

Розв'язок. Явище надпровідності має місце при низьких температурах ($T \approx 10$ К) тому для розрахунків можемо використовувати формули, які отримані при $T = 0$. Тоді функція розподілу густини електронів

$$N(W) = g(W)f(W) = g(W),$$

оскільки $f(W)=1$ для $W \leq W_F(0)$. Вид функції $N(W)$ для цього випадку показаний на рис. 9.2.

Величина $k\Theta_D$ при $T = 100$ К дорівнює $1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 100$ Дж $= 8,6 \cdot 10^{-3}$ еВ. Величина енергії Фермі для металів складає декілька електронвольт, що набагато більше $k\Theta_D$, тому заштрихована смуга на рис.9.2 досить вузька. Площа цієї смуги чисельно дорівнює числу електронів в одиниці об'єму кристалу, яке необхідно знайти. Тому

$$\Delta n = N(W_F) \cdot k\Theta_D,$$

де $N(W_F)$ - значення функції розподілу густини електронів для енергії Фермі. Так як $N(W)=g(W)$, то згідно (9.5)

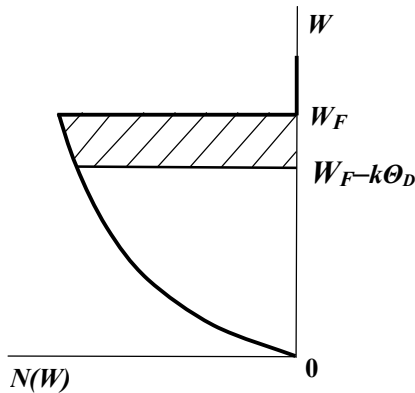


Рис. 9.2. Функція розподілу густини електронів при $T = 0$.

$$\Delta n = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} \cdot W_F^{1/2} \cdot k\Theta_D.$$

Загальна концентрація електронів провідності металу визначається за формулою (9.9). Тому

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3k\Theta_D}{2W_F}.$$

Приймаючи значення енергії Фермі приблизно 5eV, отримаємо, що

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{3 \cdot 8,6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5} = 2,6 \cdot 10^{-3} = 0,3\%.$$

Висновки. Кількість електронів провідності металу, які “відповідальні” за явище надпровідності, складає десятки долі відсотка від загального числа електронів в зоні провідності. Але саме ці електрони визначають провідність металу в стані надпровідності.

Задача 9.5. Визначити число електронів, яке приходиться на один атом натрію при $T = 0$. Рівень Фермі для натрію має енергію $W_F = 3,12$ eV.

Розв’язок. Розрахунок будемо виконувати для одиниці об’єму речовини. Тоді, згідно закону Авогадро, в одному молі речовини (для нашого випадку 1 моль натрію – це $M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг) міститься $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ атомів, а один кубічний метр натрію містить

$$n_0 = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{0,97 \cdot 10^3 \cdot 6,025 \cdot 10^{23}}{23 \cdot 10^{-3}} \text{ атомів/м}^3 = 2,54 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3},$$

де ρ – густина натрію.

Концентрацію електронів провідності розрахуємо за формулою (9.11):

$$n = \left(\frac{W_F}{0,365} \right)^{3/2} \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3} = \left(\frac{3,12}{0,365} \right)^{3/2} \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3} = 2,50 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тоді число “вільних” електронів, що приходиться на один атом натрію, буде дорівнювати:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{2,50 \cdot 10^{28}}{2,54 \cdot 10^{28}} = 0,98.$$

Висновки. Електронна структура атому натрію має вид: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Розрахунки, які приведені вище, показують, що майже всі валентні $3s$ електрони натрію при утворенні кристалу із окремих атомів колективізуються і стають електронами провідності.

Задача 9.6. Виразити середню швидкість \bar{v} в металі при $T = 0$ через максимальну швидкість v_m . Вирахувати середню швидкість для металу, рівень Фермі для якого при $T = 0$ має енергію 6 еВ.

Розв’язок. Згідно визначення середню швидкість будемо розраховувати за такою формулою:

$$\bar{v} = \int_0^v v \cdot f(v) dv / \int_0^v f(v) dv,$$

де $f(v)$ - функція розподілу густини електронів за швидкостями, яка представляє собою аналог функції $N(W)$. Вираз $\int_0^v v \cdot f(v) dv$ є сумарною швидкістю всіх електронів, а вираз $\int_0^v f(v) dv$ є повне число всіх електронів провідності для одиниці об’єму металу. Максимальну швидкість, яку можуть мати електрони при $T = 0$ в металі знайдемо з умови, що

$$\frac{m_n^* v_m^2}{2} = W_F(0).$$

Звідки

$$v_m = \sqrt{\frac{2W_F(0)}{m_n^*}}$$

Знайдемо вираз для функції $f(v)$, якщо відома функція $N(W)$. Для цього знайдемо кількість електронів, що мають енергію в інтервалі енергій від W до $W+dW$. Згідно визначення функції $N(W)$ (9.2) можемо записати, що

$$dn = N(W)dW = g(W)f(W)dW = g(W)dW.$$

При цьому враховано, що $f(W)=1$, для $W \leq W_F$ при $T=0$. Оскільки $W = \frac{m_n^* v^2}{2}$, $dW = m_n^* v dv$ і $g(W) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n^*)^{3/2} \cdot W^{1/2}$, то отримаємо, що

$$dn = \frac{4\pi}{h^3} 2(m_n^*)^3 v^2 dv = f(v)dv.$$

Значить, функція розподілу електронів за швидкостями при $T=0$ визначається виразом:

$$f(v) = Av^2,$$

де $A = 8\pi(m_n^*)^3 / h^3$. Тоді

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{v_m} v^3 dv}{\int_0^{v_m} v^2 dv} = \frac{3v_m}{4} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2W_F(0)}{m_n^*}}.$$

Після підстановки числових значень, прийнявши $m_n^* = m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, отримаємо, що

$$\bar{v} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \text{ м/с} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Висновки. Поняття середньої швидкості широко використовується в явищах переносу заряду, маси. Числове значення \bar{v} досить велике, не дивлячись на те, що $T = 0$. В цьому суть прояву принципу Паулі при розподілі електронів за рівнями енергії. Енергетично такий розподіл “невигідний”, проте принцип Паулі вимагає саме такого розподілу.

9.6. Задачі.

9.7. Кристалічна гратка заліза при кімнатній температурі – кубічна, об’ємноцентрована. Це означає, що елементарною коміркою є куб, у всіх вершинах якого, а також в центрі на перетині просторових діагоналей знаходяться атоми заліза. Скільки атомів заліза приходить на об’єм елементарної комірки? Визначити мінімальну відстань між атомами заліза в кристалі, якщо молярна маса заліза - $56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а густина – 7870 кг/м³.

9.8. Що відбувається з енергетичним спектром електронів при збільшенні числа атомів, які утворюють кристал, в n – раз?

9.9. Що буде з відстанню ΔW між сусідніми енергетичними рівнями вільних електронів в металі при збільшенні об’єму металу в n –раз?

9.10. Кристалічний зразок містить 0,1 моля деякої речовини. Ширина дозволеної зони енергій дорівнює 5 еВ. Чому дорівнює середня відстань ΔW між сусідніми енергетичними рівнями в зоні?

9.11. а) Вирахувати густину енергетичних рівнів біля рівня Фермі при $T = 0$ для 1 м³ натрію. б) Вирахувати цю ж величину для одного моля натрію. в) Пояснити, чому ці величини відрізняються одна від одної.

9.12. Знайти інтервал в електронвольтах між сусідніми рівнями вільних електронів в металі при $T = 0$ К біля рівня Фермі, якщо об’єм металу $V = 1$ см³, а концентрація вільних електронів $n = 2 \cdot 10^{22}$ см⁻³.

9.13. Знайти інтервал в електронвольтах між сусідніми енергетичними рівнями вільних електронів в алюмінії при $T = 0$ К

біля рівня Фермі, якщо об'єм кристалу $V = 1 \text{ см}^3$. Вважати, що на кожний атом алюмінію приходить один вільний електрон.

9.14. Яка в середньому кількість “вільних” електронів в металі займає енергетичний рівень, енергія якого дорівнює енергії Фермі?

9.15. Чому дорівнює ймовірність того, що в стані з енергією, яка дорівнює енергії Фермі, буде знаходитись вільний електрон?

9.16. Нарисуйте криві розподілу Фермі-Дірака для “вільних” електронів в металі при температурах 0 і 1000 К.

9.17. Визначити ймовірність того, що електрон в металі займатиме енергетичний рівень, який лежить вище рівня Фермі на $\Delta W = 4,5 \text{ eV}$ при $T_1 = 300 \text{ K}$ і $T_2 = 2000 \text{ K}$.

