ для моментів, коли зміщення точки від положення рівноваги становить: а) $x = A/4$; б) $x = A/2$; в) $x = A$, де A – амплітуда коливань.

Електричні коливання

1.61. Зеленому кольору відповідає електромагнітна хвиля з циклічною коловою частотою коливань вектора $\vec{E}$ (напруженості електричного поля) $\omega_0 = 3{,}43 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Скільки повних коливань здійснює в секунду вектор $\vec{E}$ і чому дорівнює період цих коливань?

1.62. Конденсатор, ємність якого $C = 8$ мкФ, заряджається до напруги $U_0 = 20$ В і замикається на котушку, індуктивність якої

$L = 0{,}2$ мГн. Чому дорівнює амплітуда I_m сили струму в такому коливальному контурі? Активним опором контуру знехтувати.

1.63. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого $C = 25$ нФ, і котушки, індуктивність якої $L = 1{,}015$ Гн. Обкладка конденсатора має заряд $q = 2{,}5$ мкКл. Написати рівняння (з числовими коефіцієнтами) зміни різниці потенціалів U на обкладках конденсатора і струму I в колі. Знайти різницю потенціалів на обкладках конденсатора й струм в колі в моменти часу $T_0/8$, $T_0/4$, $T_0/2$. Побудувати графіки цих залежностей в межах одного періоду.

1.64. Рівняння зміни з часом різниці потенціалів на обкладинках конденсатора в коливальному контурі має вигляд $U = 50 \cos 10^4 \pi t$, В. Ємність конденсатора $C = 0{,}1$ мкФ. Знайти період коливань, індуктивність контуру, закон зміни з часом струму в колі.

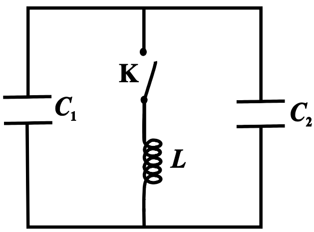

Рис. 1.4

1.65. В коливальному контурі (рис. 1.4) індуктивність котушки $L = 2{,}5$ мГн, а ємності конденсаторів $C_1 = 2{,}0$ мкФ і $C_2 = 3{,}0$ мкФ. Конденсатори зарядили до напруги $U = 180$ В і замкнули ключ K. Знайти: а) період власних коливань; б) амплітудне значення струму через котушку.

1.66. Чому дорівнює відношення енергії магнітного поля коливального контура до енергії електричного поля для моменту часу $t = T_0/8$. Початкова фаза коливань $\varphi_0 = 0$.

1.67. Яка енергія конденсатора в коливальному контурі в момент максимуму струму в контурі у випадках: а) опір контура нехтовно малий; б) опір контура має помітну величину R?

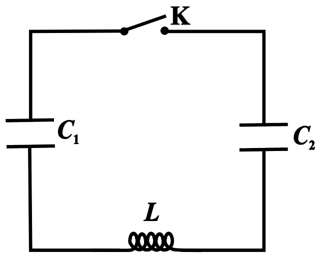

Рис. 1.5

1.68. Коло складається із послідовно з'єднаних двох однакових конденсаторів, ємність кожного з яких $C = 10$ мкФ і котушки з індуктивністю $L =$ 2 мГн (рис.1.5). При розімкнутому ключі К один із конденсаторів заряджають до різниці потенціалів $U = 100$ В. Потім джерело відключають. Визначити закон зміни з часом заряду на конденсаторі після замикання ключа К.

2. ЗАГАСАЮЧІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

2. 1. Питання теми

1. Загасаючі коливання та їхні характеристики.
2. Вимушені коливання.
3. Резонанс.

2. 2. Основні визначення та формули

1. Диференціальне рівняння загасаючих коливань при наявності сили опору $F_{оп}$ ($F_{оп} = -rv$, де r – коефіцієнт опору, v – швидкість) та його розв'язок:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_з t + \varphi_0),$$

або (2.1)

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \varphi_0),$$

де A_0 – максимально можливе відхилення від положення рівноваги, β – коефіцієнт загасання $(\beta = \dfrac{r}{2m}$, де m – маса тіла, яке здійснює коливальний рух), φ_0 – початкова фаза, $\omega_з$ – циклічна частота загасаючих коливань:

$$\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{2.2}$$

де ω_0 – циклічна частота за відсутності загасання, так звана “власна” частота.

2. Логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \ln\frac{A_i}{A_{i+1}} = \beta T, \qquad (2.3)$$

де A_i та A_{i+1} – амплітуди двох послідовних коливань через період коливань T. Логарифмічний декремент загасання величина обернена до числа коливань N_e, які здійснює система за час, на протязі якого амплітуда зменшується в $e \approx 2{,}718$ раз:

$$\lambda = 1/N_e\,.$$

3. Для електричного коливального контура, який має ємність C, індуктивність L та опір R, заряд на обкладках конденсатора змінюється з часом за законом

$$q = q_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_з t + \varphi_0), \qquad (2.4)$$

або

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \varphi_0),$$

де $q_0 e^{-\beta t}$ – „амплітуда” загасаючих коливань, q_0 – максимальний заряд конденсатора, φ_0 – початкова фаза, $\beta = R/2L$ – коефіцієнт загасання .

4. Добротність коливального контуру визначається за формулою:

$$Q = \pi/\lambda\,. \qquad (2.5)$$

5. Рівняння вимушених механічних коливань під дією вимушуючої сили

$$F_x = F_0\cos\omega t\,,$$

в диференціальному вигляді буде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t\,, \qquad (2.6)$$

а в інтегральному вигляді –

$$x = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{2.7}$$

де амплітуда зміщення

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{2.8}$$

а

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2.9}$$

В цих формулах f_0 – відношення амплітуди вимушуючої сили F_0 до маси тіла m, ω – циклічна частота вимушуючої сили.

6. Максимум амплітуди коливань досягається при частоті вимушуючої сили

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{2.10}$$

7. Рівняння вимушених електричних коливань при послідовному включені в контур напруги $U = U_m \cos\omega t$ в диференцціальному вигляді буде:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos\omega t. \tag{2.11}$$

Розв’язоком цього рівняння є

$$q = q_a\cos(\omega t - \varphi), \tag{2.12}$$

де амплітуда заряду на конденсаторі

$$q_a = \frac{U_m / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{2.13}$$

а початкова фаза φ визначається за формулою (2.9). Максимум заряду (напруги) на конденсаторі досягається при частоті, яка визначається за формулою (2.10).

8. Сила струму в контурі визначається за формулою:

$$I = I_m \cos(\omega t - \psi), \tag{2.14}$$

де амплітуда сили струму

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}, \tag{2.15}$$

а фаза ψ –

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{2.16}$$

9. Амплітуда сили струму досягає максимуму (має місце резонанс) при частоті

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \tag{2.17}$$

2.3. Питання на самопідготовку

1. Записати рівняння загасаючих коливань.
2. Дати визначення коефіцієнта та логарифмічного декремента загасання.
3. Розкрити фізичний зміст добротності коливального контура .
4. Як відрізняється циклічна частота загасаючих коливань від “власної” циклічної частоти коливальної системи?
5. Дати визначення аперіодичного процесу. Записати формулу для визначення критичного опору коливального контуру.
6. Записати рівняння вимушених коливань.
7. З якою частотою відбуваються вимушені коливання?
8. Записати і пояснити формулу для амплітуди вимушеного коливання.

9. Що таке резонанс?

10. Чим пояснюється зсув по фазі між вимушуючою силою (напругою) і зміщенням (зарядом) при вимушених коливаннях?

2.4. Методичні вказівки

1. Циклічна частота $\omega_з$ загасаючих коливань завжди менша від циклічної частоти вільних коливань ω_0 через присутність опору. Таким чином опір середовища призводить до зменшення частоти та до збільшення періоду коливань. Незважаючи на це, в багатьох задачах, якщо опір середовища незначний, його впливом можна знехтувати. Це можливо робити при виконанні таких умов:

$$1)\ \beta^2 \ll {\omega_0}^2,\ \text{або}\ 2)\ \lambda \ll 1. \qquad (2.18)$$

2. Формули, які описують вимушені коливання для механічних і електричних систем за формою подібні (наприклад, формула (2.10)). Якщо для механічних систем $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\beta = r/(2m)$, то для електричних систем $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$, $\beta = R/(2L)$.

