НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ УКРАИНЫ
«КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»

Проф. А.А.Снарский

НУ О-О-ОЧЕНЬ КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Ч.I «Механика и специальная теория относительности»

Предлагаемый студентам материал является очень кратким **конспектом** по курсу общей физики. В связи с катастрофическим уменьшением количества часов отводимых на чтение лекций, интенсивность последних значительно возросла. Лектору, как минимум, необходимо:

1.выписать на доске все вычисления,

2.нарисовать необходимые рисунки с обозначениями,

3.прокомментировать вычисления,

4.проанализировать полученные выводы и указать на их место в материале.

Недостаток времени приводит к тому, что удается осуществить только первые два пункта. **Конспект** предназначен для сокращения времени, которое тратится на списывание с доски, позволяя тем самым обсудить и проанализировать рассматриваемый материал. Этот **конспект** ни в коем случае не следует рассматривать как «книжку для чтения». Правильно понимать его как заготовку для слушания лекций.

Я благодарен И.Алексейчуку (КМ-23), взявшему на себя большой труд по электронному оформлению версии этого **конспекта**. Естественно, за все погрешности отвечает автор.

В связи с интенсификацией коммерциализации обучения считаю необходимым заявить, что **конспект** является свободно распространяемым продуктом, его можно копировать и распечатывать всем, и в любом количестве.

Профессор кафедры общей и теоретической физики,
доктор физ.-мат.наук

А.Снарский

МЕХАНИКА

ТЕМА 1. Кинематика

1. ЗАДАЧИ ФИЗИКИ. Физические величины и их измерение. Единицы измерения, системы единиц.
   π – теорема.

π – теорема.

1) Размерность физических величин может быть только произведением размерностей основных величин

$$[\mathrm{A}] = \left[m^{\alpha} l^{\beta} t^{\gamma}\right] \quad \text{или} \quad кг^{\alpha} м^{\beta} с^{\gamma}$$

2) Из уравнения $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ следует $[\mathrm{A}] = [B]$

Примеры:

1) Энергия атомного взрыва (*Taylor G.I. “The formation of a blast wave by intensive explosion” II The Atomic Explosion of 1945*, Prog.Roy.Soc.1950, A201,159)

r=r(E,t, $_0$) $_0$ – начальная плотность воздуха

$$[E] = ML^2T^{-2}, \quad [t] = T, \quad [\rho_0] = ML^{-3}, \quad [r] = M$$

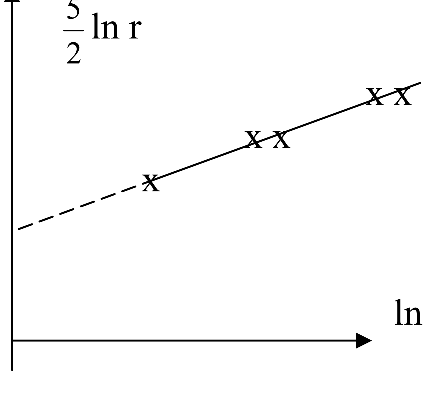
$$\mathrm{r} = E^{\alpha} t^{\beta} \rho_0{}^{\gamma}$$

$$L = M^{\alpha} L^{2\alpha} T^{-2\alpha} T^{\beta} M^{\gamma} L^{-3\gamma}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma \\ 1 &= 2\alpha - 3\gamma \\ 0 &= -2\alpha + \beta \end{aligned}\right\} \qquad \alpha = 1/5, \quad \gamma = -1/5, \quad \beta = 2\alpha = 2/5$$

$$r = C\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{1/5}$$

$$\frac{5}{2}\ln\left(\mathrm{C}\mathrm{E}^{1/5}\rho_0{}^{-1/5}\right) + \ln t, \quad \mathrm{C} \approx 1$$



$\mathrm{E} \approx 10^{14}$ *Дж*

x x - по данным фильма

2) Давление в центре Земли

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathrm{M}, \mathrm{g}, \mathrm{R}) \quad \text{или} \quad P = P(M, \gamma, R)$$

$$P = \sigma\left(\frac{M}{R^2}\right)^3 \approx 14 \cdot 10^{11}\, Па \approx 10^6\, атм, \quad \text{“точное” значение} \approx 4 \cdot 10^{11}\, Па$$

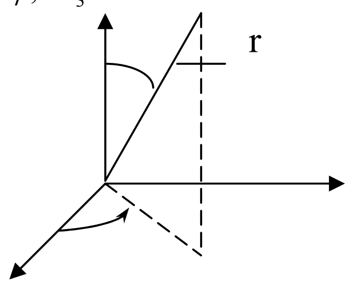
2. Системы координат и отсчета.
3. Элементы мат. аппарата механики. Диф. и интегр.
4. Перемещение, скорость, ускорение.

В координатной форме $\{x_1, x_2, x_3\}$

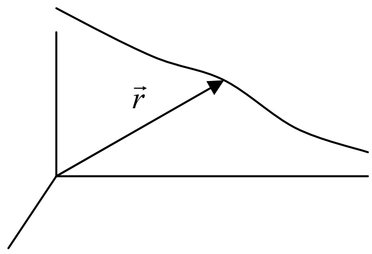
Декартова система координат $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$

Цилиндрическая система координат $x_1 = \rho,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = z$

Сферическая система координат $x_1 = r_1,\ x_2 = \varphi,\ x_3 = \theta$



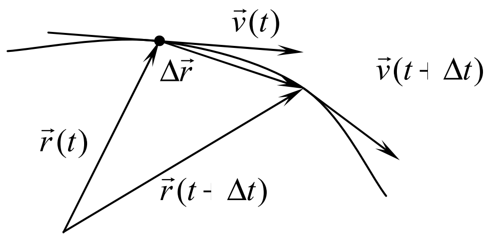
В векторной форме $\vec r = \vec r(t)$



С помощью параметров траектории

S=At

2. ВЕКТОР ПЕРЕМЕЩЕНИЯ



$$\Delta\vec r = \vec r(t+\Delta t) - \vec r(t)$$

$$\vec v_{cp}(t_1 t+\Delta t) \equiv \langle \vec v(t_1 t+\Delta t)\rangle = \frac{|\Delta\vec r|}{\Delta t}\frac{\Delta\vec r}{|\Delta\vec r|} = \frac{\Delta\vec r}{\Delta t}$$

<u>Скорость</u>

$$\vec v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt}$$

В декартовой системе координат:

$$\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t),$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ \ \mathrm{v}_{\mathrm{y}} = \frac{dy}{dt},\ \ldots$$

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \ \rightarrow \ \vec{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \underbrace{\frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}}_{1} = \vec{\tau}$$ – единичный вектор, касат. к траектории.

