що $\omega_0^2 = g/l$, де g – прискорення вільного падіння. Тому

$$Q = \sqrt{\frac{g}{l} - \beta^2} \,/\, 2\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l\beta^2} - 1}\,.$$

Повна механічна енергія коливальної системи W ~ x^2~exp{– 2 βt }, а тому $\eta = \dfrac{W_0}{W(\tau)} = \exp\{2\beta\tau\}$. Звідки знаходимо, що $\beta = \dfrac{\ln\eta}{2\tau}$.

Тоді

$$Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\tau^2 g}{l\ln^2\eta} - 1} = 130\,.$$

Задача 2.7. Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого $C = 4$мкФ, котушки, індуктивність якої $L = 2$мГн, і активного опору $R = 10$ Ом. Знайти відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в момент максимального струму.

Розв'язок. Відношення енергії поля котушки до енергії поля конденсатора буде:

$$\frac{W_L}{W_C} = \frac{LI^2/2}{q^2/2C} = LCI^2/q^2\,.$$

Таким чином задача зводиться до знаходження відношення I^2/q^2 в момент максимуму струму в контурі. Згідно формули (2.4) сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0(-\beta)\exp\{-\beta t\}\sin(\omega_3 t + \varphi_0) +$$
$$+ q_0\exp\{-\beta t\}\omega_3\cos(\omega_3 t + \varphi_0).$$

Тоді

$$\frac{I}{q} = -\beta + \omega_3 \operatorname{ctg}(\omega_3 t + \varphi_0).$$

В момент максимуму струму $\frac{dI}{dt} = 0$. Звідки знаходимо, що

$$\operatorname{ctg}(\omega_3 t + \varphi_0) = \frac{\beta^2 - \omega_3^2}{2\beta\omega_3}.$$

Тоді

$$\frac{I}{q} = -\beta + \omega_3 \frac{\beta^2 - \omega_3^2}{2\beta\omega_3} = -\frac{\beta^2 + \left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\right)^2}{2\beta} =$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{2\beta} = -\frac{1}{LC\frac{R}{L}} = -\frac{1}{RC}.$$

Значить

$$\frac{W_L}{W_C} = \frac{L}{R^2 C} = 5.$$

Задача 2.8. Параметри коливального контуру мають значення: C = 1 мкФ; L = 6 мГн; R = 0,5 Ом. Яку потужність P потрібно підводити до контуру, щоб підтримати в ньому незагасаючі коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m = 10 В?

Розв'язок. Амплітуда напруги $U = q / C$ на конденсаторі згідно (2.4) загасає з часом за законом $U = U_m e^{-\beta t}$, де β – коефіцієнт загасання, що дорівнює $\frac{R}{2L}$. Енергія, яка накопичена в контурі в момент $t = 0$,

$$W = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Зменшення енергії за 1 період коливань:

$$\Delta W = W(0) - W(T) = \frac{CU_m^2}{2}(1 - e^{-2\beta T}).$$

Згідно умови задачі отримуємо такі числові величини:

$$\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^3\ \text{с}^{-2}; \qquad \omega^2{}_0 = \frac{1}{LC} \approx 1{,}7 \cdot 10^8\ \text{с}^{-2}.$$

Тобто $\beta^2 << \omega^2{}_0$. Це означає, що загасання слабе ($2\beta T << 1$) і тоді можна записати, що $e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T$. Тобто

$$\Delta W = \frac{CU_m^2}{2} 2\beta T = \frac{CU_m^2}{2L} RT.$$

Це означає, що у випадку слабого загасання, втрати енергії в контурі за один період коливань є однаковими і не залежать від часу. Тоді, щоб підтримувати в контурі коливання, необхідно підводити потужність

$$P = \frac{\Delta W}{T} = \frac{CU_m^2 R}{2L} = \frac{10^{-6} \cdot 10^2 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Вт} = 4{,}2\ \text{мВт}.$$

Задача 2.9. Чому дорівнює амплітуда вимушених коливань при резонансі, якщо при дуже малій (порівняно з власною) частоті вимушених коливань вона дорівнює $A = 0{,}1$ см, а логарифмічний декремент загасання $\lambda = 0{,}01$?

Розв'язок. Підставимо (2.10) в (2.8) і отримаємо амплітуду вимушених коливань при резонансі, а саме

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При дуже малій частоті вимушуючої сили $(\omega \approx 0)$ із формули (2.8) знаходимо, що

$$A = f_0 / \omega_0^2.$$

Із цих двох формул знаходимо, що

$$A_{\text{рез}} = \frac{A\omega_0^2}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

За формулою (2.3) логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \beta T = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta^2} - 1}}.$$

Так як $\lambda = 0{,}01 << 1,$ то $\frac{\omega_0^2}{\beta^2} >> 1$, тобто $\omega_0^2 >> \beta^2$. Це означає, що $\lambda \approx 2\pi\beta / \omega_0$. Тоді амплітуда коливань при резонансі

$$A_{\text{рез}} = \frac{A\omega_0}{2\beta} = \frac{A\pi}{2\pi\beta / \omega_0} = \frac{\pi A}{\lambda} = 31 \text{ см}.$$

Задача 2.10. При частотах вимушуючої гармонічної сили $\omega_1 = 300$ с$^{-1}$ і $\omega_2 = 350$ с$^{-1}$ амплітуда швидкості частинки дорівнює половині максимального значення. Знайти: а) частоту, яка відповідає резонансу швидкості; б) коефіцієнт загасання β та частоту загасаючих коливань.

Розв'язок. Швидкість частинки $\upsilon = \frac{dx}{dt}$. Із формули (2.7) знаходимо, що

$$\upsilon = -A\omega \sin(\omega t - \varphi).$$

Амплітуда швидкості частинки

$$\upsilon_a = A\omega = \frac{f_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

Частоту ω, при якій υ_a має максимальне значення, знайдемо із умови $d\upsilon_a / d\omega = 0$. Ця частота дорівнює $\omega_{рез} = \omega_0$. При такій частоті вимушуючої сили, швидкість буде мати максимальне значення

$$\upsilon_{\max} = f_0 / (2\beta). \tag{1}$$

а) Згідно умови задачі $\upsilon_a(\omega_1) = \upsilon_a(\omega_2)$, або

$$\frac{f_0\omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{f_0\omega_2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}.$$

Із цього співвідношення знаходилося, що

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 324 \text{ с}^{-1}.$$

б) Коефіцієнт загасання знайдемо із співвідношення (1) і умови задачі, а саме:

$$\frac{\upsilon_{\max}}{2} = \frac{f_0}{4\beta} = \frac{f_0\omega_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}},$$

де $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$. Розв’язавши це рівняння відносно β, знаходимо, що

$$\beta = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2\sqrt{3}} = 14{,}4 \text{ с}^{-1}.$$

Тоді частота загасаючих коливань

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_1\omega_2 - \frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{12}} = 323{,}7 \text{ с}^{-1}.$$

Задача 2.11. В коливальний контур послідовно ввімкнули джерело е.р.с. з амплітудою $U_m = 5$ В. Амплітуда напруги на конденсаторі у випадку слабого загасання при резонансі дорівнює $U_{\max} = 150$ В. Визначити добротність коливального контуру, якщо загасання слабе.

Розв'язок. За формулою (2.13) амплітуда напруга на конденсаторі $U = q_a / C$, тобто

$$U = \frac{U_m}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}.$$

При резонансній частоті (2.10) напруга приймає максимальне значення

$$U_{\max} = \frac{U_m}{2LC\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Для випадку слабого загасання, коли $\omega_0^2 >> \beta^2$,

$$U_{\max} = \frac{U_m}{2\beta LC\omega_0} = \frac{U_m\omega_0}{2\beta}.$$

Добротність коливальної системи:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta \mathrm{T}} = \frac{\pi\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Тому

$$Q = \frac{U_{\max}}{U_m} = 30.$$

Задача 2.12. Коло складається із послідовного з'єднаних конденсатора, ємність якого $C = 50$ мкФ, опору $R = 20$ Ом і котушки індуктивності $L = 20$ мГн, опором якої можна знехтувати. Послідовно в коло включений генератор синусоїдальної напруги, частоту якого можна змінювати при сталій амплітуді. Знайти частоту, при якій амплітуда напруги на котушці буде максимальною. Порівняти її із власною частотою контуру.