9.18. Вирахувати ймовірність знаходження електронів на рівнях з енергіями $W_F + 0,1 \text{ eV}$ і $W_F - 0,1 \text{ eV}$ при температурах 0, 150, 300 і 1000 К. Результати розрахунків представте у вигляді таблиці.

9.19. Показати, що якщо всі рівні енергії в зоні зайняті електронами, то в кристалі на кожний атом приходить як мінімум по два валентних електрони.

9.20. Замість розподілу Фермі-Дірака, що визначається формулою (9.6) використовують розподіл Максвелла-Больцмана (формула (9.7)). Рівень енергії W знаходиться біля рівня Фермі W_F . Яка відносна похибка такої заміни при $W - W_F = kT$ і при $W - W_F = 4kT$?

9.21. Покажіть, що ймовірність того, що рівень з енергією W , яка більша енергії рівня Фермі W_F на величину ΔW , зайнятий електроном, в точності співпадає з ймовірністю того, що рівень, енергія якого менша значення W_F на ту ж величину ΔW , є незайнятий електроном.

9.22. Визначити температуру, при якій в провіднику ймовірність знайти електрон з енергією 0,2 eV над рівнем Фермі дорівнює 2%.

9.23. Знайти різницю енергій (в одиницях kT) електронів, що знаходяться на рівні Фермі, і електронів, що знаходяться на рівнях, ймовірності заповнення яких дорівнюють 20% і 80%.

9.24. Знайти ймовірність заповнення електронами в металі енергетичного рівня, який розташований на 0,01 eV нижче рівня Фермі при температурі $+10^\circ\text{C}$.

9.25. Як і в скільки раз зміниться ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня в металі, якщо він розташований на 0,01 eV нижче рівня Фермі і якщо температура змінюється від 200 до 300 K?

9.26. Як і в скільки раз зміниться ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня в металі, якщо він розташований на 0,1 eV вище рівня Фермі і якщо температура змінюється від 1000 до 300 K?

9.27. Показати, що доля електронів біля рівня Фермі при низьких температурах в інтервалі енергій kT дорівнює $3kT/(2W_F)$.

9.28. Яка частина вільних “електронів” в металі при $T = 0$ має кінетичну енергію, яка перевищує середню енергію?

9.29. Визначити енергію рівня в зоні провідності металу, який ділить число електронів провідності навпіл. Температура $T = 0$.

9.30. Яка частина вільних “електронів” в металі при $T = 0$ має кінетичну енергію, яка більша половини максимальної?

9.31. Визначити відношення концентрації електронів в металі (при $T = 0$), енергія яких знаходиться в межах від $0,99 W_F$ до W_F , до концентрації електронів, енергія яких знаходиться в межах від 0 до $0,01 W_F$.

9.32. Визначити відношення концентрації електронів в металі при $T = 0$, енергія яких більша середнього значення енергії \overline{W}_0 , до концентрації електронів, енергія яких менша \overline{W}_0 .

9.33. Електрони в металі знаходяться при $T = 0$. Визначити відносне число електронів $\Delta n/n$, кінетична енергія яких менша енергії Фермі на 2%.

9.34. Визначити середню енергію електронів провідності для міді при $T = 0$.

9.35. Знайти середню кінетичну енергію вільних електронів в сріблі при $T = 0$ К, вважаючи, що на кожний атом срібла приходить один вільний електрон.

9.36. Визначити сумарну кінетичну енергію вільних електронів в 1 см^3 золота при $T = 0$ К, вважаючи, що на кожний атом золота приходить один вільний електрон. Результат представити в кДж/см^3 .

9.37. Визначити концентрацію електронів в металі, енергія Фермі якого дорівнює 1 eV . Температура $T = 0$.

9.38. Визначити відношення концентрацій “вільних” електронів при $T = 0$ в літію і цезію, якщо енергії рівнів Фермі в цих металах відповідно дорівнюють: $W_{F1} = 4,72 \text{ eV}$ і $W_{F2} = 1,53 \text{ eV}$.

9.39. В скільки раз число “вільних” електронів, що приходить на один атом металу при $T = 0$, більше в алюмінію, ніж в міді, якщо енергії рівнів Фермі відповідно дорівнюють: $W_{F1} = 11,7 \text{ eV}$ і $W_{F2} = 7,0 \text{ eV}$.

9.40. Часто при розрахунках нехтують різницею між значенням енергії Фермі $W_F(T)$ при деякій температурі T і значенням енергії Фермі $W_F(0)$ при $T = 0$. Оцінити на скільки відсотків $W_F(T)$ відрізняється від $W_F(0)$ для вольфраму при температурі близькій до температури плавлення $t = 3370^\circ \text{ C}$. Вважати, що на кожний атом вольфраму приходить два вільних електрони. *Вказівка.* Скористатись формулою (9.12).

9.41. Визначити максимальну швидкість вільних електронів в міді при $T = 0$ К.

9.42. Визначити максимальну швидкість електронів в металі при $T = 0$, якщо енергія рівня Фермі $W_F = 5$ еВ. Порівняти отримане значення швидкості із швидкістю теплового хаотичного руху електронів при кімнатній температурі.

9.43. Метал знаходиться при $T = 0$. Визначити, в скільки раз число електронів із швидкостями від $0,5 v_{\max}$ до v_{\max} більше числа електронів із швидкостями від 0 до $0,5 v_{\max}$.

9.44. Знайти функцію розподілу густини електронів в металі за імпульсами (швидкостями) при $T = 0$.

9.45. Знайти функцію розподілу густини “вільних” електронів в металі при $T = 0$ за дебройлівськими довжинами хвиль.

9.46. Кусок металу, об’єм якого 20 см^3 , знаходиться при $T = 0$. Визначити число “вільних” електронів, імпульси яких відрізняються від максимального імпульсу p_{\max} не більше, ніж на $0,1p_{\max}$. Енергія Фермі $W_F = 5$ еВ.

9.47. Знайти відношення теплоємності електронного газу, який підпорядкується статистиці Фермі-Дірака, до теплоємності електронного газу, що підпорядковується класичній статистиці, для металу при $T = 300 \text{ К}$, енергія Фермі якого $W_F = 7$ еВ. *Вказівка.*

Теплоємність $C = \frac{dW}{dT}$. У класичній фізиці „електронний газ” розглядається як ідеальний одноатомний газ.

9.48. Енергія електрона у зоні провідності деякого металу з простою кубічною ґраткою має вид: $W = A \cdot k^2$, де $A = 6,05 \cdot 10^{-20}$ еВ м^2 . Рівні в зоні до значень хвильового числа $ka = (2\pi^2)^{1/3}$ заповнені електронами (a – ребро куба кристалу, що дорівнює 2Å). Вирахувати відношення m_n^*/m_e , де m_e – маса вільного електрона, і число електронів провідності, яке приходить на один атом металу.

10. НАПІВПРОВІДНИКИ

10.1. Питання теми

1. Концентрація електронів та дірок в напівпровідниках та її залежність від температури та домішок.
2. Положення рівня Фермі в напівпровідниках.
3. Електропровідність власних та домішкових напівпровідників та її залежність від температури.
4. Ефект Холла в напівпровідниках.
5. Нерівноважні носії заряду в напівпровідниках.

10.2. Основні положення та формули

1. **Функція густини дозволених енергетичних рівнів** для електронів в зоні провідності напівпровідника визначається за формулою

$$g_n(W) = \frac{4\pi(2m_n^*)^{3/2}}{h^3} \cdot (W - W_c)^{1/2}, \quad (10.1)$$

а – для дірок у валентній зоні –

$$g_p(W) = \frac{4\pi(2m_p^*)^{3/2}}{h^3} \cdot (W_v - W)^{1/2}. \quad (10.2)$$

В цих формулах m_n^* – ефективна маса електронів в зоні провідності, m_p^* – ефективна маса дірок у валентній зоні, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Джс – стала Планка, W_v – енергія “стелі” валентної зони, W_c – енергія “дна” зони провідності (див. рис. 10.1.).

Зауваження. За початок відліку енергії в напівпровідниках прийнято “стелю” валентної зони. Тому будемо вважати, що $W_v = 0$.

2. Розподіл електронів і дірок за енергетичними рівнями в напівпровідниках описується функціями Фермі–Дірака для електронів

$$f_n(W) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W - W_F}{kT}\right\} + 1} \quad (10.3)$$

і дірок

$$f_p(W) = 1 - f_n(W) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F - W}{kT}\right\} + 1} \quad (10.4)$$

відповідно, де W – енергія електрона (дірки) в зоні, W_F – енергія рівня Фермі, k – стала Больцмана, T – абсолютна температура.