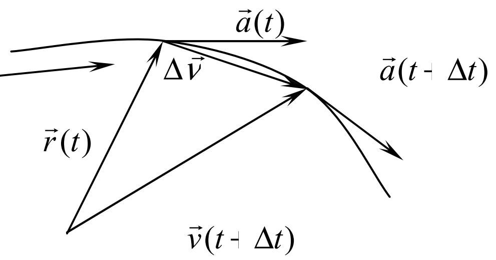
$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}| = v, \text{ т.о.}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\vec{\tau} \qquad\qquad \vec{v} = v\tau$$

А. УСКОРЕНИЕ

$$a(t, t+\Delta t) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

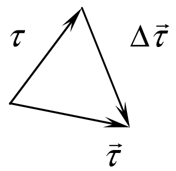
Годограф скоростей
(не траектория)



Сравни с аналогичным рисунком для скорости

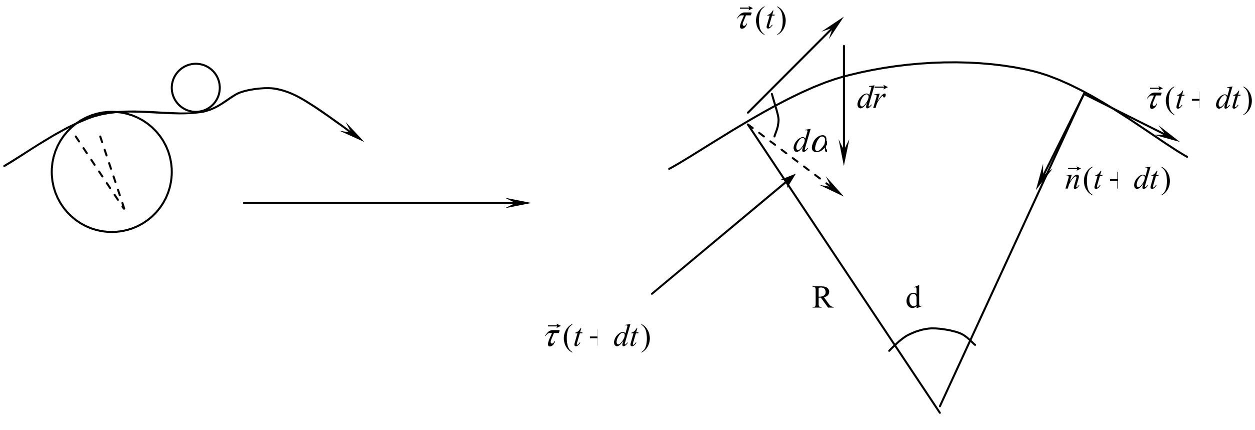
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta \vec{t}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{v}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt}$$



направление вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$

$$\frac{d(\tau^2)}{dt} = 2\tau\frac{d\tau}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{\tau}}{dt} \perp \vec{\tau} \qquad \frac{d\vec{\tau}}{dt} \parallel \vec{n} \qquad |\vec{n}| = 1$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}v \qquad d\vec{\tau} = \vec{n}\,|\,\vec{\tau}\,|\,d\alpha$$

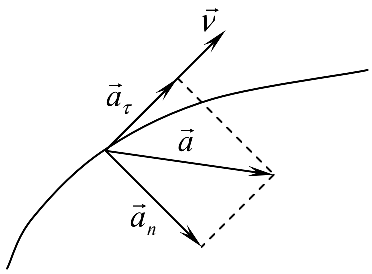
$$Rd\alpha = ds \qquad d\alpha = \frac{ds}{R}$$

$$d\vec{\tau} = \frac{\vec{n}}{R}ds \qquad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

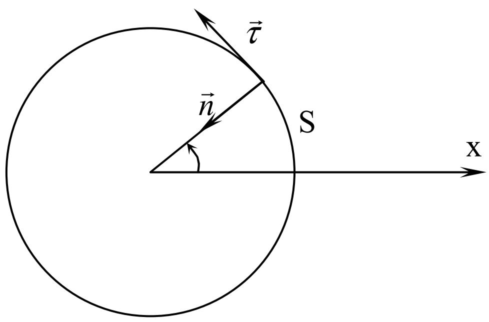
Т. о.

$$\vec{a} = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt} = \vec{n}\frac{v^2}{R} + \vec{\tau}\frac{dv}{dt} \equiv \vec{n}a_n + \vec{\tau}a_\tau$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}} \qquad \boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt}}$$



4. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПО ОКРУЖНОСТИ



$$S = R\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} \qquad \boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \omega \text{ – угловая скорость}}$$

$$v = \alpha R$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

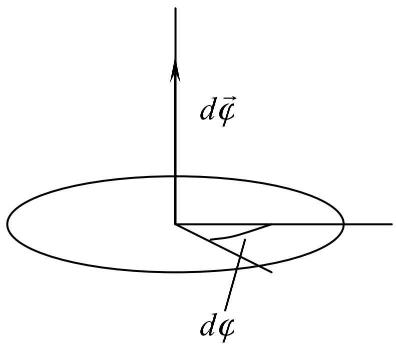
Угловое ускорение

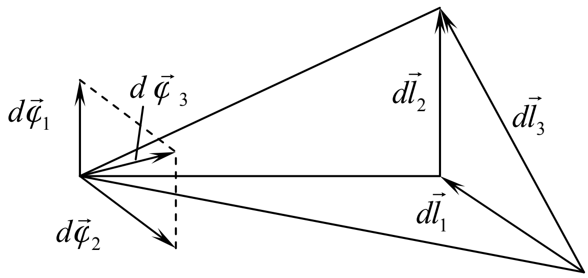
$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\omega$$

$$\varepsilon = \alpha \qquad \left(\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) \text{ – угловое ускорение}$$

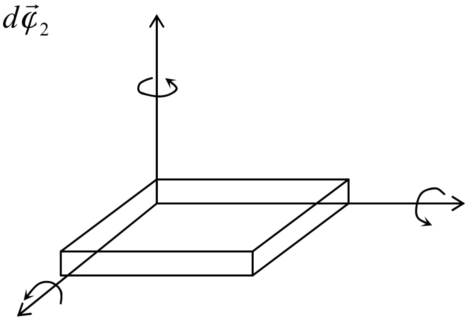
5.ВЕКТОРЫ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ

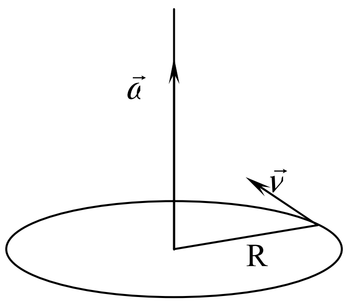




Т.к. $d\vec{l}_3 = d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2$, должно быть $d\vec{\varphi}_3 = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$

Поворот на конечный угол – не вектор.





$$\boxed{\vec{v} = \vec{a} \times \vec{R}}$$

Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{a} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}};$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

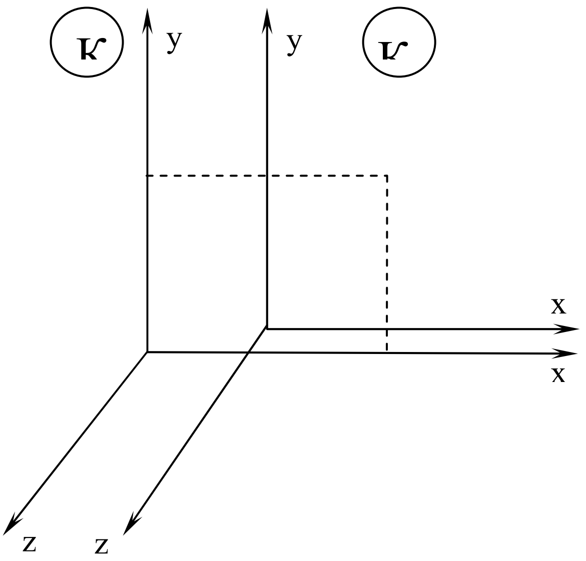
При неподвижной оси вращения

$\frac{d\vec{a}}{dt} \parallel$ оси вращения $\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{r}$ – касательная к траектории.

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{r}} \qquad \boxed{\vec{a}_n = \vec{a} \times \vec{n}}$$

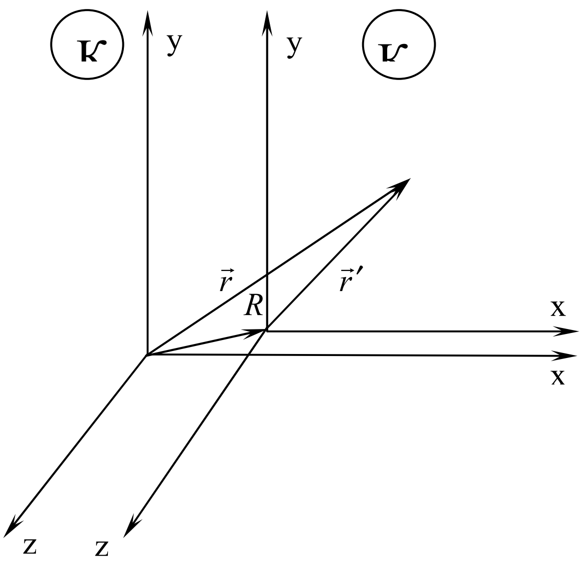
ТЕМА 2. ДИНАМИКА

1.Преобразования Галилея



$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}}$$

В общем виде



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (dt' = dt)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_c$$

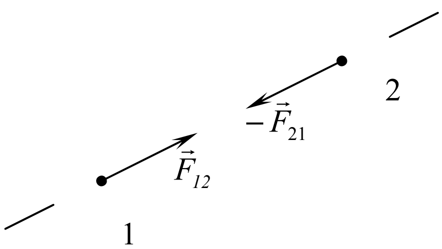
$T.o.$ $\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_c}$

Инварианты пр. Галилея

1). $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} = inv$

2). $\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = inv$

2.Законы Ньютона



I ИСО

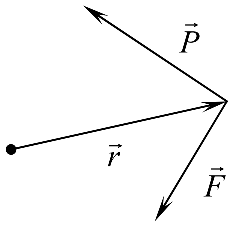
II $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

III $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Из III $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{12}$, $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{21} \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0$

Т.о. $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = const$ при отсутствии внешних сил.

3.Уравнения моментов для материальной точки



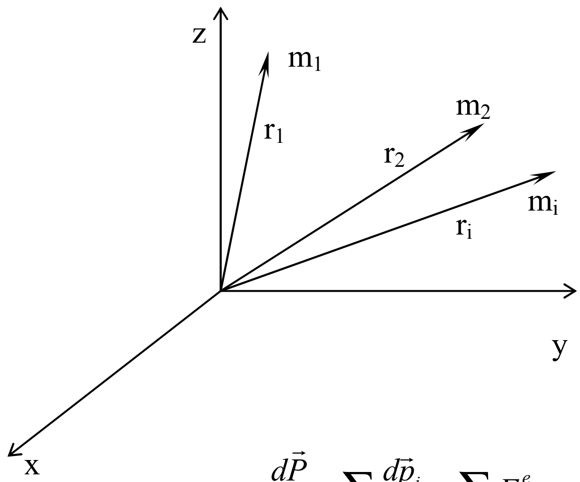
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \text{ - } \textit{момент импульса}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ - } \textit{момент силы}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{P}\right) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v}\times\vec{p}=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

4.Уравнение движения системы материальных точек



$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i$$

$$\vec{F}_i = \sum F^e{}_i + \sum_{i \neq j} \vec{f}_{ij}$$

↑ Внешние силы ↑ Внутренние силы

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i F_i^e + \underbrace{\sum_{i\neq j} \vec{f}_{ij}}_{\substack{\textit{из III закона} \\ \textit{Ньютона} = 0}}$$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum F_i^e$ или $\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}}$, $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^e$

Центр масс:

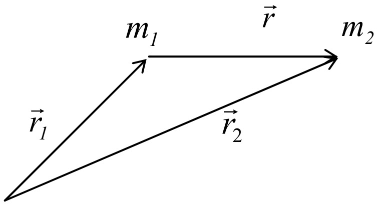
$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{m}\sum m_i \vec{r}_i\right)}_{\vec{R}_e},$$

где $m = \sum m_i$

$$\boxed{\vec{R}_c = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{r}_i}$$

$\vec{P} = m\frac{d\vec{R}_c}{dt}$, $\boxed{m\frac{d^2\vec{R}_e}{dt^2} = \vec{F}}$

Приведенная масса



Действуют только $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\underbrace{(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}_{\vec{r}}=\vec{F}_{21}\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)$$

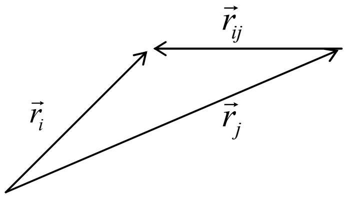
$$\boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_{21}} \qquad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