Розв'язок. Якщо активним опором котушки можна знехтувати, то напруга на котушці буде дорівнювати е.р.с. самоіндукції, тобто

$$U_L = -L\frac{dI}{dt}.$$

Із формули (2.14) отримаємо, що

$$\frac{dI}{dt} = -I_m\omega\sin(\omega t - \psi),$$

де I_m визначається за формулою (2.15), а $I_m\omega L$ – амплітуда е.р.с. самоіндукції. Частоту, при якій амплітуда напруги на котушці буде максимальною знайдемо із умови:

$$\frac{d(I_m\omega)}{d\omega} = 0.$$

Із цієї умови отримаємо співвідношення:

$$(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^{1/2} -$$

$$-\frac{\omega}{2}(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)^{-1/2} \cdot 2(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \cdot (L + \frac{1}{\omega^2 C}) = 0.$$

Після алгебраїчних перетворень отримаємо, що

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{C(L - \frac{R^2 C}{2})}}$$

або

$$\omega = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}},$$

де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ = 1000 рад/с, $\beta = R/(2L)$ = 500 с$^{-1}$. Тоді ω = 1414 рад/с. Значить ω/ω_0 = 1,414.

Задача 2.13. Кінці кола, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора, індуктивності і активного опору R = 110 Ом, підключили до змінної напруги, амплітудне значення якої U_m = 110 В. При цьому амплітуда струму, який встановився в колі, I_m = 0,5 А. Знайти різницю фаз між струмом і напругою, що подається в коло.

Розв'язок. За формулою (2.16) різниця фаз між струмом і напругою буде:

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Із формули (2.15) знайдемо, що

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m}\right)^2 - R^2}.$$

Тоді

$$\mathrm{tg}\psi = \sqrt{\left(\frac{U_m}{I_m R}\right)^2 - 1} = \sqrt{3},$$

а

$$\psi = 60^o = \pi/3.$$

Задача 2.14. В коливальному контурі, добротність якого Q = 100, включене послідовно джерело синусоїдальної е.р.с. з постійною амплітудою напруги. При деякій частоті джерела напруги теплова потужність, яка виділяється в контурі, є максимальна. На скільки відсотків необхідно змінити цю частоту, щоб ця потужність зменшилась у n = 2 рази?

Розв’язок. Теплова потужність в коливальному контурі виділяється на активному опорі R і дорівнює $P=I^2R$, де струм I визначається за формулою (2.15). Максимальне значення струму, а значить і максимальна потужність досягається при частоті, яка визначається за формулою (2.17). При цій частоті $I=I_{\max}=U_m/R$. Тому відношення потужностей

$$\frac{P_m}{P}=\frac{I_{\max}^2}{I^2}=\frac{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}{R^2}=n\,. \qquad (1)$$

Згідно умови задачі необхідно знайти відношення $(\omega-\omega_0)/\omega_0$, де ω_0 визначається за формулою (2.17), а ω відповідає частоті, при якій теплова потужність у n раз менша максимальної. В нашому випадку має місце слабе загасання, так як Q = 100>>1. Для цього випадку $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Тому вище приведене співвідношення (1) перепишемо так:

$$n-1=(\omega\frac{L}{R}-\frac{1}{\omega RC})^2;$$

$$n-1=(\omega\cdot\sqrt{LC}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}-\frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\cdot\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}})^2;$$

$$n-1=(Q\frac{\omega}{\omega_0}-Q\frac{\omega_0}{\omega})^2;$$

$$\frac{n-1}{Q^2}=(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2;$$

$$\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega\omega_0}=\frac{\sqrt{n-1}}{Q};\ \frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n-1}}{Q}=0{,}5\%\,.$$

При отриманні цієї відповіді враховано, що $(\omega+\omega_0)/\omega\approx 2$.

Задача 2.15. Ємнісний датчик – один із найбільш чутливих радіотехнічних пристроїв, який застосовується для реєстрації малих механічних зміщень. Він представляє собою електричний коливальний контур з повітряним конденсатором (рис. 2.2), одна із пластин якого рухлива. Оцінити мінімальне переміщення пластини

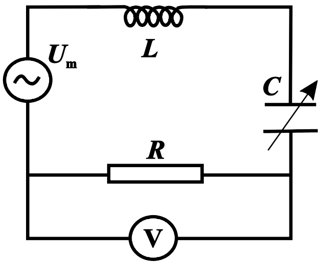

Рис. 2.2

конденсатора Δd, яке можна виміряти, якщо контур настроєний в резонанс; напруга джерела живлення U_m = 100 В, мінімальне значення напруги на опорі R, яке вимірюється вольтметром ΔU = 10 мкВ, добротність контуру Q = 1000, зазор між пластинами конденсатора d = 1 мм.

Розв'язок. Якщо контур настроєний в резонанс, то за формулами (2.15) і (2.17)

$$I_{\max} = U_m / R.$$

Якщо пластина конденсатора змістилась на величину Δd, то ємність конденсатора зміниться і система вийде з резонансу. Тоді сила струму в контурі буде визначатись за формулою (2.15).

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C'})^2}},$$

де $C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d \pm \Delta d}$. Якщо врахувати, що при резонансі $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$, де $C = \frac{\varepsilon_o S}{d}$, то

$$I = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\Delta d}{d})^2}},$$

де $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Для випадку слабого загасання (велика добротність) добротність коливальної системи

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} .$$

Тоді сила струму в контурі

$$I = \frac{U_m}{R\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\Delta d}{d})^2}} .$$

Зміна напруги на опорі R буде:

$$\Delta U = I_{\max} \cdot R - IR = U_m (1 - \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (\frac{\Delta d}{d})^2}}) .$$

Врахувавши формули наближеного обчислення (додатки 2), отримаємо, що $\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{1}{2} Q^2 (\frac{\Delta d}{d})^2$.

Звідки знаходимо:

$$\Delta d = \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta U}{U_m}} = \frac{10^{-3}}{10^3}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^2}} \text{ м} = 4{,}5\ 10^{-10} \text{м} = 4{,}5\ \mathring{A} .$$

2.6. Задачі

Загасаючі механічні коливання

2.16. Період загасаючих коливань T = 4 с; логарифмічний декремент загасання $\lambda = 1{,}6$; початкова фаза $\varphi_0 = 0$. В момент часу $t = T/4$ від початку коливань зміщення точки дорівнює 4,5 см.

Написати рівняння руху цього коливання і знайти зміщення точки від положення рівноваги в момент часу $t = T/8$ від початку коливань.

2.17. Рівняння загасаючих коливань задається у вигляді $x = 5e^{-0,25t}\sin\frac{\pi}{2}t$ м. Знайти швидкість точки, яка коливається, в моменти часу: $0; T; 2T$.

2.18. Період загасаючих коливань $T = 8$ с, логарифмічний декремент загасання $\lambda = 3,2$, початкова фаза $\varphi_0 = -\pi/6$. В момент часу $t = 2$ с після початку коливань зміщення точки від положення рівноваги дорівнювало 9 см. Написати рівняння руху цього коливання.

2.19. Період загасаючих коливань $T = 8$ с, логарифмічний декремент загасання $\lambda = 3,2$, початкова фаза $\varphi_0 = -\pi/6$. В момент часу $t = 2$ с після початку коливань зміщення точки від положення рівноваги дорівнювало 9 см. Знайти зміщення точки від положення рівноваги в момент часу $t_1 = 8/3$ с після початку коливання.

2.20. Логарифмічний декремент загасання математичного маятника $\lambda = 0,2$. У скільки разів зменшиться амплітуда коливань за одне повне коливання маятника?

2.21. Знайти логарифмічний декремент загасання математичного маятника, якщо за час $t = 1$ хв амплітуда коливань зменшується в 2 рази. Довжина маятника $l = 1$ м.

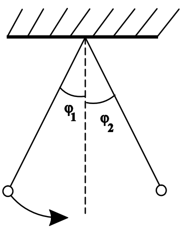

Рис. 2.3

2.22. Два послідовних максимальних відхилення математичного маятника, довжина якого $l = 0,98$ м, від вертикалі (рис. 2.3) дорівнюють $\varphi_1 = 10^\circ$ і $\varphi_2 = 9,5^\circ$ Знайти логарифмічний декремент загасання λ і період коливань цього маятника T.

2.23. Тягар, маса якого $m = 500$ г, підвішений до пружини з жорсткістю $k = 20$ Н/м і здійснює пружні коливання в деякому середовищі. Логарифмічний декремент загасання $\lambda = 0,004$. Скільки коливань повинен здійснити тягар, щоб амплітуда коливань зменшилась в 2 рази? За який час це відбувається ?

2.24. За 10 с амплітуда вільних коливань зменшилась в 10 раз. За який час амплітуда цих коливань зменшиться в 100 раз?

2.25. За 1,00 с амплітуда вільних коливань зменшилась в 2 рази. На протязі якого проміжку часу амплітуда зменшиться в 10 раз?

2.26. За час t = 16,1 с амплітуда коливань зменшилась в η = 5,00 раз. а) Знайти коефіцієнт загасання коливань β; б) За який час τ амплітуда зменшиться в e = 2,72 рази?