2.5. Приклади розв'язування задач

Задача 2.1. Тягар, маса якого 0,5 кг, підвішений до пружини, жорсткість якої $k = 32$ Н/м, здійснює загасаючі коливання. Визначити період коливань у двох випадках: 1) за час, протягом якого здійснилось $n_1 = 88$ коливань, амплітуда зменшилась в $N_1 = 2$ рази; 2) за час двох коливань($n_2 = 2$) амплітуда зменшилась в $N_2 = 20$ раз.

Розв'язок. Період загасаючих коливань $T = 2\pi/\omega_3$. Використавши формулу (2.2) отримаємо, що

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0 - \lambda^2 / T^2}}.$$

Власна частота $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 8\,\dfrac{\text{рад}}{\text{с}}$, а $\beta = \lambda / T$ (згідно формули (2.3)). Розв'язавши це квадратне рівняння відносно T, одержимо, що

$$T = \sqrt{\frac{4\pi}{\omega_0^2} + \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}}{\omega_0} .$$

Амплітуда загасаючих коливань $A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}}$. За умовою задачі $\dfrac{A_0}{A} = N$, $\dfrac{t}{T} = n$, тоді:

$$\frac{A_0}{A} = N = e^{\lambda n}, \quad \text{або } \lambda = \frac{\ln N}{n}.$$

Підставивши значення N та n для двох випадків, отримаємо: $\lambda_1 = 0{,}0079$, $\lambda_2 = 1{,}5$. В першому випадку $\lambda \ll 1$, тому $T_1 \cong \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{8} = 0{,}78$ с, а $T_2 = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 9{,}87 + 2{,}25}}{8} \approx 0{,}81$ с.

Задача 2.2. Добротність коливального контуру $Q = 5$. Визначити на скільки відсотків відрізняється частота $\omega_з$ вільних коливань контура від його власної частоти ω_0.

Розв'язок В задачі необхідно знайти величину

$$x = \frac{\omega_0 - \omega_з}{\omega_0} = 1 - \frac{\omega_з}{\omega_0} . \qquad (1)$$

Згідно (2.2),(2.3) та(2.5):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\omega_з}{\beta 2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1} ,$$

де

$$\beta^2 = \omega_0^2 - \omega_з^2 .$$

Тоді

$$Q^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{\omega_з^2}{\omega_0^2 - \omega_з^2} ; \frac{1}{Q^2} = \frac{4(\omega_0^2 - \omega_з^2)}{\omega_з^2} = 4\frac{\omega_0^2}{\omega_з^2} - 4$$

і

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_з^2} = \frac{1}{4Q^2} + 1. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і отримаємо, що

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1{,}01}} \approx 0{,}005 = 0{,}5\%.$$

Задача 2.3. Деяка точка здійснює загасаючі коливання з частотою $\omega_з = 25$ рад/с. Знайти коефіцієнт загасання β, якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення із положення рівноваги в цей момент в $\eta = 1{,}020$ рази менше від максимально можливого відхилення точки від положення рівноваги.

Розв'язок. Швидкість точки знайдемо за допомогою (2.1), а саме

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega_з t + \varphi_0) + A_0 \omega_з e^{-\beta t} \cos(\omega_з t + \varphi_0).$$

За умовою задачі $\upsilon = 0$ при $t = 0$. З цієї умови знаходимо, що

$$\beta \sin \varphi_0 = \omega_з \cos \varphi_0. \qquad (1)$$

Так як

$$\frac{A_0}{x(0)} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \cdot 0} \sin(\omega_з 0 + \varphi_0)} = \eta, \quad \text{то} \quad \sin\varphi_0 = 1/\eta.$$