5.Уравнение моментов системы материальных точек

$\vec{P}=\sum\vec{p}_i$, $\vec{L}=\sum\vec{L}_i=\sum\vec{r}_i\times\vec{p}_i$, $\vec{M}=\sum\vec{M}_i=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i$, $\vec{F}_i=\vec{F}_i^{\,e}+\sum\limits_{i\neq j}\vec{f}_{ij}$ (III з.Н. $\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$)

Суммируем моменты внутренних сил попарно

$$\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}+\vec{r}_j\times\vec{f}_{ji}=\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij}-\vec{r}_j\times\vec{f}_{ij}=\underbrace{(\vec{r}_i-\vec{r}_j)}_{\vec{r}_{ij}\,\|\,\vec{f}_{ij}}\times\vec{f}_{ij}=0$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times\vec{p}_i+\sum\vec{r}_i\times\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum\underbrace{\vec{v}_i\times\vec{p}_i}_{=0}+\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i=$$

$$\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{\,e}=\vec{M}$$

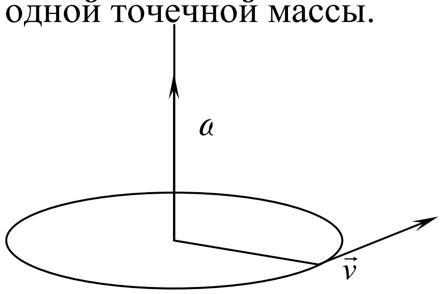
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}} \qquad \boxed{\vec{M}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{\,e}}$$

6. Динамика твёрдого тела (с закреплённой точкой вращения или осью вращения)

6-ть степеней свободы(3 координаты ц.м. + 3 вращения) – 6-ть уравнений.

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}}$$

Для одной точечной массы.



$F\cdot r=M \qquad r\cdot p=L$

$$\frac{dL}{dt}=\frac{d}{dt}(r\cdot p)=\frac{d}{dt}(r\cdot m\cdot v)=$$

$$=mv\frac{dv}{dt}=(v=\omega\cdot r)=mr^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt}=M\rightarrow\underbrace{mr^2}_{J-\text{момент инерции}}\frac{da}{dt}=M$$

Тензор момента инерции.

$\vec{a}$ – мгновенная угловая скорость

$\vec{v}_i=\vec{a}\times\vec{r}_i$

$$\vec{L}=\sum \vec{r}_i\times\vec{p}_i=\sum m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i=\sum m_i\vec{r}_i\times(\vec{v}_i\times\vec{r}_i)=\vec{\omega}\sum m_i\vec{r}_i^{\,2}-\sum m_i\vec{r}_i\times(\vec{v}_i\times\vec{r}_i)$$

$$\vec{L}=\vec{\omega}\sum m_i\vec{r}_i^{\,2}-\sum m_i\vec{r}_i\times(\vec{v}_i\times\vec{r}_i)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_x=\vec{\omega}_x\sum m_i(x_i^{\,2}+y_i^{\,2}+z_i^{\,2})-\sum m_i x_i(\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)\\ \vec{L}_y=\dots\\ \vec{L}_z=\dots\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_x=\vec{\omega}_x\sum m_i(\vec{r}_i^{\,2}-\vec{x}_i^{\,2})-\vec{\omega}_y\sum m_i\vec{x}_i\vec{y}_i-\vec{\omega}_z\sum m_i\vec{x}_i\vec{z}_i\\ \vec{L}_y=-\vec{\omega}_x\sum m_i\vec{y}_i\vec{x}_i+\vec{\omega}_y\sum m_i(\vec{r}_i^{\,2}-\vec{y}_i^{\,2})-\vec{\omega}_z\sum m_i\vec{y}_i\vec{z}_i\\ \vec{L}_z=-\vec{\omega}_x\sum m_i\vec{z}_i\vec{x}_i-\vec{\omega}_y\sum m_i\vec{z}_i\vec{y}_i+\vec{\omega}_z\sum m_i(\vec{r}_i^{\,2}-\vec{z}_i^{\,2})\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{L}_x=J_{xx}\omega_x+J_{xy}\omega_y+J_{xz}\omega_z\\ \vec{L}_y=J_{yx}\omega_x+J_{yy}\omega_y+J_{yz}\omega_z\\ \vec{L}_z=J_{zx}\omega_x+J_{zy}\omega_y+J_{zz}\omega_z\end{array}\right\}\text{или}\begin{pmatrix}L_x\\ L_y\\ L_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{xx}J_{xy}J_{xz}\\ J_{yx}J_{yy}J_{yz}\\ J_{zx}J_{zy}J_{zz}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

или

$$\boxed{\vec{L}=\hat{J}\,\vec{a}}$$

$\hat{J}$ – тензор момента инерции

$\hat{J}$ – симметричный тензор

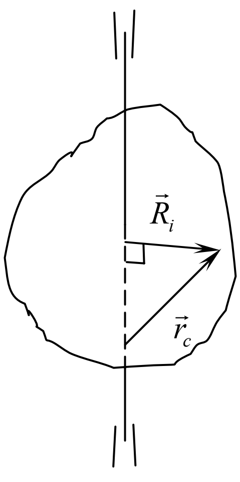
$J_{ij}=J_{ji}$

Т.о. можно привести к диагональному виду в главных осях

$$\hat{J}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_2&0\\0&0&J_3\end{pmatrix}$$

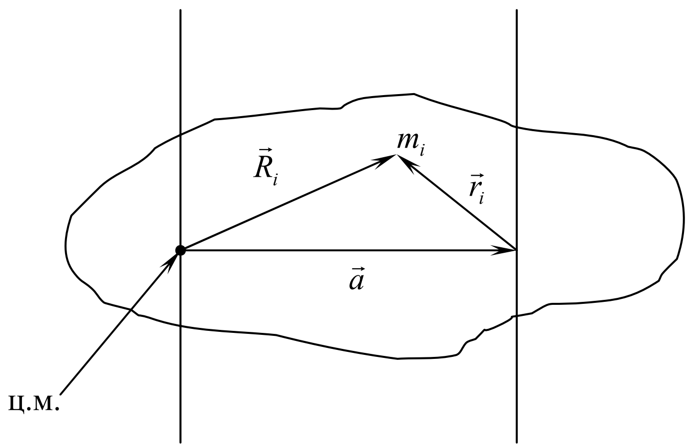
Центральные главные оси – проходят через ц.м.