2.27. За час на протязі якого система здійснює N = 100 коливань, амплітуда зменшується в η = 5,00 раз. Визначити добротність системи Q.

2.28. Добротність деякої коливальної системи Q = 2,00, частота вільних коливань ω = 100 $с^{-1}$. Визначити власну частоту коливальної системи ω_0.

2.29. Амплітуда загасаючих коливань зменшилась в e^2 раз за 50 коливань. Визначити логарифмічний декремент загасання λ і добротність системи Q?

2.30. Шматок сиру кинули на ваги. Три послідовних крайніх положеннях стрілки ваг були такі A_1= 560 г, A_2= 440 г, A_3= 520 г. Яка дійсна маса шматка сиру? Чому дорівнює логарифмічний декремент загасання коливань стрілки ваг?

2.31. Виразити відносну похибку $\delta T = (T - T_0)/T_0$, яка вноситься в розрахунок при заміні періоду вільних загасаючих коливань T на власний період коливань $T_0 = 2\pi/\omega_0$, якщо λ = 0,628.

2.32. точки в момент t = 0; б) моменти часу коли точка досягає крайніх положень.

2.33. Тіло здійснює коливання за законом $x = a_0 \exp\{-\beta t\} \cos \omega_3 t.$ Знайти: а) швидкість і прискорення тіла в момент t = 0; б) моменти часу, коли швидкість стає максимальною.

2.34. Математичний маятник здійснює коливання в середовищі, для якого логарифмічний декремент загасання λ_0 = 1,50. Яким буде логарифмічний декремент загасання, якщо опір середовища збільшити в $n = 2$ рази? В скільки раз необхідно збільшити опір середовища, щоб коливання стали неможливими?

2.35. До невагомої пружини підвісили тягарець, в результаті чого вона розтягнулась на Δx = 9,8 см**.** Яким буде період коливань тягарця, якщо йому надати невеликий поштовх у вертикальному напрямку? Логарифмічний декремент загасання λ = 3,1.

2.36. Знайти добротність коливальної системи, в якої амплітуда зміщення зменшується в η = 3 рази через кожні n =140 коливань.

2.37. Загасаючі коливання частинки були збуджені шляхом зміщення її із положення рівноваги на відстань A_0 = 1 см. Логарифмічний декремент загасання λ = 0,01. При такому малому загасанні з великою точністю можна вважати , що максимальні відхилення від положення рівноваги досягаються в моменти часу $t_n = (T/2)n, (n = 0,1,2,3,...)$. В цьому наближенні знайти шлях S, який пройде частинка до повної зупинки.

2.38. Система здійснює загасаючі коливання, які описуються рівнянням: $x = A\exp\{-\beta t\} \cdot \sin(\omega_3 t + \alpha)$, де $A, \beta, \omega_3, \alpha$ – константи. Знайти залежність від часу швидкості системи $\dot{x}$ і прискорення $\ddot{x}$. Визначити: а) зсув $\Delta\varphi$ по фазі $\dot{x}$ відносно x; б) моменти t_n проходження положення рівноваги; в) моменти t'_n зупинок; г) інтервали часу Δt_n і $\Delta t'_n$ між двома послідовними проходженнями положення рівноваги і двома послідовними зупинками.

2.39. Амплітуда загасаючих коливань $x = A\exp\{-\beta t\}\cdot \sin(\omega_3 t + \alpha)$ зменшується на протязі одного періоду коливань в 3 рази. а) На скільки відсотків період цих коливань більший, ніж період коливань при відсутності причини, яка викликає загасання? б) При якому фазовому куті зміщення x максимальне? в) При якому фазовому куті швидкість максимальна?

2.40. Деяка точка здійснює загасаючі коливання з частотою $\omega_3 =$ 30 рад/с. Знайти коефіцієнт загасання β, якщо в початковий момент часу швидкість точки дорівнює нулю, а її зміщення із положення рівноваги в цей момент в $\eta = 1{,}05$ рази менше максимально можливого відхилення точки від положення рівноваги.

2.41. Математичний маятник, довжина якого $l = 24{,}7$ см, здійснює загасаючі коливання. Через який час від початку коливань енергія коливань маятника зменшиться в $\eta = 9{,}4$ рази. Задачу розв'язати при значеннях логарифмічного декремента загасання: а) $\lambda_1 = 0{,}01$ і б) $\lambda_2 = 1$.

2.42. Знайти добротність математичного маятника, довжина якого $l = 1$ м, якщо за проміжок часу $\tau = 6{,}5$ хв його повна механічна енергія зменшилась в $\eta = 30\,000$ раз.

2.43. Математичний маятник, довжина якого $l = 24{,}7$ см, здійснює загасаючі коливання. Через який час енергія коливань маятника зменшиться в 9,4 рази? Логарифмічний декремент загасання 0,01.

2.44. За 100 с система встигає здійснити 100 коливань. За цей же час амплітуда коливань зменшується в 2,718 рази. Визначити: а) коефіцієнт загасання коливань β, б) логарифмічний декремент загасання λ, в) добротність Q, г) відносне зменшення енергії системи $-\Delta W / W$ за період коливань.

2.45. За який час енергія коливань камертона з частотою $\nu = 600$ Гц зменшиться в $n = 10^6$ раз, якщо логарифмічний декремент загасання $\lambda = 0{,}0008$?

Електричні коливання

2.46. Період загасаючих коливань T= 1 мс, початкова фаза коливання $\varphi_0 = 0$. В момент часу $t = 2$ мс після початку коливань напруга на конденсаторі в коливальному контурі дорівнювала 90 В. Максимальна напруга на конденсаторі U_m = 100 В, Визначити логарифмічний декремент загасання контуру.

2.47. Період загасаючих коливань T= 10^{-3} с, початкова фаза коливань $\varphi_0 = \pi$. В момент часу t = 0,5 мс від початку коливань напруга на конденсаторі в коливальному контурі дорівнювала 50 В. Визначити струм в контурі в цей момент часу. Максимальна напруга на конденсаторі U_m = 100 В, ємність конденсатора C = 1 мкФ.

2.48. В контурі здійснюються вільні загасаючі коливання, при яких напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом $U = 10e^{-10^3 t}\cos 10^3 t$, В. Знайти моменти часу, коли заряд на конденсаторі досягає максимального (екстремального) значень.

2.49. Коливальний контур має ємність C = 10 мкФ, індуктивність L = 1мГн і активний опір R = 1 Ом. Скільки коливань заряду на конденсаторі відбудеться за час релаксації.

2.50. Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого C = 1 мкФ, котушки, індуктивність якої L = 20 мГн, і опору R = 50 Ом. В початковий момент часу t = 0 конденсатор заряджений і містить заряд q_0 = 60 мкКл. Написати рівняння зміни з часом різниці потенціалів на обкладинках конденсатора.

2.51. Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого C = 1 мкФ, котушки, індуктивність якої L = 20 мГн, і опору R = 50 Ом. В початковий момент часу конденсатор заряджений і містить заряд q_0 = 60 мкКл. Знайти різницю потенціалів на обкладинках конденсатора через час t = T/2 від початку коливань, де $T -$ період коливань.

2.52. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого $C = 7$ мкФ, котушки з індуктивністю $L = 0{,}23$ Гн і опору $R = 49$ Ом. Обкладка конденсатора має заряд $q = 0{,}56$ мКл. Знайти період коливань контуру і логарифмічний декремент загасання коливань. Написати рівняння зміни з часом різниці потенціалів U на обкладинках конденсатора. Знайти різницю потенціалів в момент часу $t = T/2$, який відраховується від початку коливань. T – період коливань.

2.53. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого 0,2 мкФ, і котушки, індуктивність якої 5,07 мГн. При якому логарифмічному декременті загасання коливань різниця потенціалів на обкладках конденсатора за час t = 1 мс зменшиться в три рази. Який буде при цьому опір котушки?

2.54. Коливальний контур складається з конденсатора і котушки, довжина якої $l = 40$ см. Котушка виготовлена з мідного дроту, площа поперечного перерізу якого $S = 0{,}1$ мм^2. Знайти ємність конденсатора, якщо при обчисленні періоду коливань контуру за наближеною формулою $T_1 = 2\pi\sqrt{LC},$ ми робимо помилку $\delta = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2} = 0{,}01 = 1\%.$ T_2 – період коливань, який знаходиться за точною формулою.

2.55. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого 2,22 нФ, та котушки з мідного дроту, діаметр якого d = 0,5 мм. Довжина котушки $l = 20$ см. Знайти логарифмічний декремент загасання коливань.

2.56. Коливальний контур складається з конденсатора, ємність якого 405 нФ, котушки індуктивності 10 мГн та опору 2 Ом. В скільки раз зменшиться різниця потенціалів на обкладках конденсатора за один період коливань?