3. Концентрація електронів і дірок в напівпровідниках розраховується за допомогою загальної формули (9.8). Цей розрахунок проілюструємо на рисунку 10.1.

1) Як видно із рис. 10.1(в), для розрахунку концентрації електронів і дірок можна з успіхом користуватись класичною функцією розподілу ймовірності Максвелла-Больцмана (9.7). Це пояснюється тим, що вільних рівнів енергії в зоні провідності і валентній зоні набагато більше, ніж електронів і дірок, які знаходяться там. Тому при розподілі частинок за енергетичними рівнями принцип Паулі можна не враховувати.

2) Функція $N(W)$ для електронів і дірок на рис. 10.1(г) має максимум біля дна зони провідності і стелі валентної зони відповідно. Тому можна вважати, що електрони в зоні провідності в основному знаходяться біля його дна, а дірки – біля стелі валентної зони.

3) Концентрація носіїв заряду в напівпровідниках чисельно дорівнює площам заштрихованих фігур на рис.10.1(г). Площі цих фігур, а відповідно рівноважні концентрації електронів і дірок дорівнюють:

$$n = N_c \exp\left\{-\frac{W_c - W_F}{kT}\right\} \quad (10.5)$$

i

$$p = N_v \exp\left\{-\frac{W_F - W_v}{kT}\right\}, \quad (10.6)$$

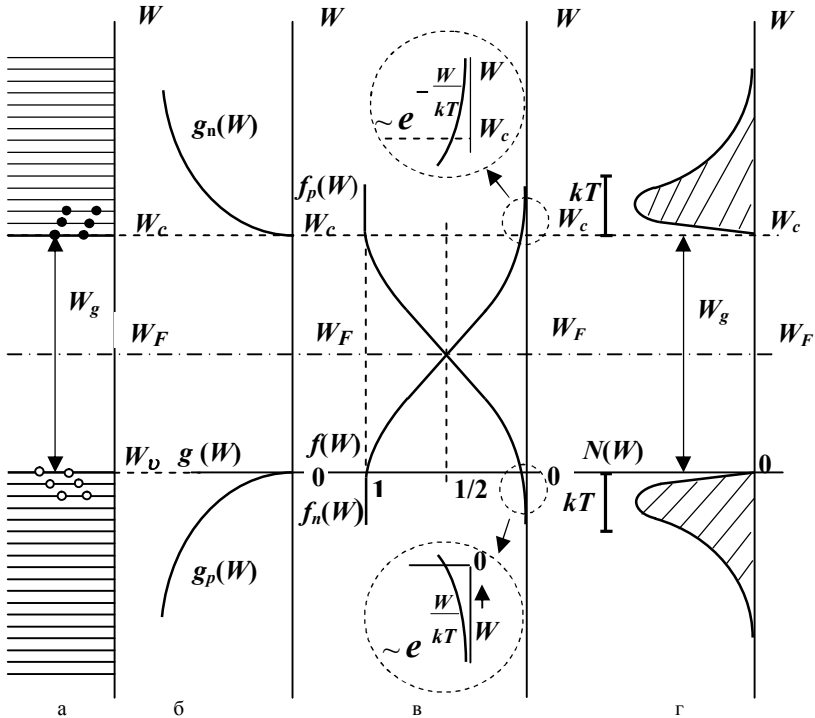


Рис. 10.1. а – енергетична діаграма напівпровідника, світлими кружечками позначені дірки, чорними – електрони; б – графіки функцій розподілу густини рівнів для електронів $g_n(W)$ і дірок $g_p(W)$; в – графіки функцій розподілу ймовірності заповнення енергетичних рівнів електронами $f_n(W)$ і дірками $f_p(W) = 1 - f_n(W)$; г – графіки функцій $N(W)$ розподілу густини електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні. W_g – ширина забороненої зони, W_F – енергія рівня Фермі, W_c – енергія «дна» зони провідності, W_v – енергія «стелі» валентної зони (нуль відліку енергії).

де

$$N_c = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_n^* kT)^{3/2} = 4,83 \cdot 10^{21} \left(\frac{m_n^*}{m_e} \right)^{3/2} \cdot T^{3/2}, \quad (10.7)$$

$$N_v = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_p^* kT)^{3/2} = 4,83 \cdot 10^{21} \left(\frac{m_p^*}{m_e} \right)^{3/2} \cdot T^{3/2}. \quad (10.8)$$

Тут $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – маса вільного електрона, T – абсолютна температура, N_c і N_v визначаються в m^{-3} .

Простий зв'язок між концентраціями електронів і дірок і положенням рівня Фермі, який виражається формулами (10.5) і (10.6), дуже зручний при аналізі багатьох ситуацій в напівпровідниках. Величини N_c і N_v називають *ефективними густинами станів в зоні провідності і валентній зоні* відповідно. Цей термін використовується тому, що для класичного (невиродженого) розподілу концентрація електронів в точності дорівнює N_c помноженій на больцманівську функцію розподілу ймовірності (9.7) при енергії рівня $W = W_c$. Хоч в дійсності електрони в зоні провідності, а дірки у валентній зоні розподілені в енергетичному інтервалі, що дорівнює декільком величинам kT , як показано на рис. 10.1 (г). Таким чином зону провідності (і аналогічну валентну зону) можна представити як зону енергій, що складається із N_c (N_v) рівнів, що мають однакову енергію W_c (W_v).

Із співвідношень (10.5) і (10.6) отримаємо, що

$$\frac{p}{n} = \left(\frac{m_p^*}{m_n^*} \right)^{3/2} \cdot \exp \left\{ 2 \left(\frac{W_c + W_v}{2} - W_F \right) / (kT) \right\}. \quad (10.9)$$

Звідки видно, що співвідношення між концентраціями електронів і дірок залежить від їхніх ефективних мас і особливо сильно (експоненціально) від положення рівня Фермі відносно середини забороненої зони $(W_c + W_v)/2$. За рахунок невеликого зміщення рівня Фермі можна отримати зміну співвідношення p/n на

декілька порядків. Цей перерозподіл концентрації рухливих носіїв заряду між зонами може бути здійснений введенням в напівпровідник домішок, так як положення рівня Фермі сильно залежить від типу і концентрації домішок.

4. **Закон діючих мас.** Із співвідношень (10.5) і (10.6) отримаємо, що добуток концентрацій рухливих електронів і дірок не залежить від положення рівня Фермі і при даній температурі залежить тільки від ширини забороненої зони $W_g = W_c - W_v$ напівпровідника і ефективних мас електронів і дірок:

$$np = N_c N_v \cdot \exp\left\{-W_g / (kT)\right\}. \quad (10.10)$$

Із співвідношення (10.10) видно, що збільшення концентрації рухливих носіїв одного типу можливе тільки за рахунок зменшення кількості рухливих носіїв іншого типу.

5. **Власні напівпровідники.** У власних напівпровідниках концентрації рухливих електронів і дірок рівні між собою, тобто:

$$n = p = n_i = p_i, \quad (10.11)$$

де n_i і p_i позначають в подальшому концентрації носіїв заряду у власному напівпровіднику. Із (10.10), враховуючи (10.11), отримаємо, що

$$n_i = p_i = \sqrt{N_c N_v} \cdot \exp\left\{-\frac{W_g}{2kT}\right\}. \quad (10.12)$$

Із формули (10.12) можна зробити висновок, що концентрація рухливих носіїв в напівпровідниках сильно (експоненціально) залежить від температури і ширини забороненої зони W_g . Саме в цьому суттєва різниця напівпровідників від металів, в яких концентрація рухливих носіїв (електронів) практично не залежить від температури.