Момент инерции относительно оси(осевой мом. инерции)



$$J=\sum m_i(r_i^{\,2}-z_i^{\,2})=\sum m_iR_i^{\,2}$$

Теорема Гюйгенса – Штайнера



$\vec{a}+\vec{r}_i=\vec{R}_i$

$J_0=\sum m_i\vec{R}_i^{\,2}$

$J=\sum m_i\vec{r}_i^{\,2}$

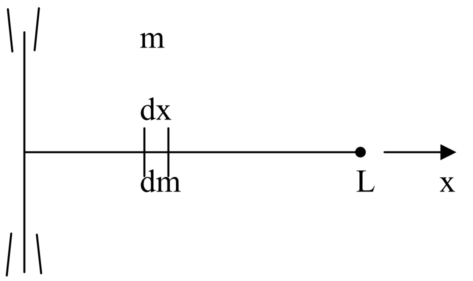
$\vec{r}_i=\vec{R}_i-\vec{a}$

$$J=\sum m_i\vec{r}_i^{\,2}=\sum m_i(\vec{R}_i-\vec{a})^2=\sum m_iR_i^{\,2}+a^2\underbrace{\sum m_i}_{m}-2\vec{a}\underbrace{\sum m_iR_i}_{\substack{=0,\text{т.к. ось проходит}\\ \text{через ц.м.}}}$$

Т.о. $\boxed{J=J_0+ma^2}$

Пример вычисления моментов инерции

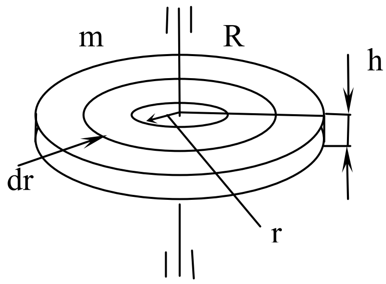
1) Стержень



$$J=\sum m_ix_i^{\,2}\to\int x^2dm\Rightarrow dm=\frac{m}{l}dx$$

$$\Rightarrow\frac{m}{l}\int_0^l x^2dx=\frac{1}{3}ml^2$$

2) Диск

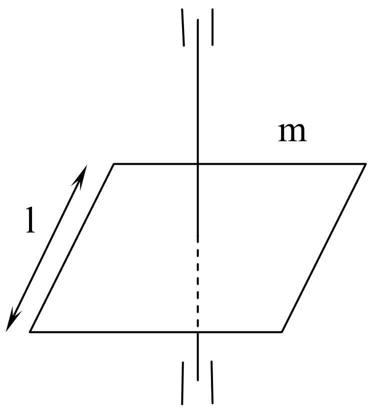


$$J=\int r^2dm$$

$$dm=\frac{m}{\pi R^2h}2\pi rdrh=\frac{2m}{R^2}rdr$$

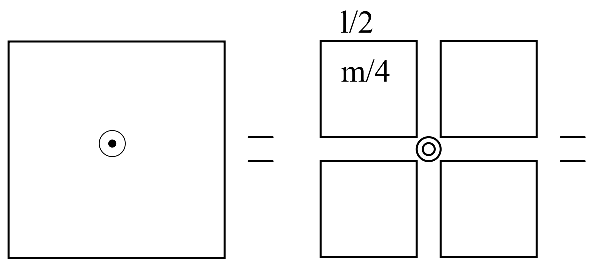
$$S=\frac{2m}{R^2}\int_0^R r^2rdv=\frac{1}{2}mR^2$$

3) Пример применения т. Гюйгенса-Штайнера – вычисления момента инерции квадратной пластины

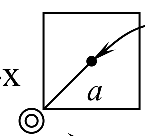


$J=\alpha ml^2$ -по размерности

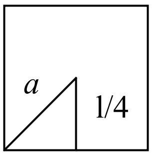
α - ?



= 4x



$\int_1$ -момент инерции относительно оси; $\int_2$ - момент инерции относительно оси;



$$J_2 = \alpha\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$ - по т. Г.-Ш. $$J_1 = J_2 + \frac{m}{4}a^2\ ,\quad a^2 = 2\left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$a^2 \to J_1\ ,\quad 4\cdot J_1 = J$$ или $$4\left[\alpha\frac{m}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{4}\cdot 2\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^2\right] = \alpha m l^2$$

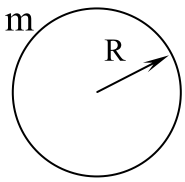
откуда $\alpha = 1/6$ $\qquad J = \frac{1}{6}ml^2$

4) момент инерции шара

Заметим, что $J_x + J_y + J_z = 2\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) = 2\sum m_i r_i^2 = 2\theta,\quad \theta = \sum m_i r_i^2$,

θ легко найти :

$$\theta = \sum m_i r_i^2 \to \int 4\pi r^2 dr\rho r^2 \Rightarrow \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow 4\pi\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{3m}{R^3}\frac{1}{5}R^4 = \frac{3}{5}mR^2$$



для шара $J_x = J_y = J_z = J_{шара}$,

так как $J_x + J_y + J_z = 2\theta$,

$$3J_{шара} = 2\theta = \frac{2\cdot 3}{5}mR^2 \qquad \boxed{J_{шара} = \frac{2}{5}mR^2}$$

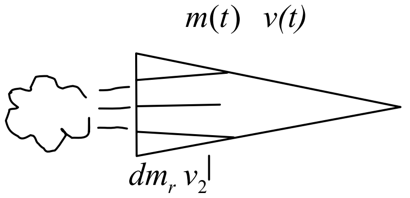
Тема 3 <u>Законы сохранения</u>

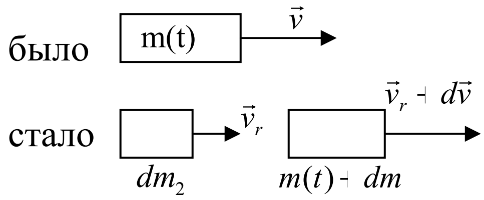
1. Закон сохранения импульса

Если $\vec F = \sum \vec F_i^{(e)} = 0$, то $\frac{d\vec p}{dt} = 0$, $\vec p = \sum \vec p_i = const$

и отдельно для компонент из $F_x = 0$ – $p_x = const$.