2.57. Добротність деякого контуру дорівнює 10. Визначити на скільки відсотків відрізняється частота вільних коливань ω_3 контуру від власної частоти контуру ω_0? Знайти $(\omega_0 - \omega_3)/\omega_0$.

2.58. Параметри коливального контуру мають значення: $C = 4{,}00$ мкФ, $L = 0{,}10$ мГн , $R = 1{,}00$ Ом. а) Визначити добротність контуру Q; б) Яку відносну похибку ми робимо, коли вираховуємо добротність за наближеною формулою $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$?

2.59. В контурі здійснюються вільні загасаючі коливання, при цьому напруга на конденсаторі змінюється з часом за законом $U = U_m \exp\{-\beta t\} \cdot \cos\omega_3 t$. Знайти моменти часу, коли модуль напруги на конденсаторі досягає: а) амплітудних значень; б) максимальних (екстремальних) значень.

2.60. Знайти час, за який амплітуда коливань струму в контурі, добротність якого $Q = 5000$, зменшиться в $\eta = 2$ рази, якщо частота коливань $\nu = 2{,}2$ МГц.

2.61. Коливальний контур має ємність $C = 10$ мкФ, індуктивність $L = 25$ мГн і активний опір $R = 1$ Ом. Через скільки коливань амплітуда струму в цьому контурі зменшиться в e раз ?

2.62. Коливальний контур має ємність 1,1 нФ та індуктивність 5 мГн. Логарифмічний декремент загасання 0,005. За який час внаслідок загасання втрачається 99 % енергії контуру ?

2.63. Власна частота коливань деякого контуру дорівнює $\nu_0 = 8{,}0$ кГц, добротність контуру $Q = 72$. В контурі збуджуються загасаючі коливання. а) Знайти закон зменшення енергії контуру W з часом. б) Яка частина початкової енергії W_0 збережеться в контурі на момент часу $t = 1$ мс від початку коливань.

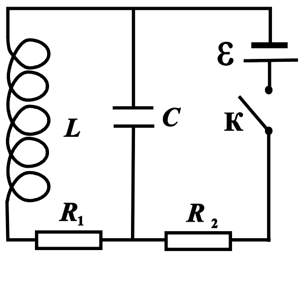

Рис. 2.4

2.64. В схемі, що приведена на рис. 2.4 всі опори, крім $R_1 = 1$ Ом і $R_2 = 50$ Ом, нехтовно малі. Індуктивність котушки L = 0,1 Гн, ємність конденсатора C = 1 мкФ, е.р.с. елемента ε = 3,2 В. Ключ К замикають і після того, як струм в котушці встановиться, розмикають. Знайти: а) Яка початкова енергія коливань, які будуть мати місце в контурі LC після розмикання ключа К ? б) Яка буде енергія цих коливань через час t = 0,2 с після розмикання ключа?

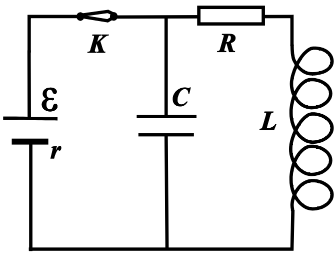

Рис. 2.5

2.65. В схемі на рис. 2.5 е.р.с. елемента ε = 2 В, його внутрішній опір r = 9 Ом, ємність конденсатора C = 10 мкФ, індуктивність котушки L = 100 мГн і опір R = 1 Ом. В деякий момент часу ключ К розімкнули. Знайти енергію коливань в контурі: а) безпосередньо після розмикання ключа; б) через час t = 0,3 с після розмикання ключа.

2.66. В контурі, добротність якого Q = 50 і власна частота коливань ν_0 = 5,5 кГц , збуджуються загасаючі коливання .Через який час енергія, яка була запасена в контурі, зменшується в η = 2 рази?

2.67. Знайти добротність контуру, ємність якого C = 2 мкФ, а індуктивність L = 5 мГн, якщо на підтримання в ньому загасаючих коливань з амплітудою напруги на конденсаторі U_m = 1 В необхідно підводити середню потужність $\overline{P}$ = 0,1 мВт. Загасання коливань в контурі досить мале.

2.68. Яку середню потужність повинен споживати коливальний контур, активний опір якого R = 0,45 Ом, щоб в ньому підтримувались незагасаючі гармонічні коливання з амплітудою струму I_m = 30 мА?

2.69. Коливальний контур складається із конденсатора, ємність якого C = 6,0 мкГн, індуктивності L = 30 мГн і активного опору R = 0,5 Ом. Яку середню потужність необхідно підводити до контуру, щоб підтримувати в ньому незагасаючі гармонічні коливання з амплітудою напруги на конденсаторі U_m = 10 В?

Вимушені механічні коливання

2.70. Рівняння руху системи має вид $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t$. Чому дорівнює період коливань *T,* якщо:а) не має вимушуючої сили і не має сили тертя; б) не має вимушуючої сили; в) система виконує вимушені коливання, які вже встановились?

2.71. Жорсткість пружин ресори вагону k = 4,8·10^5 Н/м. Маса вагону з вантажем m = 6,4 10^4 кг. Вагон має 4 ресори. При якій швидкості υ вагон почне сильно розгойдуватися внаслідок поштовхів на стиках рельсів, якщо довжина рельси l = 12,8 м?

2.72. Амплітуди зміщень вимушених коливань при частотах вимушуючої сили ω_1 = 200 с$^{-1}$ і ω_2 = 300 с$^{-1}$ однакові. Знайти частоту відповідних резонансних зміщень.

2.73. Під дією вимушуючої сили $F_x = F_0 \cos\omega t$ система здійснює вимушені коливання $x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \varphi(\omega))$, які вже установились. Визначити: а) потужність $P_{\text{вим}}$ вимушуючиї сили; б) роботу $A_{\text{вим}}$ вимушуючої сили за період коливань; в) роботу $A_{\text{тертя}}$ сили тертя за період коливань.

2.74. Тіло, маса якого m = 10 *г*, виконує загасаючі коливання з максимальним значенням амплітуди 7 см, початковою фазою, яка дорівнює нулю, і коефіцієнтом загасання 1,6 с$^{-1}$. На це тіло почала діяти зовнішня періодична сила, під дією якої встановились вимушені коливання. Рівняння вимушених коливань має вид: $x = 5\sin(10\pi t - 0{,}75\pi)$, см. Знайти: 1) рівняння (з числовими коефіцієнтами) вільних коливань; 2) рівняння (з числовими коефіцієнтами) зовнішньої періодичної сили.

2.75. При зміні частоти ν вимушуючої сили, яка діє на коливальну систему, змінюється фаза φ вимушених коливань цієї системи і запасена в ній енергія W. Нехай при малому зсуві частоти від резонансної на $\Delta\nu$ = 1 Гц фаза коливань φ змінилась на $\pi/4$. Як зміниться при цьому енергія W? Який час загасання (час релаксації) τ системи в режимі вільних коливань?

2.76. Деяка резонансна крива відповідає механічній коливальній системі з логарифмічним декрементом загасання λ = 1,6. Знайти для цієї кривої відношення максимальної амплітуди зміщення до амплітуди зміщення при дуже малій частоті.

2.77. Під дією зовнішньої вертикальної сили $F = F_0 \cos \omega t$ тіло, підвішене на пружинці, здійснює вимушені коливання за законом $x = a\cos(\omega t - \varphi)$. Знайти роботу сили F за період коливання. Показати, що ця робота йде на подолання сили тертя.

Електричні вимушені коливання

2.78. Якою повинна бути добротність контура Q, щоб частота, при якій наступає резонанс струму, відрізнялась від частоти, при якій наступає резонанс напруги не більше, ніж на 1%?

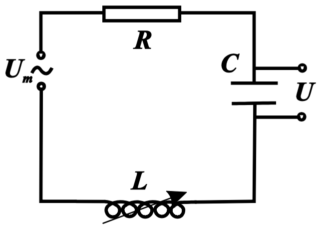

Рис. 2.6

2.79. Визначити добротність контура, в якому послідовно включене джерело змінної е.р.с., якщо при резонансі струму в колі напруга U на конденсаторі в 2,55 рази перевищує амплітуду напруги джерела.

2.80. При дослідженні резонансної кривої коливального контуру (рис. 2.6) з малим загасанням знайдено, що напруга U на конденсаторі максимальна при частоті ν_0 = 1,6 кГц; при частоті $\nu \ll \nu_0$ ця напруга дорівнює U_m = 1 В. Чому дорівнює вихідна напруга при частоті ν = 16 кГц?