6. **Домішкові напівпровідники.** Енергетична діаграма домішкового напівпровідника приведена на рис. 10.2. Іонізація

донорних атомів приводить до утворення “вільних” електронів в зоні провідності (процеси 1), іонізація акцепторних атомів до утворення дірок у валентній зоні (процеси 2). При міжзонних переходах (3) генеруються і дірки і електрони. Концентрація “вільних” електронів в донорному напівпровіднику при низьких температурах ($kT < \Delta W_n$) дорівнює:

$$n_n = \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\Delta W_n}{2kT}\right\}, \quad (10.13)$$

а концентрація “вільних” дірок в акцепторному напівпровіднику при $kT < \Delta W_p$

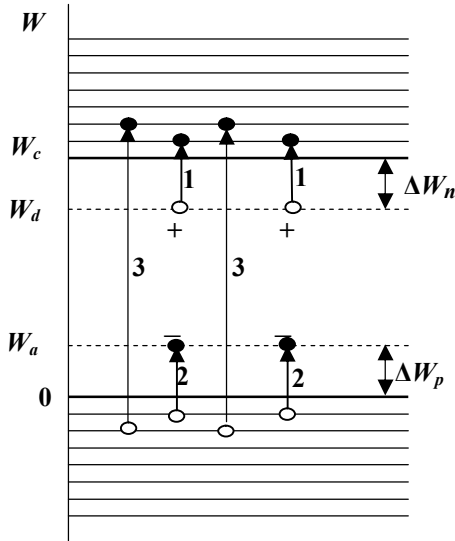


Рис. 10.2. Механізм теплової генерації рухливих носіїв заряду в домішкових напівпровідниках. Світліми кружечками позначені дірки, чорними – електрони. Знаками “+” і “-” позначені іонізовані донори і акцептори. ΔW_n – енергія активації донорних домішок, ΔW_p – енергія активації акцепторних домішок, W_d і W_a – енергії донорних і акцепторних рівнів відповідно.

$$p_p = \sqrt{\frac{N_a N_v}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\Delta W_p}{2kT}\right\}, \quad (10.14)$$

де N_d і N_a – концентрація донорних і акцепторних атомів відповідно.

Для області високих температур ($kT > \Delta W_n$), ($kT > \Delta W_p$) концентрації основних носіїв заряду в донорному і акцепторному напівпровідниках дорівнюють відповідно:

$$n_n = \frac{N_d}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right), \quad (10.15)$$

$$p_p = \frac{N_a}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_a} \right)^2} \right), \quad (10.16)$$

а концентрація неосновних носіїв заряду визначається за законом діючих мас (10.10) із врахуванням (10.12).

Для випадку сильного легування, коли $N_d \gg n_i$ або $N_a \gg n_i$, концентрації основних носіїв заряду згідно (10.15) і (10.16) дорівнюють:

$$n_n \approx N_d, \quad (10.17)$$

$$p_p \approx N_a. \quad (10.18)$$

Тоді згідно закону діючих мас концентрація неосновних носіїв заряду (дірок) в донорному напівпровіднику буде дорівнювати

$$p_n \approx n_i^2 / N_d, \quad (10.19)$$

а відповідно концентрація електронів в акцепторному напівпровіднику

$$n_p \approx n_i^2 / N_a. \quad (10.20)$$

7. Положення рівня Фермі. а) Загальна формула.

Із (10.9) можна отримати, що

$$W_F = \frac{1}{2}(W_c + W_v) - \frac{1}{2}kT \ln \frac{p}{n} - \frac{3}{4}kT \ln \frac{m_n^*}{m_p^*}. \quad (10.21)$$

б) *Власний напівпровідник*: $n = p = n_i = p_i$. Якщо $m_n^* \approx m_p^*$, то

$$W_{Fi} \approx \frac{W_c + W_v}{2}, \quad (10.22)$$

тобто рівень Фермі розташовується біля середини забороненої зони.

в) *Домішковий напівпровідник*.

Найпростіші формули отримуються для випадку сильного легування. Для напівпровідника n - типу, підставляючи (10.17) в (10.5), отримаємо:

$$N_d = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_{Fn}}{kT} \right\}. \quad (10.23)$$

Звідки знайдемо, що

$$W_{Fn} = W_c - kT \ln(N_c / N_d). \quad (10.24)$$

Для напівпровідника p -типу, підставляючи (10.18) в (10.6), отримаємо, що

$$N_a = N_v \cdot \exp \left\{ -\frac{W_{Fp} - W_v}{kT} \right\}. \quad (10.25)$$

Звідки знайдемо, що

$$W_{Fp} = W_v + kT \ln(N_v / N_a). \quad (10.26)$$

г) *Концентрації носіїв заряду можна виразити через n_i і W_{Fi}* . Приймаючи, що $n = p = n_i$ і $W_F = W_{Fi}$, із формул (10.5) і (10.6) отримаємо:

$$n_i = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_{Fi}}{kT} \right\} = N_v \exp \left\{ -\frac{W_{Fi} - W_v}{kT} \right\}. \quad (10.27)$$

Тоді формули (10.5) і (10.6) перепишуться так:

$$n = n_i \cdot \exp\left\{\frac{W_{Fn} - W_{Fi}}{kT}\right\}, \quad (10.28)$$

$$p = n_i \cdot \exp\left\{\frac{W_{Fi} - W_{Fp}}{kT}\right\}. \quad (10.29)$$

Положення рівня Фермі для n - і p -типу напівпровідників можна визначити за формулами, що отримуються із (10.28) і (10.29):

$$W_{Fn} = W_{Fi} + kT \ln \frac{n}{n_i}, \quad (10.30)$$

$$W_{Fp} = W_{Fi} - kT \ln \frac{p}{n_i}. \quad (10.31)$$

8. Електропровідність напівпровідників.

Густина струму в напівпровідниках

$$\vec{j} = |e|n\vec{v}_n + |e|p\vec{v}_p, \quad (10.32)$$

де \vec{v}_n і \vec{v}_p – швидкості направленої (дрейфової) руху електронів і дірок відповідно, а n і p – концентрації електронів і дірок відповідно; $\vec{v}_n = u_n \vec{E}$, $\vec{v}_p = u_p \vec{E}$, u_n і u_p – рухливості електронів і дірок, \vec{E} – напруженість електричного поля в напівпровіднику. Згідно закону Ома $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ отримаємо, що питома електропровідність

$$\sigma = |e|nu_n + |e|pu_p. \quad (10.33)$$

Для власного напівпровідника, коли $n = p = n_i = p_i$, із врахуванням (10.12) електропровідність визначається за формулою:

$$\sigma_i = \sigma_{oi} \exp\left\{-\frac{W_g}{2kT}\right\}, \quad (10.34)$$

де $\sigma_{oi} = \frac{2}{h^3} \left(2\pi \sqrt{m_n^* m_p^* kT}\right)^{3/2} \cdot (u_n + u_p) \cdot |e|$ називають сталою, що слабо залежить від температури.

В домішкових напівпровідниках для області низьких температур електропровідність визначається за формулами:

$$\text{для } n\text{-типу} \quad \sigma_n = \sigma_{on} \exp\left\{-\frac{\Delta W_n}{2kT}\right\}, \quad (10.35)$$

$$\text{для } p\text{-типу} \quad \sigma_p = \sigma_{op} \exp\left\{-\frac{\Delta W_p}{2kT}\right\}, \quad (10.36)$$

де $\sigma_{on} = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} u_n \cdot |e|$, $\sigma_{op} = \sqrt{\frac{N_v N_a}{2}} u_p \cdot |e|$ сталі, що слабо залежать від температури. Для області високих температур електропровідність домішкових напівпровідників визначається за формулою (10.33), а концентрації носіїв заряду визначаються за формулами (10.15), (10.16) і законом діючих мас.

9. Ефект Холла.

Холлівська різниця потенціалів U_H в умовах ефекту Холла дорівнює:

$$U_H = R_H B b j, \quad (10.37)$$

де R_H – постійна Холла, B – індукція магнітного поля, b – ширина зразка, j – густина струму через зразок.

Для напівпровідника з одним типом носіїв заряду постійна Холла

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{1}{en} \approx \frac{1,2}{en}, \quad (10.38)$$

де n – концентрація носіїв заряду, e – заряд електрона.

10. Нерівноважні носії заряду.

Зміна нерівноважної концентрації неосновних носіїв заряду з часом за рахунок рекомбінації визначається за формулами:

для n – типу напівпровідника

$$\Delta p = \Delta p_0 \exp\{-t/\tau_p\}, \quad (10.39)$$

для p – типу напівпровідника

$$\Delta n = \Delta n_0 \exp\{-t/\tau_n\}, \quad (10.40)$$

де Δp_0 , Δn_0 – початкові концентрації нерівноважних дірок в n - типі і нерівноважних електронів в p - типі напівпровідниках відповідно; τ_p і τ_n – час життя нерівноважних дірок і електронів відповідно.

11. Густина дифузійних струмів.

Густина дифузійних струмів електронів і дірок дорівнюють:

$$j_{Dn} = eD_n \frac{dn}{dx}, \quad (10.41)$$

$$j_{Dp} = -eD_p \frac{dp}{dx}, \quad (10.42)$$

де D_n і D_p – коефіцієнти дифузії електронів і дірок, dn/dx і dp/dx – градієнти концентрації електронів і дірок відповідно.

12. Співвідношення Ейнштейна.