Пример применения - движение тел с переменной массой





$dm_r = -dm$

$$d\vec p = \vec F dt \qquad \left((m+dm)(\vec v + d\vec v) + dm_r \cdot \vec v_r\right) - (m\vec v) = \vec F dt$$

стало было

$$\cancel{m\vec v} + m d\vec v + \vec v dm + \overbrace{dm_r}^{-dm}\vec v_r - \cancel{m\vec v} = \vec F dt$$

Введем скорость газов относительно ракеты

$$\vec v_{2/p} = \vec v_{2/3} + \vec v_{3/p} = \vec v_{2/3} - \vec v_{p/3}$$

обозначим $\vec v_0$ $\vec v_2$ $\vec v$

$$\vec v_0 = \vec v_2 - \vec v, \qquad \vec v_2 = \vec v_0 + \vec v,$$

$$m d\vec v + \cancel{\vec v dm} - dm(\vec v_0 + \cancel{\vec v}) = \vec F dt$$

$$m d\vec v - \vec v_0 dm = \vec F dt$$

$$\boxed{m\frac{d\vec v}{dt} = \vec v_0 \frac{dm}{dt} + \vec F}$$ уравнение Мещерского

реактивная сила

часто обозначают $\frac{dm}{dt} = -\mu$, $\mu > 0$

$$\boxed{m\frac{d\vec v}{dt} = -\mu \vec v_0 + \vec F}$$

Частный случай: $\vec F = 0$, одномерное движение (вдоль оси Ox)

$m\frac{d\vec v}{dt} = +\mu \vec v_0$, так как $\vec v$ и $\vec v_o$ направлены в разные стороны

$m dv = -v_0 dm \qquad (\mu = -dm/dt)$

$$\frac{dv}{v_0} = -\frac{dm}{m}$$

$$v = -v_0 \ln m + c, \quad \underbrace{v_{(0)}}_{=0} = -v_0 \ln m_0 + c, \quad c = v_0 \ln m_0$$

$$v = v_0 \ln \frac{m_0}{m} \qquad \boxed{\frac{m_0}{m} = e^{v/v_0}}$$ формула Циолковского

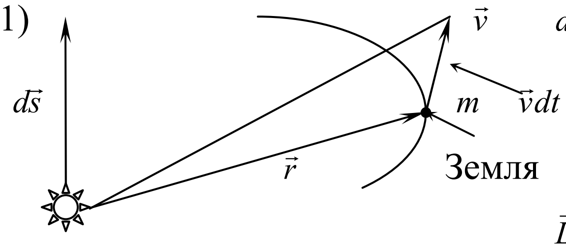
2. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = const$$

Частный случай $\quad M_x \neq 0, \quad M_y \neq 0, \quad M_z \neq 0 \quad - \quad L_z = const$

Примеры

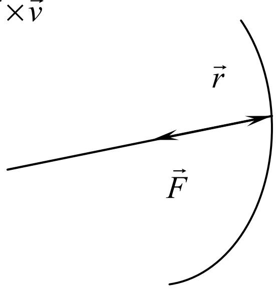
1)



$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}dt$$ (площадь треугольника)

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

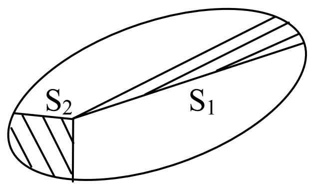
$$\vec{L} = 2m\dot{\vec{S}}$$



для центральных сил $\quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$$\left(\vec{r} \parallel \vec{F}\right)$$

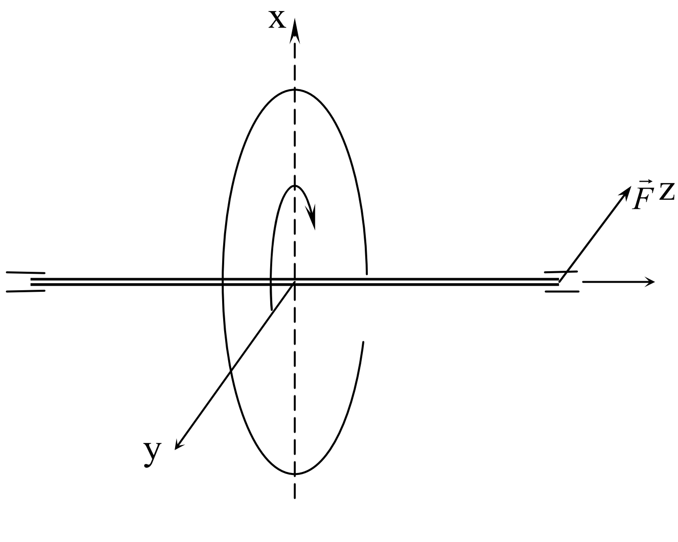
Таким образом, $\vec{L} = const \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{S}} = const$ -за равное время радиус-вектор заметает равные площади



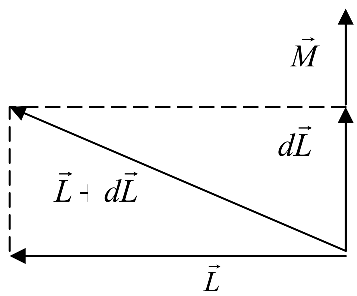
$$S_1 = S_2$$

2) Гироскоп

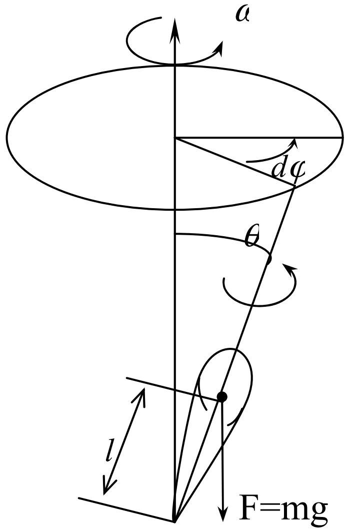
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

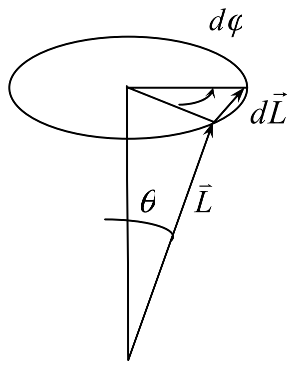


Попытка повернуть ось гироскопа вокруг Ox приводит к повороту вокруг Oy



прецессия гироскопа –





$$F = mg$$
$$M = mgl\sin\theta$$
$$dL = Mdt$$

$$dL = L\cdot\sin\theta\cdot d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\theta}, \quad L = Jw_0$$

$$w = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL/dt}{L\sin\theta} = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgl\cancel{\sin\theta}}{L\cancel{\sin\theta}} = \frac{mgl}{Jw_0}$$

$$\frac{w}{w_0} = \frac{mgl}{Jw_0^2}\ , \qquad w << w_0 \ \rightarrow \ mgl << Jw_0^2\ ,\ U_{пот} << K$$