2.81. При дослідженні резонансної кривої коливального контуру (див. рис.2.6 попередньої задачі) знайдено, що максимальний струм I_m = 0,1 А отримується при частоті генератора ν_0 = 1,6 кГц, струм при частоті ν_1 = 16 кГц дорівнює $I_1 = 10^{-4}$ А. Вхідна напруга U_m в обох випадках дорівнює 1 В. Знайти за цими даними приблизне значення параметрів контуру R, L, C.

2.82. Коло, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора, ємність якого C = 22 мкФ, котушки з активним опором R = 20 Ом і індуктивністю L = 0,35 Гн, підключили до мережі змінної напруги з амплітудою U_m= 180 В і частотою $\omega = 314$ рад/с. Знайти: а) амплітуду струму в колі; б) різницю фаз між струмом і зовнішньою напругою; в) амплітуди напруг на конденсаторі і котушці.

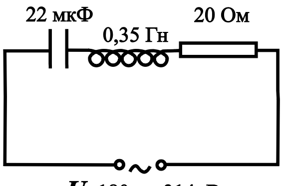

Рис. 2.7

2.83. Знайти різницю фаз між струмом і прикладною напругою в колі, схема якого приведена на рис. 2.7.

2.84. Яку напругу буде показувати вимірювальний приклад в електричному колі, схема якого приведена на рис. 2.8.

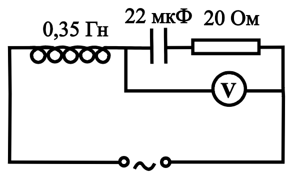

Рис. 2.8

2.85. Коло, яке має послідовно з'єднані конденсатор, котушку індуктивності і активний опір, підключене до джерела гармонічної напруги, частоту якої можна змінювати, не змінюючи амплітуду напруги. При частотах 20 кГц і 45 кГц амплітуди струму в колі в 2 рази менші від амплітуди струму при резонансі струму. Знайти резонансну частоту для струму та добротність контуру.

2.86. Визначити добротність коливального контуру за наступними даними: резонасна частота напруги на конденсаторі ν_p = 50 кГц, індуктивність котушки L= 0,5 мГн, омічний опір кола R = 40 Ом.

2.87. Резонансна частота для струму в коливальному контурі ν_0 =100 Гц, добротність контуру Q = 5, омічний опір контуру R = 10 Ом. Визначити ємність конденсатора контуру.

2.88. На точки А і В кола, яке зображене на рис. 2.9, подаються одночасно дві змінні напруги однакової амплітуди, але різної частоти: частота першої напруги співпадає з власною частотою контура ω_0, частота другої напруги ω більша власної частоти на 10% ($\omega = 1{,}1\,\omega_0$). Знайти відношення амплітуд струмів в контурі, які генеруються обома напругами для випадків, коли: а) добротність контура Q = 100; б) добротність контура Q = 10.

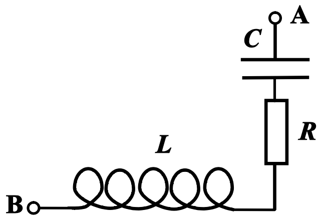

Рис. 2.9

2.89. Змінна напруга, частота якої ω = 314 рад/с і амплітудне значення U_m= 180 В, підключена до клем кола, яке складається із послідовно з'єднаних конденсатора і котушки з активним опором R = 40 Ом і індуктивністю L = 0,36 Гн. При якому значенні ємності конденсатора амплітуда напруги на котушці буде максимальною? Чому дорівнює ця амплітуда і відповідна амплітуда напруги на конденсаторі?

2.90. Знайти добротність коливального контуру, в якому послідовно включене джерело змінної е.р.с., якщо при максимальному струмі в контурі напруга на конденсаторі в n раз перевищує напругу джерела.

2.91. Коло змінного струму, яке складається із послідовно з'єднаних котушки і конденсатора, підключене до джерела змінної е.р.с., причому індуктивність котушки підібрана так, що струм в колі максимальний. Знайти добротність системи, якщо відомо, що при збільшенні індуктивності в n раз струм в колі зменшиться в η раз.

2.92. Коло, яке містить послідовно з'єднані конденсатор і котушку з активним опором, підключене до джерела гармонічної напруги, частоту якого можна змінювати, не змінюючи амплітуду напруги. При частотах ω_1 і ω_2 амплітуди струму в n раз менші резонансної амплітуди. Знайти: а) резонансну частоту; б) добротність кола.

2.93. Показати, що при малому загасанні добротність контуру, в якому здійснюється вимушені коливання, $Q = \omega_0 / \Delta\omega$, де ω_0 – власна частота коливань, $\Delta\omega$ – ширина резонансної кривої $I(\omega)$ на "висоті", в $\sqrt{2}$ рази меншій амплітуди струму при резонансі.

2.94. Визначити добротність Q контура за наступними даними: резонансна частота $\nu_р$ = 600 кГц, ємність C = 350 пФ, омічний опір для частот, близьких до резонансної, R = 15 Ом.

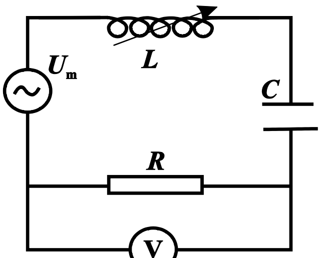

Рис. 2.10

2.95. Індуктивний датчик є радіотехнічний пристрій для реєстрації невеликих змін індуктивності. Такий датчик представляє собою електричний коливальний контур із змінною індуктивністю (рис. 2.10). Оцінити мінімальну відносну зміну індуктивності $\Delta L / L$, яку можна виміряти, якщо контур настроєний в резонанс. Напруга джерела живлення U_m= 100 В, мінімальна зміна напруги на опорі R, яка вимірюється, ΔU = 10 мкВ, добротність контуру Q = 100.

2.96. Оцінити резонансну довжину хвилі тороїдального резонатора, який використовується в клістронах, переріз якого показаний на рис. 2.11. Вважати, що центральна частина резонатора представляє собою конденсатор, через який протікає струм, а тороїдальна порожнина заповнена магнітним полем цього струму. Розміри резонатора a = 10 см, d = 1 см.

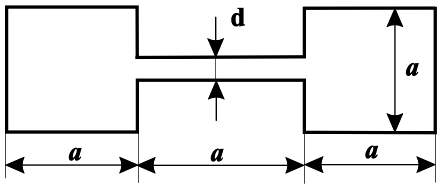

Рис. 2.11

2.97. В схемі на рис. 2.12 вольтметри показують модулі амплітуди напруги, причому U_2 = 3,0 В, U_3 = 7,0 В, U_4 = 3,0 В відповідно для вольтметрів V_2, V_3, V_4. Яку напругу U_1 показує вольтметр V_1?

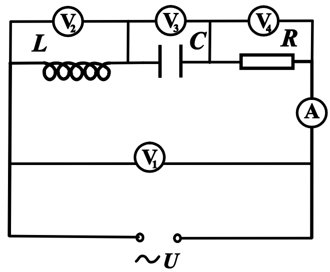

Рис. 2.12

2.98. Для умови задачі 2.97 визначити середню теплову потужність $\overline{P}$, яка виділяється в колі, якщо величина опору R = 1,0 Ом.

2.99. На коливальний контур з власною частотою ω_0 і логарифмічним декрементом загасання $\lambda = 0{,}02$ діє зовнішня періодична сила із сталою амплітудою. Частота коливань ω зовнішньої сили, яка спочатку дорівнює частоті власних коливань, змінюється настільки, що потужність, яка витрачається в контурі, падає вдвічі. Визначити відносну зміну частоти у відсотках по відношенню до власної частоти ω_0.

3. ХВИЛІ

3.1. Питання теми

1. Рівняння, параметри та властивості хвиль.
2. Інтерференція когерентних хвиль.

3.2. Основні визначення та формули

Пружні хвилі

1. Рівняння біжучої плоскої хвилі із швидкістю υ в напрямку осі OX:

$$S(x,t) = A\cos(\omega\,(t - \frac{x}{\upsilon}) + \varphi_0) \tag{3.1}$$

або

$$S(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)\,, \tag{3.2}$$

де $S(x,t)$ – зміщення від положення рівноваги точки, яка знаходиться на відстані x від джерела гармонічних коливань, яке характеризується амплітудою A, циклічною частотою ω і початковою фазою φ_0, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число.

2. Довжина хвилі λ і фазова швидкість розповсюдження хвилі υ зв'язані співвідношенням:

$$\lambda = \upsilon T = \upsilon/\nu, \tag{3.3}$$

де T – період коливань, $\nu = 1/T = \omega / 2\pi$ – лінійна частота коливань.

3. Хвильове рівняння для одномірного випадку:

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \cdot \frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2}, \tag{3.4}$$

де υ – фазова швидкість розповсюдження хвилі, яка описується рівнянням $S(x,t)$.