Тоді із (1) отримаємо , що

$$\frac{\beta}{\eta} = \omega_з \sqrt{1 - 1/\eta^2}.$$

Звідки

$$\beta = \omega_з \sqrt{\eta^2 - 1} = 5 с^{-1}.$$

Задача 2.4. Коливальний контур складається із послідовно з'єднаних конденсатора $C = 100$ мкФ, котушки індуктивності $L = 10$ мГн і опору $R = 10$ Ом . В початковий момент часу $t = 0$ конденсатору надали заряд $q_0 = 10$ мКл і в контурі виникли загасаючі коливання. Знайти залежність від часу: а) напруги U на конденсаторі; б) сили струму I в контурі; в) е.р.с. самоіндукції ε_s в котушці індуктивності; г) зсув по фазі $\Delta\varphi$ між силою струму I і напругою U ; *д*) зсув по фазі $\Delta\varphi$ між е.р.с. самоіндукції ε_s і напругою U; е) моменти часу, коли напруга U на конденсаторі дорівнює нулю; є) моменти часу, коли струм I в контурі максимальний ; ж) інтервали часу Δt_k і $\Delta t'_k$ між двома послідовними моментами часу, коли напруга на конденсаторі дорівнює нулю і двома послідовними моментами часу, коли струм в контурі максимальний, відповідно.

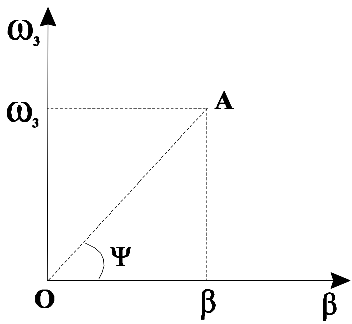

Рис. 2.1

Розв'язок. а) Використаємо формулу (2.4). Із врахуванням початкових умов ($t = 0$, $q = q_0$) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ і (2.4) перепишеться так:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega_з t. \tag{1}$$

Тоді напруга на конденсаторі $U = q / C$, буде змінюватись за законом:

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega_з t, \tag{2}$$

де $U_0 = q_0 / C = 100$ В, $\beta = R / 2L$, $\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$.

б) Сила струму в контурі $I = \dfrac{dq}{dt}$ і тому

$$I = -q_0 e^{-\beta t}(\beta \cos\omega_з t + \omega_з \sin \omega_з t).$$

Значенням β і $\omega_з$ на координатній площині $\beta 0 \omega_з$ відповідає точка A (рис. 2.1). Тоді

$$\cos\psi = \beta / \sqrt{\omega_з^2 + \beta^2},$$

$$\sin\psi = \omega / \sqrt{\omega_з^2 + \beta^2},\ \mathrm{tg}\psi = \omega_з / \beta$$

і вираз для струму можна переписати так:

$$I = -q_0 \sqrt{\omega_з^2 + \beta^2} e^{-\beta t} \cdot \ (\cos\psi \cos\omega_з t + \sin\psi \sin\omega_з t)$$

або

$$I = q_0 \sqrt{\omega_з^2 + \beta^2} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_з t + \pi - \psi). \qquad (3)$$

в) Е.р.с. самоіндукції $\varepsilon_s = -L \dfrac{dI}{dt}$. Продиференцюємо формулу (3) по часу і отримаємо:

$$\varepsilon_s = L q_0 \sqrt{\omega_з^2 + \beta^2} \cdot e^{-\beta t} \cdot (\beta \cos(\omega_з t + \pi - \psi) + \\ + \omega_з \sin(\omega_з t + \pi - \psi)).$$

Скористаємось формулами, приведеними у пункті б) даної задачі, і вираз для ε_s перепишеться так:

$$\varepsilon_s = L q_0 (\omega_з^2 + \beta^2) \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_з t + \pi - 2\psi). \qquad (4)$$

г) Згідно формул (2) і (3) зсув по фазі між напругою і силою струму

$$\Delta\varphi = \pi - \psi = \pi - \mathrm{arctg}(\omega_з / \beta)\,.$$

д) Із формул (2) і (4) знайдемо різницю фаз $\Delta\varphi'$ між напругою на конденсаторі та е.р.с. самоіндукції.

$$\Delta\varphi' = \pi - 2\psi = \pi - 2\mathrm{arctg}(\omega_3 / \beta)\,.$$

е) Напруга на конденсаторі дорівнює нулю, коли $\cos\omega_з t = 0$. Звідки знаходимо, що

$$\omega_з t = \frac{\pi}{2} + \pi k\ \text{, де } k = 0, 1, 2, 3,\ldots\,. \tag{5}$$

є) Струм в контурі максимальний, коли згідно формули (3) $\cos(\omega_з t + \pi - \frac{\pi}{3}) = \pm 1$ (Враховано, що $\psi = \mathrm{arctg}\frac{\omega_3}{\beta} = \pi/3$).