Співвідношення Ейнштейна між рухливостями і коефіцієнтами дифузії для електронів і дірок мають вид:

$$u_n = \frac{eD_n}{kT}, \quad (10.43)$$

$$u_p = \frac{eD_p}{kT}. \quad (10.44)$$

13. Дифузія нерівноважних дірок в напівпровідниках n -типу і нерівноважних електронів в напівпровідниках p -типу описується рівняннями:

$$\Delta p(x) = \Delta p_0 \exp\{-x/L_p\}, \quad (10.45)$$

$$\Delta n(x) = \Delta n_0 \exp\{-x/L_n\}, \quad (10.46)$$

де Δp_0 і Δn_0 - концентрації дірок і електронів в площині $x=0$, а

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}; L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \quad (10.47)$$

– дифузійні довжини дірок і електронів. Вище сказане проілюстровано графічно на рис.10.3 для напівпровідника n -типу.

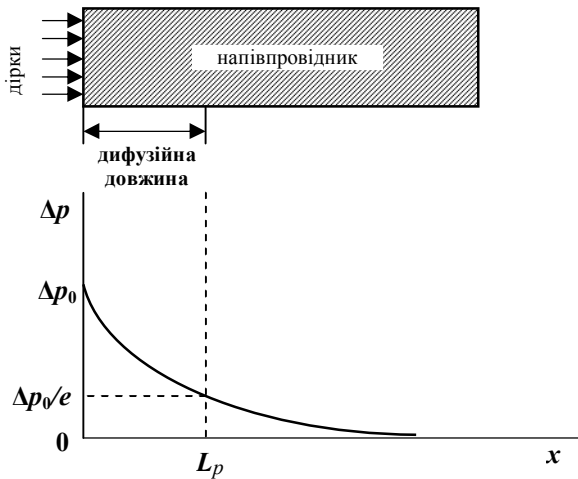


Рис. 10.3. Дифузія нерівноважних дірок в напівпровіднику n -типу

10.3. Питання на самопідготовку

1. Поясніть, чому розподіл за енергетичними рівнями електронів в зоні провідності і дірок у валентній зоні описується класичною функцією Максвелла–Больцмана?

2. Який фізичний зміст ширини забороненої зони?
3. Як ви думаєте, в чому зміст введення поняття ефективної густини станів для електронів і дірок в напівпровідниках?
4. Поясніть, від яких факторів залежить відношення концентрацій електронів і дірок в напівпровідниках?
5. Поясніть фізичний зміст закону діючих мас.
6. Поясніть, чому концентрація електронів і дірок у власних напівпровідниках сильно залежить від температури?
7. Як ви думаєте, чи можливий такий випадок в напівпровідниках, щоб ефективна маса електронів дорівнювала ефективній масі дірок? Де розташовувався б в цьому випадку рівень Фермі?
8. Чому для електричних властивостей домішкових напівпровідників важливим є чи це область високих, чи низьких температур?
9. Як ви розумієте вислів: “Сильно легований напівпровідник”?
10. Від яких факторів залежить величина часу життя в напівпровідниках?
11. Поясніть роль основних і неосновних носіїв заряду в напівпровідниках з точки зору електричних і фотоелектричних властивостей.
12. Які існують методи визначення основних фізичних параметрів напівпровідників?
13. Які види струму існують в напівпровідниках? В чому різниця між ними?

10.4. Методичні вказівки

Розв’язування задач з фізики напівпровідників вимагає творчого підходу і детального аналізу умови задачі. Як правило, при розв’язуванні задач по даній темі приходиться робити різні припущення. І цілком можлива така ситуація, що при різних припущеннях можна одержати різні числові відповіді. Все залежить

від тих припущень, які зроблені при розв'язуванні задачі. Головне – щоб припущення не були абсурдними і не протирічили теорії. Якщо в умові задачі не приводяться деякі параметри чистого напівпровідника, то необхідно скористатись даними таблиці 12 додатків.

10.5 Приклади розв'язування задач

Задача 10.1. Рівень Фермі напівпровідника знаходиться на 0,3 еВ нижче дна зони провідності. Яка ймовірність того, що при кімнатній температурі енергетичні рівні, які розташовані на відстані

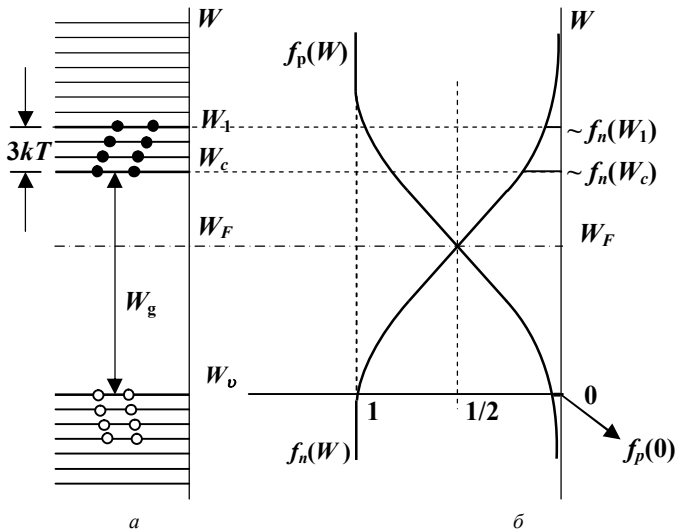


Рис.10.4. Енергетична діаграма напівпровідника (а) і графіки функцій розподілу ймовірності заповнення енергетичних рівнів електронами $f_n(W)$ і дірками $f_p(W) = 1 - f_n(W)$ (б). Світлими кружечками позначені дірки, чорними – електрони.

$3kT$ вище дна зони провідності, зайняті електронами? Яка ймовірність того, що рівень біля стелі валентної зони містить дірки, а рівень біля дна зони провідності – електрони? Ширина забороненої зони – 1,1 еВ.

Розв'язок. Для розв'язування задачі необхідно виконати рисунок 10.4 аналогічно рис.(10.1) (а) і (в).

Із умови задачі видно, що рівень Фермі розташований ближче до зони провідності, тому згідно співвідношення (10.9) напівпровідник є *n*-типу і містить донорні домішки. За початок відліку енергії в напівпровідниках приймається стеля валентної зони, тому абсолютні значення енергії рівнів, які нас цікавлять, дорівнюють:

$$W_v = 0; W_F = W_g - 0,3 \text{ еВ}; W_1 = W_g + 3kT; W_c = W_g.$$

Ймовірність заповнення рівнів електронами визначається за формулою (10.3). Ймовірність того, що даний стан вільний від електрона, тобто зайнятий діркою, визначається за формулою (10.4). На рис. 10.4(б) ймовірності, які нам треба визначити, позначені товстими горизонтальними лініями. Для розрахунків прийемо, що $T = 293 \text{ К}$ і $kT = 0,0253 \text{ еВ}$.

Ймовірність заповнення електронами рівня W_1 дорівнює:

$$\begin{aligned} f_n(W_1) &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_1 - W_F}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3 + 3kT}{kT}\right\} + 1} = \\ &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3}{kT} + 3\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\{11,85 + 3\} + 1} \approx \exp\{-14,85\} = 3,5 \cdot 10^{-7}. \end{aligned}$$

Ймовірність заповнення електронами рівня дна зони провідності дорівнює:

$$\begin{aligned} f_n(W_c) &= \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_c - W_F}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,3}{0,0253}\right\} + 1} = \\ &= \frac{1}{\exp\{11,85\} + 1} = \exp\{-11,85\} = 7 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

Ймовірність того, що на рівні біля стелі валентної зони знаходяться дірки, дорівнює:

$$f_p(W_v) = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F - W_v}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_F}{kT}\right\} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\exp\left\{\frac{W_g - 0,3eB}{kT}\right\} + 1} = \frac{1}{\exp\left\{\frac{0,8}{0,0253}\right\} + 1} \approx \exp\{-316\} = 1,8 \cdot 10^{-14}.$$

Висновок. 1. Числові розрахунки показали, що справді для описання статистичних закономірностей електронів і дірок в напівпровідниках з успіхом можна використовувати класичну функцію розподілу ймовірності Максвелла-Больцмана, тобто одиницю в знаменнику формул (10.3) і (10.4) можна знехтувати.

2. Ймовірність того, що на рівні біля стелі валентної зони знаходяться дірки, нехтовно мала. Це і зрозуміло, тому що напівпровідник n – типу, містить донорні рівні, а рівень Фермі знаходиться ”далеко” від стелі валентної зони.

Задача 10.2. На скільки треба підвищити температуру чистого германію порівняно з 300 К, щоб число електронів провідності збільшилось у 2 рази?