4. Фазова швидкість поздовжніх $\upsilon_{\parallel}$ і поперечних $\upsilon_{\perp}$ хвиль у пружному середовищі:

$$\upsilon_{\parallel} = \sqrt{E/\rho}, \quad \upsilon_{\perp} = \sqrt{G/\rho}, \tag{3.5}$$

де E – модуль Юнга (модуль пружності), ρ – густина середовища, G – модуль зсуву.

5. Об’ємна густина енергії пружної хвилі і її середнє значення:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2, \tag{3.6}$$

де $\langle w \rangle$ – середнє значення.

6. Густина потоку енергії (вектор Умова) та його середнє значення:

$$\vec{j} = w\vec{\upsilon}; \qquad \langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 \vec{\upsilon}. \tag{3.7}$$

7. Амплітуда звукового тиску Δp_0 (тобто амплітуда коливань тиску повітря в кожній точці, через яку проходить звукова хвиля) і амплітуда швидкості коливань υ_m частинок у звуковій хвилі зв’язані співвідношенням

$$\Delta p_0 = \upsilon_{\parallel} \rho' \upsilon_m, \tag{3.8}$$

де ρ' – густина газу, $\upsilon_{\parallel}$ – швидкість звуку (при нормальних умовах у повітрі $\upsilon_{\parallel}$ = 332 м/с, у воді $\upsilon_{\parallel}$ = 1450 м/с).

Інтенсивність звуку I, тобто енергія, яка переноситься хвилею за одиницю часу через одиничну площадку, що перпендикулярна до напрямку розповсюдження хвилі, виражається через амплітуду звукового тиску:

$$I=\frac{\Delta p_0^2}{2\upsilon_{\parallel}\,\rho'}=\frac{1}{2}\rho'\upsilon_{\parallel}\,\upsilon_m^2. \qquad (3.9)$$

8. Рівень інтенсивності звуку (в децибелах) визначається за формулою

$$L=10\lg(I/I_0)\,, \qquad (3.10)$$

де I – інтенсивність даного звуку, I_0 = 10^{-12} Вт/м^2 – інтенсивність даного звуку на порозі чутності при стандартній частоті ν = 1000 Гц.

Децибел (дБ) – рівень звукового тиску p, для якого виконується співвідношення $20\lg\left(p/p_{\text{П}}\right)=1$, де $p_{\text{П}}$ – пороговий звуковий тиск, який дорівнює $2\cdot10^{-5}$ Па. Одному децибелу відповідає рівень звукового тиску $p=2{,}244\cdot10^{-5}$ Па. За формулою (3.10) один децибел відповідає зміні інтенсивності звуку в $10^{0,1}$ рази = 1,26 рази.

9. Рівень гучності звуку L_N (у фонах) залежить від інтенсивності звуку, його частоти і розраховується за формулою

$$L_N=10\lg(I_N/I_0)\,, \qquad (3.11)$$

де I_N – інтенсивність звуку з частотою ν = 1000 Гц, який має однакову гучність із звуком, який досліджується.

Залежність L_N від інтенсивності звуку і його частоти складна і простим аналітичним співвідношенням не виражається. Визначається L_N за кривими рівня гучності (рис. 3.1). Фон – одиниця рівня гучності даного звуку.

Рівень гучності даного звуку у фонах дорівнює рівню звукового тиску в децибелах для чистого тону з частотою 1000 Гц, гучність якого при порівняні на слух дорівнює гучності даного звуку. Для звуку еталонної частоти (ν = 1000 Гц) рівень гучності звуку, який виражений у фонах, чисельно дорівнює рівню інтенсивності, що виражається у децибелах, $L=L_N$ (числова рівність справедлива тільки для частоти ν = 1000 Гц).

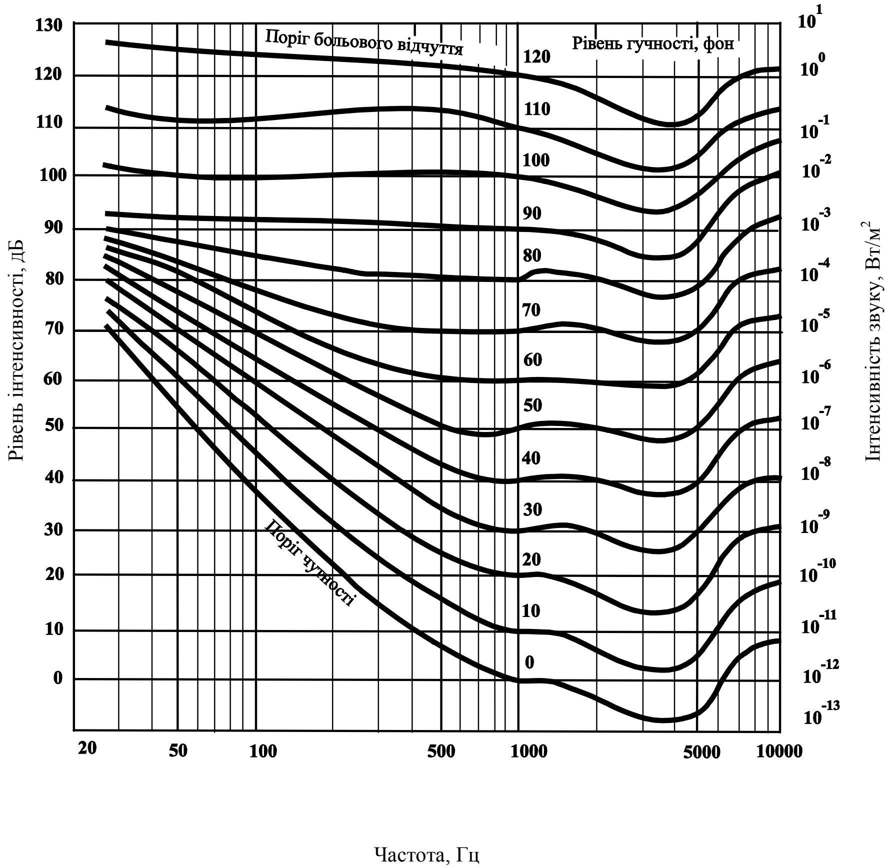

Рис. 3.1. Криві однакової гучності,
які виражають залежність рівня звукового тиску (в децибелах) від частоти при заданій гучності (у фонах). Нижня крива - поріг чутності, верхня крива – поріг больового відчуття.

10. Зв'язок між різницею фаз двох точок біжучої хвилі і різницею ходу $\Delta x = x_2 - x_1$ (тобто різницею відстаней цих точок від джерела коливань):

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k \cdot \Delta = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda . \qquad (3.12)$$

11. В результаті інтерференції хвиль амплітуда досягає максимального значення при умові:

$$\left(x_2 - x_1\right) = \Delta = 2m\lambda/2 \qquad (m = 0,1,2,3,\ldots) \qquad (3.13)$$

і мінімального значення при умові

$$\Delta = (2m+1)\lambda/2 \qquad (m = 0,1,2,3,\ldots). \qquad (3.14)$$

12. Рівняння стоячої хвилі:

$$S(x,t) = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t . \qquad (3.15)$$

Рівняння стоячої хвилі записане для випадку коли у рівнянні хвилі (3.2) $\varphi_0 = 0$, для $t = 0$ і $x = 0$. Відстань між сусідніми пучностями і вузлами у стоячій хвилі дорівнює $\lambda/4$.

Електромагнітні хвилі

13. Фазова швидкість електромагнітних хвиль:

$$\upsilon = c/\sqrt{\varepsilon\mu} , \qquad (3.16)$$

де $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, ε – відносна діелектрична, а μ – відносна магнітна проникності середовища.

14. В біжучій електромагнітній хвилі:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0} . \qquad (3.17)$$

15. Для плоскої електромагнітної хвилі, яка розповсюджується в напрямку осі OX мають місце співвідношення:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \qquad (3.18)$$

16. Об'ємна густина енергії електромагнітного поля:

$$\omega = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2}. \qquad (3.19)$$

17. Густина потоку електромагнітної енергії – вектор Пойнтинга:

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}. \qquad (3.20)$$

18. Густина потоку енергії випромінювання диполя у хвильовій зоні:

$$\Pi \sim \frac{1}{r^2} sin^2\, \Theta \qquad (3.21)$$

де r – відстань від диполя, Θ – кут між радіус–вектором $\vec{r}$ і віссю диполя.