3. Закон сохранения энергии

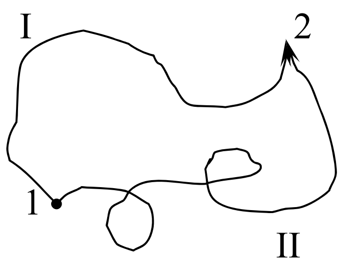
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \rightarrow \quad m\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\vec{v}, \qquad \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right), \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow \quad \boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot d\vec{r}} \quad \text{или} \quad \boxed{dK = \delta A}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}, \qquad A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \int_1^2 F\cos\alpha dr$$

4. Потенциальная энергия, консервативные силы

Пусть $A_I = A_{II}$, то есть



$$\int\limits_{\substack{I\\1\to2}} \vec{F}d\vec{l} = \int\limits_{\substack{II\\1\to2}} \vec{F}d\vec{l}, \ \textit{из} \int\limits_{\substack{II\\1\to2}} = -\int\limits_{\substack{II\\2\to1}} \ \textit{имеем}$$

$$\int\limits_{\substack{I\\1\to2}} + \int\limits_{\substack{II\\2\to1}} = 0 \quad \textit{т.к.} \quad \boxed{\oint \vec{F}d\vec{l} = 0}$$

Если $\oint \vec{F} d\vec{l} = 0$, то можно ввести $U(\vec{r})$;

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right)}_{dU} = -dU$$

$$\vec{F} d\vec{r} = -\, dU$$

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\int_1^2 dU = -(U_2 - U_1) \textit{ не зависит от формы пути.}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -(U_2 - U_1) \quad \textit{или}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} + U_2 = \frac{mv_1^2}{2} + U_1 \qquad \underbrace{\frac{mv^2}{2} + U(\vec{r})}_{E\text{-полн. мех. енергия}} = const$$

нормировка U U+C **C** – произв. константа.

Пример U – гравитационное взаимодействие

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{F} d\vec{l} = -G\frac{Mm}{r^2} \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} dl}_{\vec{n} \cdot d\vec{l} = \cos\alpha dl} =$$

$$= -G\frac{Mm}{r^2} dl \cos\alpha = -G\frac{Mm}{r^2} dr,$$

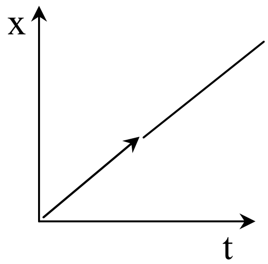
то есть только изменение $|\vec{r}|$, а не $\vec{r}$

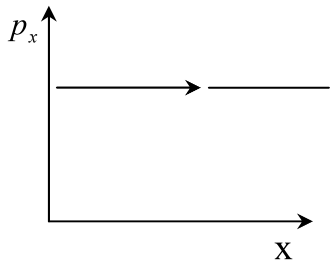
$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = -GMm \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

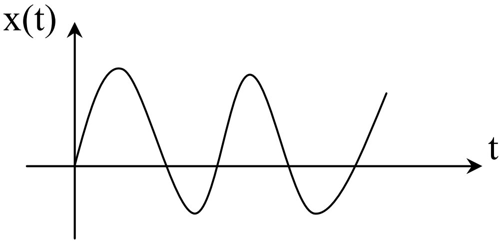
$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{r} + \mathbf{C}}$$ ← получить из этого выражения

$$U = mgh$$

5. Движение в одномерном потенциальном поле произвольной конфигурации. Фазовые траектории.







Гармонический осциллятор

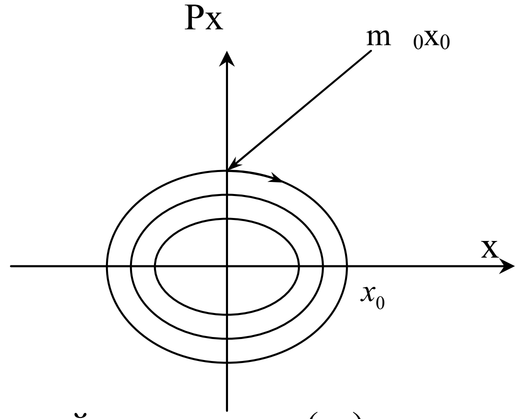
$$m\ddot{x} = F, \qquad F = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \frac{r}{m} = \omega_0^2$$

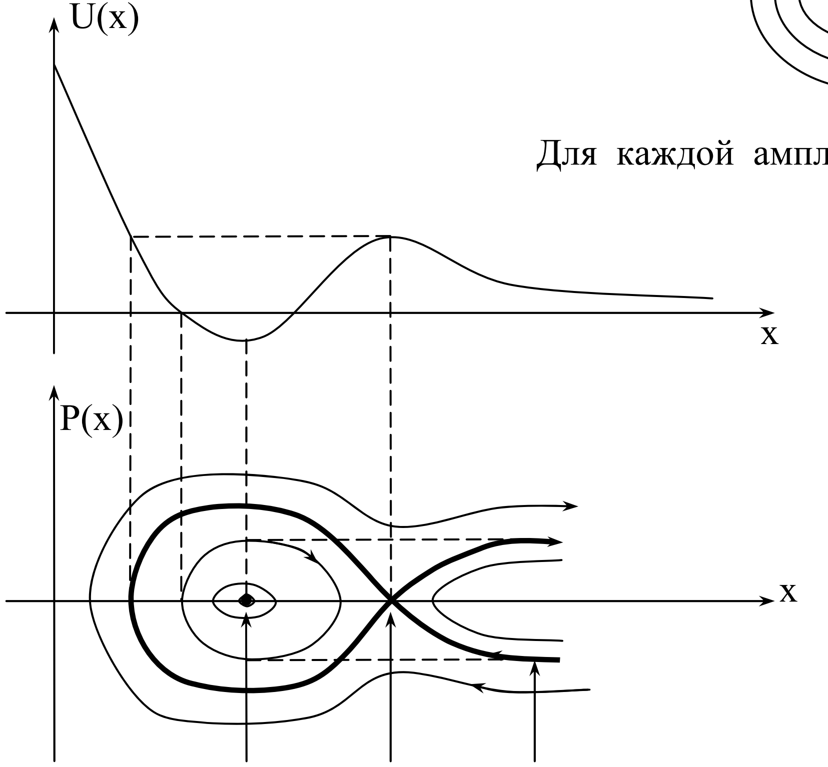
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$P_x = m\dot{x} = m\omega_0 x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