Розв’язок. Скористаємось формулою (10.12), згідно якої

$$n_i(T) \sim T^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{W_g}{2kT}\right\},$$

а

$$n_i(T + \Delta T) \sim (T + \Delta T)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{W_g}{2k(T + \Delta T)}\right\}.$$

Згідно умови задачі

$$\frac{n_i(T + \Delta T)}{n_i(T)} = 2 = \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{\frac{W_g}{2kT} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right)\right\}.$$

Після логарифмування останнього виразу отримаємо:

$$\ln 2 = \frac{3}{2} \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) + \frac{W_g}{2kT} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right). \quad (1)$$

Це рівняння розв'язати відносно ΔT в загальному випадку складно. Тому скористаємось формулами наближеного підрахунку:

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \approx \frac{\Delta T}{T}, \quad \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}} \approx 1 - \frac{\Delta T}{T}.$$

При отриманні цих формул вважається, що величина $\Delta T/T$ мала порівняно із 1. Це може бути тоді, коли $\Delta T \ll T = 300$ К. Таке твердження не зовсім очевидне, тому приведемо деякі міркування. Залежність концентрації електронів провідності в напівпровідниках експоненціально залежить від температури. Враховуючи числові значення, які приведені в умові задачі і дані табл. 12 додатків, неважко отримати за допомогою (10.12), що

$$n_i \sim \exp\left\{-\frac{4,2 \cdot 10^3}{T}\right\}.$$

Тоді згідно рівняння (1)

$$\ln 2 = 0,7 \approx \frac{4,2 \cdot 10^3}{300} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\Delta T}{T}}\right).$$

Після нескладних перетворень отримаємо, що

$$1 + \frac{\Delta T}{T} = \frac{14}{14 - 0,7} \approx 1,053.$$

Звідки можемо зробити висновок, що $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$. Таким чином рівняння (1) спрощується до вигляду:

$$\ln 2 = \frac{\Delta T}{T} \left(\frac{3}{2} + \frac{W_g}{2kT} \right).$$

Звідки знаходимо, що

$$\Delta T = \frac{T \ln 2}{\frac{3}{2} + \frac{W_g}{2kT}}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо невідому величину ΔT :

$$\Delta T = \frac{300 \cdot 0,7}{1,5 + 13,9} = 14 \text{ К.}$$

Висновок. Зміна температури германію приблизно на 5% від кімнатної призводить до зміни концентрації вільних носіїв заряду на 100% і, як наслідок, приблизно на стількиж відсотків зміниться його провідність. Зрозуміло, що такі зміни не можуть не вплинути на характеристики приладів, виготовлених із чистого германію. В таких випадках необхідна термостабілізація приладу.

Задача 10.3. Як зміниться концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику при зміні температури від $T_1 = 200 \text{ К}$ до $T_2 = 300 \text{ К}$, якщо $W_g = 0,785 \text{ еВ} - aT$, де a стала величина?

Розв'язок. Концентрація носіїв заряду у власному напівпровіднику визначається за формулою (10.12). Тому можемо записати, що

$$n_1 = \sqrt{N_c(T_1) \cdot N_v(T_1)} \exp\left\{-\frac{W_0 - aT_1}{2kT_1}\right\},$$

а

$$n_2 = \sqrt{N_c(T_2) \cdot N_v(T_2)} \exp\left\{-\frac{W_0 - aT_2}{2kT_2}\right\},$$

де $W_0 = 0,785$ еВ, N_c і N_v визначаються за формулами (10.7) і (10.8).

Тоді

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{W_0}{2k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right\}.$$

Після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{300}{200}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{0,785 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \left(\frac{1}{200} - \frac{1}{300}\right)\right\} = 3639.$$

Задача 10.4. Розрахувати температурний коефіцієнт опору чистого бездомішкового арсеніду галія при температурі $T = 300$ К.

Розв'язок. Згідно визначення температурний коефіцієнт опору

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \quad (1)$$

де ρ – питомий опір при деякій температурі T , $d\rho$ – зміна питомого опору при зміні температури на величину dT . Тобто α показує відносну зміну $d\rho/\rho$ питомого опору при зміні температури на 1 К. Згідно формули (10.34) можемо записати, що питомий опір

$$\rho = \frac{1}{\sigma_i} = \rho_{0i} \exp\left\{\frac{W_g}{2kT}\right\}. \quad (2)$$

Звідки знаходимо, що

$$\frac{d\rho}{dT} = -\frac{W_g}{2kT^2} \rho$$

і тоді

$$\alpha = -\frac{W_g}{2kT^2}.$$

Скориставшись табличними даними для арсеніду галію (табл. 12 додатків), отримаємо, що

$$\alpha = -\frac{1,4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300^2} \text{K}^{-1} = -0,09 \text{K}^{-1}.$$

Зауважемо, що для напівпровідників α залежить від температури на відміну від α для металів, значення якого є сталим і для різних металів його величина приводиться у довідкових таблицях.

Задача 10.5. Число атомів германію в одиниці об'єму дорівнює $4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. В зразок вводиться домішка n -типу в кількості одного атома на 10^6 атомів германію. Визначити концентрацію основних і неосновних носіїв заряду, вважаючи, що всі електрони донорів є збудженими і знаходяться в зоні провідності.

Розв'язок. Згідно умови задачі всі домішки іонізовані і можна вважати, що концентрація основних електронів і неосновних дірок для рівноважного стану визначається співвідношеннями (10.15), (10.10) і (10.12):

$$n_n = \frac{N_d}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N_d} \right)^2} \right),$$

$$n_n \cdot p_n = n_i^2.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно n_n і p_n , отримаємо концентрації основних і неосновних носіїв заряду. Проте концентрація домішникових атомів $N_d = n_{\text{Ge}} / 10^6 = 4,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$

значно більша концентрації n_i (табл. 12, додатків). Значить в задачі розглядається випадок сильного легування і тому розрахункові формули спрощуються, а саме:

$$n_n = N_d; p_n = n_i^2 / N_d$$

Після підстановки числових значень, отримаємо, що

$$n_n = 4,5 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}, \text{ а } p_n = \frac{(2,4 \cdot 10^{19})^2}{4,5 \cdot 10^{22}} \text{ м}^{-3} = 1,28 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

Висновок. В цій задачі має місце явище заглушення неосновних носіїв заряду. Якщо в чистому германії концентрація дірок складає величину $2,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, то в легovanому – $1,28 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$, тобто зменшується на три порядки.

Задача 10.6. При температурі 300 К електропровідність зразка власного кремнію дорівнює $3,17 \cdot 10^{-4} (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$. Яка концентрація власних носіїв заряду? Якщо через зразок протікає струм, то яка частина струму обумовлена дірками? Той же зразок, легований донорними домішками, має електронну провідність. Концентрація донорів дорівнює 10^{21} м^{-3} . Знайти концентрацію дірок в легovanому зразку і визначити, яка частина провідності обумовлена ними. Допустити, що легування практично не впливає на величину рухливості носіїв заряду.

Розв'язок. Розв'язувати задачу будемо частинами. В першій частині розглянемо чистий кремній, у другій – легований.

I. Електропровідність власного кремнію визначається за формулою (10.33)

$$\sigma_i = en_i(u_n + u_p) = ep_i(u_n + u_p).$$

Скориставшись даними табл. 12 додатків, знаходимо, що

$$p_i = \frac{\sigma_i}{e(u_n + u_p)} = \frac{3,17 \cdot 10^{-4}}{1,6 \cdot 10^{-19} (0,13 + 0,05)} \text{ м}^{-3} \approx 1,1 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

Густина струму через зразок згідно закону Ома в диференціальній формі записується як

$$j = \sigma E,$$

де E – напруженість електричного поля в зразку. Тому відношення струмів знаходимо так:

$$\frac{j_{ip}}{j_i} = \frac{\sigma_{ip} \cdot E}{\sigma_i \cdot E} = \frac{ep_i u_p}{ep_i (u_n + u_p)} = \frac{0,05}{0,13 + 0,05} = 0,28 = 28\%.$$

II. Розв'язування другої частини задачі вимагає невеликого аналізу. При $T = 300$ К, $kT = 0,0259$ еВ $> 10^{-2}$ еВ і тому можна вважати, що практично всі домішки іонізовані. Так як $N_d \gg n_i = p_i$, то скористаємось формулами для розрахунку основних і неосновних носіїв заряду для випадку сильного легування. Тому згідно (10.19)

$$p_n = n_i^2 / N_d = \frac{2,17 \cdot 10^{32}}{10^{21}} \text{ м}^{-3} \approx 2,2 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3},$$

а згідно (10.17) концентрація електронів

$$n_n = N_d = 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Частина провідності, що обумовлена дірками буде дорівнювати:

$$\frac{\sigma_p}{\sigma} = \frac{ep_n u_p}{e(p_n u_p + n_n u_n)} = \frac{1}{1 + \frac{n_n u_n}{p_n u_p}} = \frac{1}{1 + 0,12 \cdot 10^{11}} \approx 8 \cdot 10^{-9}\%.$$

Висновок. Ця задача наглядно ілюструє, як сильно легування змінює структуру електропровідності зразка. Якщо в чистому кремнії дірки обумовлюють 28% провідності, то при легуванні донорними домішниками (з розрахунку 1 атом домішки на 10 мільйонів атомів основної речовини) можна вважати, що електропровідність такого матеріалу практично повністю обумовлена електронами. В цьому суть прояву заглушення неосновних носіїв заряду.