Звідки знаходимо, що $\omega_з t_1' + \frac{2\pi}{3} = 2\pi k$ і $\omega_з t_2' + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2\pi k$,

або

$$\omega_3 t_1' = 2\pi(k - \frac{1}{3}),\ \ \omega_3 t_2' = 2\pi(k + \frac{1}{6})\,. \tag{6}$$

ж) Інтервал часу між двома послідовними моментами часу, коли напруга на конденсаторі дорівнює нулеві, із формули (5) дорівнює

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \frac{\pi}{\omega_з}(\frac{1}{2} + k + 1 - \frac{1}{2} - k) = \frac{\pi}{\omega_3}\,. \tag{7}$$

Інтервал часу між двома послідовними моментами часу, коли струм в контурі максимальний знайдемо із формули (6), а саме

$$\Delta t_k' = t_2' - t_1' = \frac{2\pi}{6\omega_з} + \frac{2\pi}{3\omega_з} = \frac{\pi}{\omega_3}\,. \tag{8}$$

Порівнюючи (7) і (8) бачимо, що $\Delta t_k = \Delta t'_k$. Тепер приведемо числові розрахунки:

$$\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L2}} = 500\sqrt{3}\ \text{с}^{-1},$$

$$\beta = \frac{R}{2L} = 500\ \text{с}^{-1};$$

$$\sqrt{\omega_з^2 + \beta^2} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\ \text{с}^{-1};\ \omega_з^2 + \beta^2 = 10^6\ \text{с}^{-1};$$

$$I_0 = q_0\sqrt{\omega_з^2 + \beta^2} = 10^{-2} \cdot 10^3\ \text{А} = 10\ \text{А};$$

$$Lq_0(\omega_з^2 + \beta^2) = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6\ \text{В} = 100\ \text{В}.$$

Тоді формули (2), (3) і (4) перепишуться так:

$$U = 100\, e^{-500t} \cos 500\sqrt{3}\, t\ \text{В},$$

$$I = 10\, e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}\, t + \frac{2\pi}{3})\ \text{А},$$

$$\varepsilon_s = 100\, e^{-500t} \cos(500\sqrt{3}\, t + \frac{\pi}{3})\ \text{В},$$

а

$$\Delta\varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3,\ \Delta\varphi' = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$$

і

$$\Delta t_k = \Delta t'_k = \frac{\pi}{500\sqrt{3}}\ \text{с} = 3{,}63\ \text{мс}.$$

Задача 2.5. Енергія загасаючих коливань маятника , що відбуваються в деякому середовищі, за час $t = 2$ хв зменшилась в $N = 100$ раз. Визначити коефіцієнт опору r, якщо маса маятника $m = 0{,}1$ кг.

Розв'язок. Розглянемо рівняння (2.1). Множник $A = A_0 e^{-\beta t}$ визначає амплітуду коливань, яка зменшується з часом. Енергія коливань, як відомо, пропорційна квадрату амплітуди.
Тоді

$$N = \frac{W_0}{W} = \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 = 100,$$

або

$$\frac{A_0}{A} = \sqrt{N} = 10.$$

Звідки отримаємо , що

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t} = 10.$$

Прологарифмувавши останній вираз, знайдемо, що:

$$\beta = \frac{\ln 10}{t}.$$

Так як $\beta = \frac{r}{2m}$, то

$$r = 2m\beta = 2m\frac{\ln 10}{t} = 2 \cdot 0{,}1\frac{2{,}3}{120} \cong 0{,}0038\,\text{кг/с}.$$

Задача 2.6. Знайти добротність математичного маятника, довжина якого l = 50 см, якщо за проміжок часу τ = 5,2 хв його повна механічна енергія зменшилась в η = $4 \cdot 10^4$ раз.

Розв'язок. За формулою (2.5) добротність коливальної системи $Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T}$, де $T = 2\pi / \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2}$ – період загасаючих коливань математичного маятника. При цьому враховано,