19. Потужність випромінювання диполя з електричним моментом $\vec{p}(t)$ і заряду q, який рухається з прискоренням $\vec{a}$:

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2(\ddot{\vec{p}})^2}{3c^3}, \ P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q^2\vec{a}^2}{3c^3}. \qquad (3.22)$$

3.3. Питання на самопідготовку

1. Дати визначення рівняння хвилі.
2. Записати рівняння біжучої плоскої та сферичної хвиль. В чому різниця між цими рівняннями?
3. Хвильове рівняння для одномірного випадку.
4. Характеристики хвилі: амплітуда, фаза, частота, довжина хвилі (хвильове число), фазова швидкість хвиль у пружному середовищі.

5. Густина потоку енергії хвиль – вектор Умова.

6. Звукові хвилі. Характеристики звукових хвиль: амплітуда звукового тиску, інтенсивність звуку, гучність звуку.

7. Когерентні хвилі, інтерференція хвиль. Умови максимуму та мінімуму інтерференції.

8. Стоячі хвилі. Рівняння стоячої хвилі. Вузли та пучності стоячої хвилі та відстань між ними.

9. Рівнянні плоскої біжучої електромагнітної хвилі (ЕМХ). Фазова швидкість ЕМХ у вакуумі та середовищі. Співвідношення між напруженістю електричного та напруженістю магнітного поля в ЕМХ.

10. Густина потоку електромагнітної енергії – вектор Пойтинга.

11. Пояснити, чому стоячі хвилі не переносять енергію.

12. Нарисувати і пояснити полярну діаграму випромінювання електричного диполя у хвильовій зоні.

13. Яка необхідна умова, щоб електричний диполь і електричний заряд випромінювали електромагнітні хвилі?

3.4. Методичні вказівки

1. Рівняння біжучої хвилі (3.1) і (3.2) виражають зміщення від положення рівноваги любої частинки, як функцію відстані до джерела коливань і часу. При цьому вважається, що амплітуда зміщення всіх частинок на шляху хвилі однакова. Це може бути лише у випадку плоских хвиль, які розповсюджуються в одному напрямку при відсутності поглинання енергії хвиль середовищем.

В учбовій літературі часто приводять рівняння біжучої хвилі, приймаючи $\varphi_0 = 0$. Таке рівняння вже не є загальним, а відповідає певним початковим умовам: при $t = 0$ і $x = 0$ $S(0{,}0) = A$. Якщо в задачі не міститься початкових умов, то знайти однозначно зміщення S згідно рівняння біжучої хвилі не можна.

2. Одним із способів знаходження фазової швидкості розповсюдження хвилі є складання хвильового рівняння (3.4). Коефіцієнт при другій похідній по часу від $S(x,t)$ є величина обернена до квадрату фазової швидкості хвилі.

3. Необхідно розрізняти дві фізичні величини, які виражаються формулами (3.10) і (3.11), – рівень інтенсивності звуку і рівень його гучності. Рівень інтенсивності звуку є його об'єктивною

характеристикою, яка не залежить від звукового відчуття. Рівень гучності звуку, як суб'єктивна характеристика його, залежить не тільки від інтенсивності звуку I, але і від частоти ν, так як вухо людини має різну чутливість до звуків різних частот. Порівнюючи формули (3.10) і (3.11), бачимо, що для звуку з частотою $\nu = 1000$ Гц рівень гучності L_N в фонах дорівнює рівню інтенсивності L в децибелах (рис.3.1).

Однак при інших частотах $L_N \neq L$. Різниця між цими величинами особливо велика при дуже низьких звукових частотах.

4. Щоб розрахувати рівень гучності звуку використовують криві гучності однакового рівня, які показують залежність інтенсивності звуку від частоти при постійних рівнях гучності. Такі графіки у вигляді сімейства кривих приведені на рис. 3.1.

5. Якщо в задачі необхідно визначити рівень гучності звуку і не вказана частота звукових коливань, то мається на увазі, що мова йде про звук, частота якого близька до стандартної частоти ν = 1000 Гц.

3.5. Приклади розв'язування задач

Задача 3.1. Поперечна хвиля розповсюджується вздовж пружного шнура зі швидкістю υ = 15 м/с. Період коливань точок шнура T = 1,2 с, амплітуда коливань A = 2 см. Визначити: 1) довжину хвилі λ; 2) фазу φ коливань, зміщення S, швидкість $\dot{S}$, прискорення $\ddot{S}$ точки, яка розташована на відстані x = 45 м від джерела хвиль в момент часу t = 4 с; 3) різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань двох точок, які лежать на промені, на відстані x_1 = 20 м та x_2 = 30 м від джерела. Вважати, що $\varphi_0 = 0$.

Розв'язок.

1) Згідно (3.3) $\lambda = \upsilon T$ = 18 м.

2) Згідно (3.1) фаза коливань точки з координатою x = 45 м в момент часу t = 4 с дорівнює

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = 5{,}24 \text{ рад} = 300°,$$

а зміщення

$$S = A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = 2\cos 300° \text{ см} = 1 \text{ см}.$$

Знайдемо першу та другу похідні по часу від рівняння хвилі (3.1):

$$\dot{S} = -A\omega\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = -\frac{2\pi A}{T}\sin\varphi = 9 \text{ см/с},$$

$$\ddot{S} = -A\omega^2\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2}\cos\varphi = -27{,}4 \text{ см/с}^2.$$

3) Згідно (3.12) $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right) = 3{,}49$ рад або $\Delta\varphi = 200°$.

Задача 3.2. Рівняння біжучої плоскої хвилі має вид $S(x,t) = 60\cos(1800t - 5{,}3x)$, де $S(x,t)$ визначається в мікрометрах, t – в секундах, x – в метрах. Знайти : а) відношення амплітуди зміщення частинок середовища до довжини хвилі; б) амплітуду коливань швидкості частинок середовища і її відношення до швидкості розповсюдження хвилі; в) амплітуду коливань відносної деформації середовища і її зв'язок з амплітудою коливань швидкості частинок середовища.

Розв'язок. Порівнявши даний вид хвилі із (3.2), знаходимо, що $A = 60$ мкм $= 6 \cdot 10^{-5}$ м, $\omega = 1800$ рад/с, $k = 5{,}3$ м$^{-1}$, $\varphi_0 = 0$.

а) так як $k = 2\pi / \lambda$, то $A/\lambda = \frac{Ak}{2\pi} = 5{,}06 \cdot 10^{-5}$, тобто довжина хвилі значно більша амплітуди коливань частинок середовища.

б) швидкість руху частинок середовища біля положення рівноваги є

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = -A\,\omega\sin(\,\omega\,t - kx\,),$$

де $\upsilon_m = A\omega = 6\cdot10^{-5}\cdot1800 = 0{,}108$ м/с – максимальна швидкість.

Фазова швидкість розповсюдження хвилі згідно (3.3) дорівнює:

$$\upsilon_ф = \lambda\nu = \frac{2\pi}{k}\cdot\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = \frac{1800}{5{,}3} = 340 \text{ м/с.}$$

Це фазова швидкість розповсюдження звуку в повітрі. Тоді відношення

$$\frac{\upsilon_m}{\upsilon_ф} = \frac{0{,}108}{340} = 3{,}18\cdot10^{-4},$$

тобто швидкість коливань частинок середовища біля положення рівноваги значно менша швидкості розповсюдження цих коливань.

Зауваження. Фазову швидкість розповсюдження хвилі можна було би знайти за допомогою хвильового рівняння (3.4). Для цього необхідно наш вид рівняння хвилі, який задається в задачі, підставити в (3.4) і знайти коефіцієнт біля $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$. Корінь квадратний із оберненої величини до цього коефіцієнта і є фазова швидкість розповсюдження хвилі.

в) Відносна деформація середовища внаслідок розповсюдьжен ня хвилі визначається як

$$\varepsilon = \frac{dS}{dx} = Ak\sin(\omega t - kx),$$

де $\varepsilon_m = Ak = 60\cdot10^{-6}\cdot5{,}3 = 3{,}18\cdot10^{-4}$ – амплітуда відносної деформації

середовища. Так як $\upsilon_m = A\omega$, а $k = \frac{\omega}{\upsilon_ф}$, то $\varepsilon_m = \frac{\upsilon_m}{\omega}\cdot\frac{\omega}{\upsilon_ф} = \frac{\upsilon_m}{\upsilon_ф} =$ $=3{,}18\cdot10^{-4}$.

Задача 3.3. Джерело звуку невеликих розмірів має потужність $N = 1{,}00$ Вт при частоті $\nu = 400$ Гц. Вважати, що звук розповсюджується від джерела однаково у всіх напрямках в повітрі при нормальних умовах і при цьому поглинання звуку незначне. Визначити амплітуду звукового тиску, амплітуду швидкості і амплітуду зміщення частинок повітря на відстані $r = 100$ м від джерела звуку.