Задача 10.7. Вирахувати енергію активації донорних атомів і температурний коефіцієнт опору в германії *n*-типу, якщо відомо, що рухливість електронів $500 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$, концентрація донорних атомів – $5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, питомий опір $1,5 \text{ кОм}\cdot\text{см}$, температура напівпровідника 50 К .

Розв'язок. Згідно умови задачі $kT = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ еВ} < 0,01 \text{ еВ}$ і тому можна скористатись формулою (10.35). Враховуючи, що $\sigma_n = 1/\rho$, отримаємо співвідношення:

$$\frac{1}{\rho} = eu_n \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\Delta W_n}{2kT}\right\}.$$

Звідки знаходимо, що

$$\Delta W_n = 2kT \cdot \ln\left(\rho \cdot eu_n \sqrt{\frac{N_d N_c}{2}}\right).$$

Для числових розрахунків скористаємось формулою (10.7) і даними табл. 12 додатків, прийнявши $m_n^*/m_e = 0,55$. Тоді після підстановки числових значень фізичних величин отримаємо:

$$\Delta W_n = \frac{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50}{1,6 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln\left(15 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,5 \cdot \left(\frac{5 \cdot 10^{23} \cdot 4,83 \cdot 10^{21} (0,55 \cdot 50)^{3/2}}{2}\right)^{1/2}\right) = 0,113 \text{ еВ}.$$

Згідно розв'язку задачі (10.4) температурний коефіцієнт опору для умови нашої задачі буде:

$$\alpha = -\frac{\Delta W_n}{2kT^2} = -\frac{0,113 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 50^2} \text{ К}^{-1} = -0,26 \text{ К}^{-1}.$$

Задача 10.8. Зразок кремнію *n*-типу, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги при температурі 300 К , характеризується

такими параметрами: питомий опір 5 Ом·см, рухливість електронів 1600 см²/(В·с); рухливість дірок 600 см²/(В·с); ефективна густина рівнів в зоні провідності 10¹⁹ см⁻³. Визначити: а) концентрацію електронів і дірок; б) положення рівня Фермі; в) ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електронами. Відомо, що енергія активації донорного рівня $\Delta W_n = W_c - W_d = 50$ мЕВ.

Розв'язок. а) Запишемо рівняння, яке визначає питому провідність, а також закон діючих мас з урахуванням (10.10), (10.12):

$$\frac{1}{\rho} = \sigma = e(u_n n_n + p_n u_p); \quad p_n n_n = n_i^2,$$

де значення n_i беремо із табл. 12 додатків.. Із цих формул отримаємо, що

$$\frac{1}{\rho} = e(u_n n_n + \frac{n_i^2}{n_n} u_p),$$

або

$$20 = 1,6 \cdot 10^{-19} \left(n_n \cdot 0,16 + \frac{(1,1 \cdot 10^{16})^2}{n_n} \cdot 0,06 \right).$$

Звідки знайдемо, що $n_n = 7,8 \cdot 10^{20}$ м⁻³, а $p_n = n_i^2 / n_n = 1,6 \cdot 10^{11}$ м⁻³.

б) Використаємо співвідношення (10.5), вважаючи, що $n_n = n$. Тоді

$$n_n = N_c \exp \left\{ -\frac{W_c - W_F}{kT} \right\}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо

$$7,8 \cdot 10^{20} = 10^{25} \exp \left\{ -\frac{W_c - W_F}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300} \right\}.$$

Звідки знайдемо, що $W_c - W_F = 0,244$ еВ.

Для розв'язування цього завдання можна було б скористатися формулою (10.23), прийнявши $N_d = n_n$.

в) Ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електроном розраховуємо за допомогою функції Фермі-Дірака (10.3):

$$f(W_d) = \left(1 + \exp\left\{ \frac{W_d - W_F}{kT} \right\} \right)^{-1}.$$

Так як $W_c - W_F = 0,244$ еВ, $W_c - W_d = 0,05$ еВ, то $W_d - W_F = 0,194$ еВ і

$$\begin{aligned} f(W_d) &= \left(1 + \exp\left\{ \frac{0,194}{8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300} \right\} \right)^{-1} = \\ &= 5,5 \cdot 10^{-4} = 0,055\%. \end{aligned}$$

Висновок. Ймовірність того, що донорний рівень зайнятий електроном, тобто відносна частка неіонізованих донорів, складає 0,055%. В той же час відносна частка іонізованих донорів дорівнює 99,945%. Тобто можна вважати, що донори з енергією активації $\Delta W_n = W_c - W_d = 0,05$ еВ при температурі 300К ($kT = 0,026$ еВ) практично майже всі іонізовані.

Задача 10.9. Знайти положення рівня Фермі в германії, що знаходиться в стані термодинамічної рівноваги. Матеріал легований акцепторними атомами, концентрація яких $N_a = 10^{15}$ см⁻³. Значення температури $T = 0; 100; 300$ і 400 К. Вважати, що при $T = 100$ К іонізованими є 50%, а при вищих температурах іонізовані 100% домішкових атомів. Вважати, що має місце рівність

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} T^3 \exp\left\{ -\frac{8355}{T} \right\} \text{ см}^{-6}.$$

Розв'язок. а) При $T = 0$, $n_i = 0$, домішкові атоми неіонізовані і тому електропровідність відсутня. Рівень Фермі згідно (10.22) розташовується посередині забороненої зони і

$$W_F = \frac{W_g}{2} = \frac{8355 k}{2} = \frac{0,72 \text{ еВ}}{2} = 0,36 \text{ еВ}.$$

Зауважимо, що за початок відліку енергії прийнято стелю валентної зони, тобто $W_v = 0$. Тому енергія дна зони провідності $W_c = W_g$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж·с.

б) При $T = 100$ К,

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (100)^3 \exp\left\{-\frac{8355}{100}\right\} = 161 \text{ см}^{-6}; n_i = 13 \text{ см}^{-3}.$$

Так як $N_a \gg n_i$, то концентрація основних носіїв заряду (дірок) згідно умови задачі $p_p = \frac{Na}{2} \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Концентрація неосновних носіїв заряду (електронів)

$$n_p = n_i^2 / p_p = 3,2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-3}.$$

Таким чином при $T = 100$ К має місце режим домішкової провідності. Енергію рівня Фермі розрахуємо за формулою (10.31):

$$W_{F_p} = \frac{0,72}{2} - 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 100 \ln \frac{5 \cdot 10^{14}}{13} \approx 0,09 \text{ еВ}.$$

в) При $T = 300$ К

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (300)^3 \exp\left\{-\frac{8355}{300}\right\} = 6,7 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-6} \rightarrow n_i \approx 8,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3};$$

$$p_p = 10^{15} \text{ см}^{-3} \rightarrow n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = 6,7 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}.$$

$$W_{F_p} = 0,36 - 8,62 \cdot 10^{-5} \cdot 300 \ln \frac{10^{15}}{8,2 \cdot 10^{13}} = 0,3 \text{ еВ}.$$

г) При $T = 400$ К

$$n_i^2 = 3,1 \cdot 10^{32} \cdot (400)^3 \exp\left\{-\frac{8355}{400}\right\} =$$

$$= 1,68 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-6} \rightarrow n_i \approx 4,1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Згідно (10.16)

$$p_p = \frac{10^{15}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot 4,1 \cdot 10^{15}}{10^{15}} \right)^2} \right) = 4,63 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3};$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{1,68 \cdot 10^{31}}{4,63 \cdot 10^{15}} = 3,63 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Так як $p_p \approx n_p \approx n_i$, то має місце режим власної провідності.

$$W_F = 0,36 - 8,62 \cdot 10^{-5} 400 \ln \frac{4,63 \cdot 10^{15}}{4,1 \cdot 10^{15}} = 0,356 \text{ еВ}.$$

Висновок. Як видно із результатів розрахунку положення рівня Фермі в домішковому напівпровіднику суттєво залежить від температури, а при низьких температурах і від концентрації домішки. З ростом температури змінюється також режим провідності. Якщо при низьких температурах ($T = 100 \text{ К}$) провідність домішкова, то при $T = 400 \text{ К}$ провідність вже практично власна.