Розв'язок. Амплітуда звукового тиску Δp_0 связана співвідношенням (3.9) з інтенсивністю звуку I, яка в свою чергу зв'язана з потужністю N джерела:

$$I = N / 4\pi r^2 , \qquad (1)$$

де r – відстань від джерела до точки, в якій визначається величина I. Формула (1) витікає із визначення інтенсивності звуку (пункт 7, стор. 67) При цьому важливо, що, згідно умови задачі, від джерела звуку розповсюджуються сферичні хвилі. Тому знаменник формули (1) є площа поверхні сфери, через яку проходить вся звукова енергія, що випромінюється джерелом. Підставимо (1) у формулу (3.9) і отримаємо, що

$$\Delta p_0 = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{N\upsilon_{\parallel}\,\rho'}{2\pi}} . \qquad (2)$$

Так як повітря знаходиться при нормальних умовах, то $\upsilon_{\parallel}$ = 332 м/с, (див. п. 7, стор 67), а згідно табл. 6 додатків ρ' = 1,293 кг/м^3.Тоді

$$\Delta p_0 = 10^{-2}(1 \cdot 332 \cdot 1{,}293/2\pi)^{1/2}\ \text{Па} = 0{,}083\ \text{Па}.$$

Тепер знову використаємо співвідношення (3.9) і отримаємо, що амплітуда швидкості коливань частинок у звуковій хвилі буде:

$$\upsilon_m = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{N}{2\pi\upsilon_{\parallel}\,\rho'}} = 10^{-2}(1/(2\pi \cdot 332 \cdot 1{,}293))^{1/2}\ \text{м/с} =$$

$$= 1{,}93 \cdot 10^{-4}\ \text{м/с} = 0{,}193\ \text{мм/с}.$$

Для гармонічних коливань зв'язок між амплітудою зміщення і амплітудою швидкості наступна:

$$\upsilon_m = A\omega = 2\pi\nu A\ .$$

Звідки знаходимо, що

$$A = \upsilon_m /(2\pi\nu) = 0{,}193/(2\,\pi \cdot 400)\ \text{мм} = 7{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{мм}.$$

Задача 3.4. Рівні гучності двох тонів з частотами 50 і 3000 Гц однакові і дорівнюють 30 фон. Визначити рівні інтенсивності і інтенсивність цих тонів.

Розв'язок. Рівень гучності звуку залежить від рівня його інтенсивності (методичні вказівки). Ця залежність різна для різних частот. Виразити її простою формулою, яка б була справедлива для всіх частот, не можливо. Тому залежність між рівнем гучності і рівнем інтенсивності зображено графічно (рис. 3.1). На графіку по горизонтальній осі відкладені логарифми частот (самі частоти вказані під відповідними їм логарифмами). По вертикальній осі відкладені рівні інтенсивності в децибелах. Рівні гучності в фонах відкладені по вертикальній осі для частоти 1000 Гц. Для цієї частоти рівень гучності, який виражений у фонах, дорівнює рівню інтенсивності в децибелах. Рівень гучності звуків інших частот визначається за допомогою кривих гучності, що приведені на графіку. Кожна крива відповідає певному рівню гучності.

Знаходимо криву, яка відповідає рівню гучності 30 фон (четверта крива знизу). Користуючись цією кривою, визначаємо рівні інтенсивності, що відповідають частотам 50 і 3000 Гц. Для цього із точок на горизонтальній осі, які відповідають цим частотам, проводимо вертикальні лінії до перетину із кривою (30 фон). Ординати точок перетину і дадуть рівні інтенсивності в децибелах.

Для частоти 50 Гц рівень інтенсивності – L_1 = 70 дБ.

Для частоти 3000 Гц – L_2 = 26 дБ.

Знаючи рівень інтенсивності, за формулою (3.10) визначаємо інтенсивність даного звуку, а саме

$$\lg I = 0{,}1L + \lg I_0 = 0{,}1L - 12\,.$$

Для першого тону

$$\lg I_1 = 7{,}0 - 12 = -5$$

і

$$I_1 = 10^{-5}\ \text{Вт/м}^2.$$

Для другого тону

$$\lg I_2 = 2{,}6 - 12 = -9{,}4$$

і

$$I_2 = 4 \cdot 10^{-10}\ \text{Вт/м}^2.$$

Зауважимо, що значення I_1 і I_2 можна отримати із рис. 3.1 по правій шкалі «інтенсивність звуку». Співставимо результати: інтенсивність першого тона в 25000 раз більша інтенсивності другого тона, рівень інтенсивності першого тона на 43 дБ більший рівня інтенсивності другого тону, рівень гучності обох тонів однаковий і дорівнює 30 фон.

Задача 3.5. На відстані $r_1 = 10$ м від джерела сферичних звукових хвиль, частота яких $\nu = 1000$ Гц, рівень гучності $L_{N1} = 40$ фон. Знайти найбільшу відстань r_2, на якій звук ще чутний.

Розв'язок. Перш за все зауважимо, що в задачі задається звук стандартної частоти $\nu = 1000$ Гц. Тому формулу (3.11) для рівня гучності звуку можна записати так:

$$L_N = 10\lg(I / I_0)\,,$$

де I – інтенсивність даного звуку. Таким чином, в даній задачі рівень гучності звуку L_N співпадає з рівнем його інтенсивності L, що визначається формулою (3.10).

Двом відстаням r_1 і r_2 відповідають деякі інтенсивності звуку I, а, значить, і певні рівні гучності L_N, тому можемо записати:

$$L_{N_1} = 10\lg(I_1 / I_0)\,, \qquad (2)$$

$$L_{N_2} = 10\lg(I_2 / I_0)\,. \qquad (3)$$

Так як звук розповсюджується однаково у всіх напрямках, то згідно формули (1) задачі 3.3 $I \sim 1/r^2$. Тому

$$I_2 / I_1 = (r_1 / r_2)^2. \qquad (4)$$

Із співвідношень (2) і (3) знайдемо, що

$$I_1 / I_0 = 10^{0,1L_{N1}}\text{, а } I_2 / I_0 = 10^{0,1L_{N2}}\,.$$

Звідки отримаємо, що

$$I_2 / I_1 = 10^{0,1(L_{N2} - L_{N1})} = (r_1 / r_2)^2\,. \qquad (5)$$

Так як відстань r_2 за умовою задачі відповідає порогу чутності, то у формулі (3) треба вважати, що $I_2 = I_0$ і L_{N_2} = 0. Тоді із (5) знайдемо, що

$$r_2 = r_1 \cdot 10^{0,05L_{N1}} = 10 \cdot 10^2 \text{ м} = 1 \text{ км}.$$

Задача 3.6. На відстані r_1 = 10 м від джерела сферичних звукових хвиль, частота яких 100 Гц, рівень гучності L_{N_1} = 40 фон. Знайти найбільшу відстань r_2, для якої цей звук ще чутний.

Розв'язок. Так як частота ν = 100 Гц суттєво відрізняється від частоти ν = 1000 Гц, то для рівня гучності використаємо формулу (3.11)

$$L_N = 10\lg(I_N / I_0)\,.$$

Тоді по графіку рівня гучності для частоти $\nu = 100$ Гц і рівня гучності $L_{N_1} = 40$ фон знаходимо, що інтенсивність звуку $I_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Вт/м^2 (див. рис. 3.1). Потім за графіком порогу чутності ($L_{N_2} = 0$) для частоти $\nu = 100$ Гц знаходимо інтенсивність звуку $I_2 = 7 \cdot 10^{-9}$ Вт/м^2. Тоді за формулою (4) задачі 3.5 знаходимо, що

$$r_2 = r_1\sqrt{I_1 / I_2} = 10\sqrt{5 \cdot 10^{-6} / 7 \cdot 10^{-9}} \text{ м} = 267 \text{ м} = 0{,}267 \text{ км}.$$

Задача 3.7. Визначити енергію, яку переносить за час $t = 1{,}00$ хв плоска синусоїдальна електромагнітна хвиля, що розповсюджується у вакуумі через площадку $S = 10{,}0$ см^2, яка перпендикулярна напрямку розповсюдження хвилі. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 1{,}00$ мВ/м. Період хвилі $T << t$.

Розв'язок. Енергія, яку переносить електромагнітна хвиля за одиницю часу через одиничну поверхню, яка перпендикулярна напрямку розповсюдження хвилі, визначається вектором Пойтинга (3.20). У плоскій електромагнітній хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні і оскільки хвиля синусоїдальна, то можна записати, що

$$E = E_0 \sin(\omega t - kx),$$

$$H = H_0 \sin(\omega t - kx).$$

Тому

$$П = E_0 H_0 \sin^2(\omega t - kx).$$

Так як $T << t$, то середнє значення потоку енергії

$$< П >= E_0 H_0 < \sin^2(\omega t - kx) >= \frac{1}{2} E_0 H_0,$$

де значок < > означає середнє значення.