Задача 10.10. В зоні провідності арсеніду галію (*n*-GaAs) поряд з основним мінімумом енергії (I), який має місце при $k = 0$, є бічний мінімум (II), що розташований вище основного на $W_s = 0,35 \text{ еВ}$ (Рис.10.5). Рухливості електронів в мінімумах I і II і повну концентрацію електронів вважати такими, що не залежать від температури. Ефективну масу і рухливість електронів мінімуму II прийняти такими: $m_{II} = 15m_1$, $u_{II} = u_1/50$, де m_1 і u_1 ефективна маса і рухливість електронів мінімуму I відповідно. Знайти зміну провідності напівпровідника при збільшенні температури від 300 К до 1000 К.

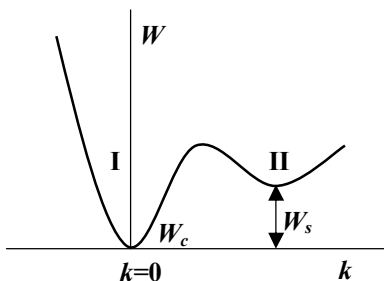


Рис. 10.5

Розв'язок. Спочатку розв'язку задачі необхідно звернути увагу на те, що саме в такому n – GaAs спостерігається ефект Ганна. Ця задача повинна допомогти глибше зрозуміти механізм утворення домена електричного поля в ефекті Ганна. В умовах ефекту Ганна заповнення електронами мінімумів I і II змінюється внаслідок дії

електричного поля, яке прикладене до зразка, а в нашій задачі це відбувається за допомогою температури. Проте електропровідність при цьому змінюється приблизно однаково (має N -подібний характер). При умові ефекта Ганна зменшення електропровідності з ростом електричного поля (для $E > E_n$) безпосередньо зв'язано із збільшенням концентрації носіїв заряду в мінімумі II зони провідності. Приступимо до безпосереднього розв'язку задачі.

Провідність n -GaAs із врахуванням тільки основних носіїв заряду буде така:

$$\sigma_n = en_1u_1 + en_{II}u_{II},$$

де

$$n_I = N_{cI} \exp\left\{-\frac{W_c - W_F}{kT}\right\} - \text{концентрація електронів в зоні I,}$$

$$n_{II} = N_{cII} \exp\left\{-\frac{(W_c + W_s) - W_F}{kT}\right\} - \text{концентрація електронів в зоні II,}$$

записані згідно формули (10.5).

$$N_{cI} = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_1 kT)^{3/2}, \quad N_{cII} = \frac{2}{h^3} (2\pi \cdot m_{II} kT)^{3/2}$$

ефективні густини рівнів в зонах I і II записані згідно (10.7).

Тому відношення концентрацій електронів буде:

$$\frac{n_{\text{II}}}{n_{\text{I}}} = \frac{N_{\text{cII}}}{N_{\text{cI}}} \cdot \exp\left\{-\frac{W_{\text{S}}}{kT}\right\} = \left(\frac{m_{\text{II}}}{m_{\text{I}}}\right)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{W_{\text{S}}}{kT}\right\}.$$

Для випадку $T = 300$ К це відношення дорівнює:

$$\left(\frac{n_{\text{II}}}{n_{\text{I}}}\right)_{300} = (15)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{0,35}{0,0259}\right\} \approx 58 \cdot \exp\{-13,9\} \approx 5 \cdot 10^{-5},$$

а для випадку $T = 1000$ К

$$\left(\frac{n_{\text{II}}}{n_{\text{I}}}\right)_{1000} = (15)^{3/2} \cdot \exp\left\{-\frac{0,35}{0,0862}\right\} \approx 58 \cdot \exp\{-4,05\} \approx 1.$$

При цьому враховано, що $kT = 0,0259$ еВ при $T = 300$ К і $kT = 0,0862$ еВ при $T = 1000$ К. Таким чином, при кімнатній температурі число електронів в зоні II нехтовно мале порівняно з числом електронів в зоні I, а значить провідність

$$\sigma_n(300) \approx en_1(300) \cdot u_1.$$

При $T = 1000$ К число електронів в зонах I і II вже приблизно однакове і

$$\begin{aligned} \sigma_n(1000) &= en(1000) \cdot u_1 + en_{\text{II}}(1000) \cdot u_{\text{II}} \approx \\ &\approx en_1(1000) \cdot (u_1 + u_{\text{II}}). \end{aligned}$$

Тоді відношення провідностей

$$\frac{\sigma_n(1000)}{\sigma_n(300)} = \frac{n_1(1000)}{n_1(300)} \left(1 + \frac{u_{\text{II}}}{u_1}\right).$$

Згідно умови задачі повна концентрація електронів не залежить від зміни температури і є сталою, а тому

$$n_I(300) + n_{II}(300) = n_I(1000) + n_{II}(1000),$$

або

$$n_I(300) \approx 2n_I(1000).$$

Тоді отримаємо кінцевий результат:

$$\frac{\sigma_n(1000)}{\sigma_n(300)} \approx \frac{1}{2}.$$

Висновок. 1. Електропровідність n -GaAs при підвищенні температури від 300 К до 1000 К зменшується приблизно удвічі, що не зовсім узгоджується із нашим загальним представленням про залежність електропровідності напівпровідників від температури.

2. Отриманий в задачі результат пояснюється тим, що з ростом температури електрони із зони I, де рухливість більша, “переливаються” в зону II, де рухливість менша. Іншими словами, з ростом температури (те ж саме має місце і при збільшенні електричного поля в зразку) збільшується число малорухливих електронів, що і обумовлює N -подібну вольтамперну характеристику n – GaAs.

Задача 10.11. Пластинку із напівпровідника p -типу, ширина якого $b = 1$ см, а довжина $l = 5$ см, розташували в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 0,5$ Тл. До кінців пластини (вздовж ребра, розмір якого l) приклали постійну напругу $U = 10$ В. При цьому холлівська різниця потенціалів дорівнює $U_H = 5 \cdot 10^{-2}$ В. Питомий опір напівпровідника $\rho = 0,025$ Ом·м. Визначити постійну Холла, концентрацію і рухливість дірок.

Розв’язок. Починати розв’язування задачі необхідно з аналізу рис.10.6. Нехай магнітне поле направлене вздовж осі Z , а струм протікає вздовж осі X . Тоді дірки рухаються вздовж осі X із швидкістю $v_p = u_p \cdot E_x$, де E_x – напруженість електричного поля вздовж осі X , яка дорівнює U/l . В магнітному полі на дірку, що

рухається, діє сила Лоренца $\vec{F}_p = e\vec{v}_p \times \vec{B}$, яка направлена вздовж осі Y . Ця сила відхиляє дірки від прямолінійного напрямку руху, внаслідок чого виникає поперечна складова (паралельна осі Y) електричного холлівського поля E_H , величина якої знаходиться із умови:

$$eE_H = |\vec{F}_p| = ev_p B.$$

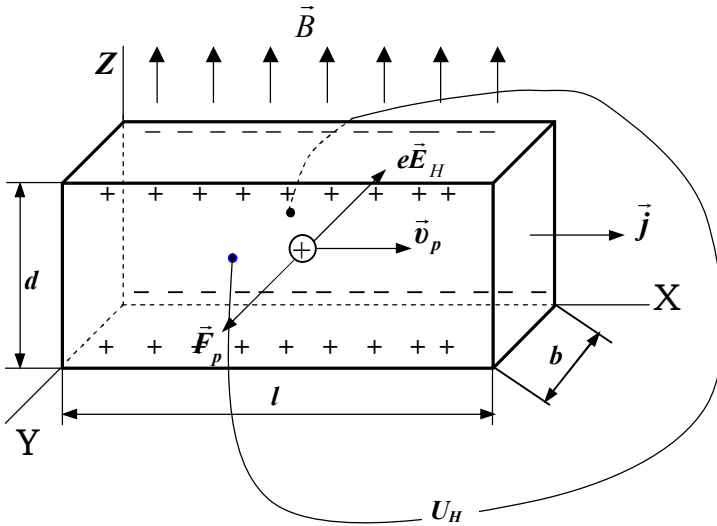


Рис. 10.6. Ефект Холла в напівпровідниках. \vec{j} - густина струму, що протікає через зразок

Звідки

$$E_H = v_p B.$$

Дві протилежно заряджені площини зразка можна розглядати, як пластини плоского конденсатора, різниця потенціалів між якими $U_H = E_H \cdot b = v_p Bb$ отримала назву холлівської. Якщо врахувати, що $j = ev_p$, то $U_H = R_H Bbj$, де $R_H = 1/(ep)$ носить назву постійної Холла.