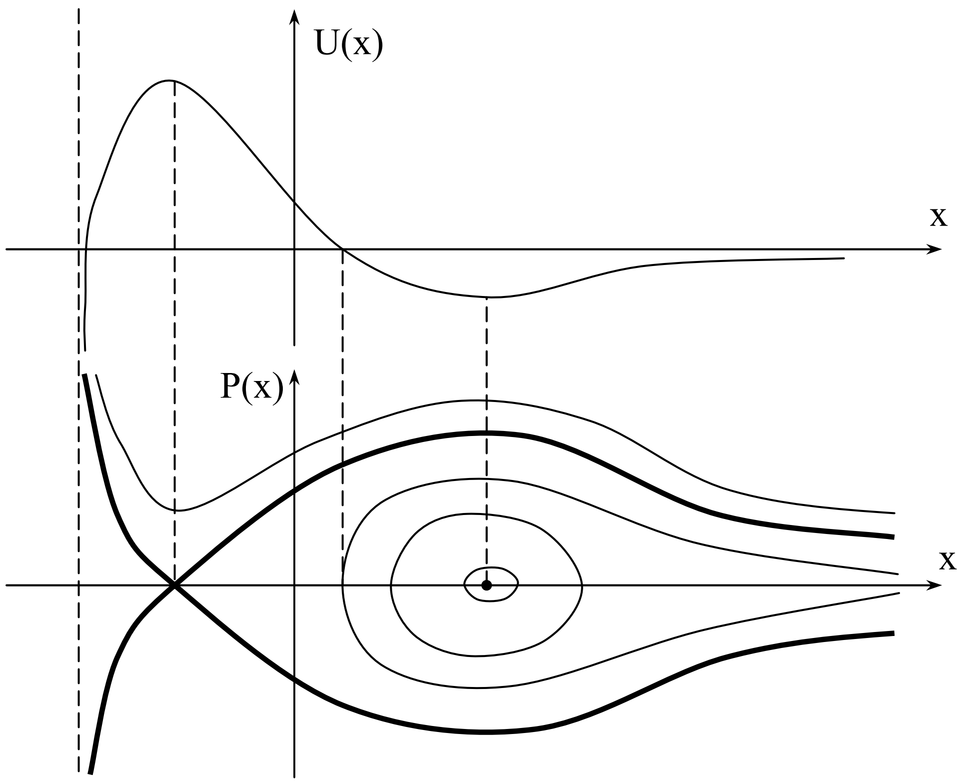
$$\frac{P_x^2(t)}{(m\omega_0 x_0)^2} + \frac{x^2(t)}{x_0^2} = 1$$

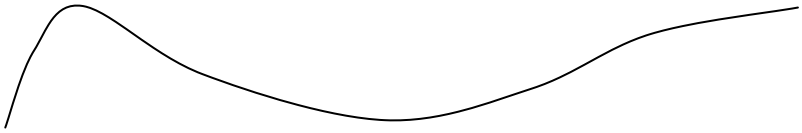


Для каждой амплитуды (x_0) своя траектория.



центр седло сепаратрисса



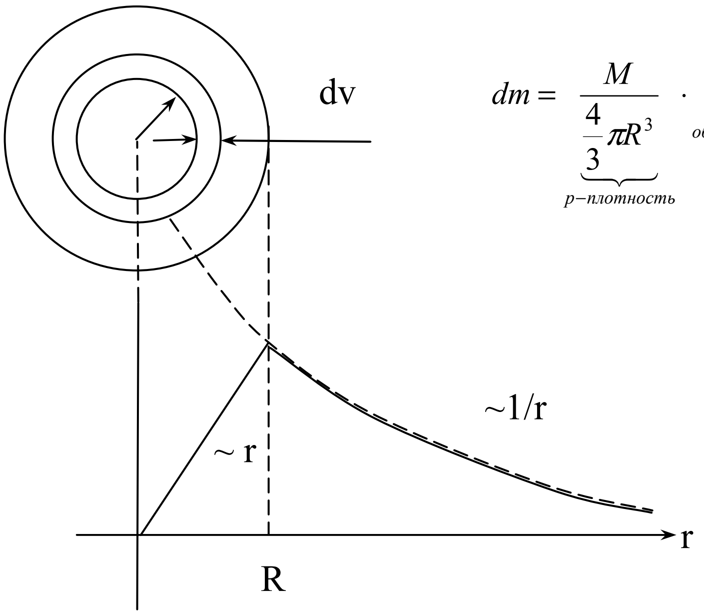


6. Гравитационное поле (как пример консервативных сил)

$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ – только для материальных точек,

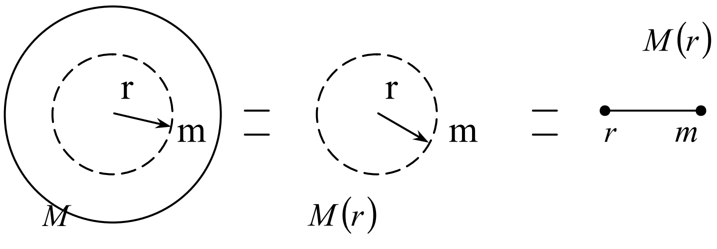
для сложных тел – $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$

M, R



$$dm = \underbrace{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\rho-\text{плотность}} \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{объем сферического слоя}} = \frac{3M}{R^3} r^2 dr$$

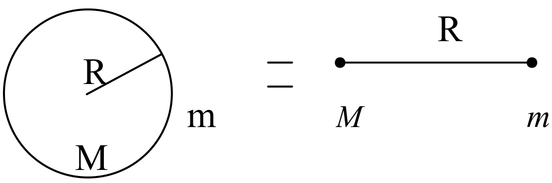
$r < R$



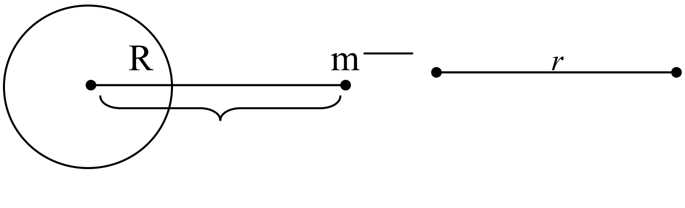
$$M(r) = \int_0^r dm = \frac{3M}{R^3}\int_0^r r^2 dr = \frac{M}{R^3} r^3$$

$$F(r<R) = G\frac{m \cdot M(r)}{r^2} = G\frac{mM}{R^3} r \qquad F(r<R) \sim r$$

$r = R$



$r > R$



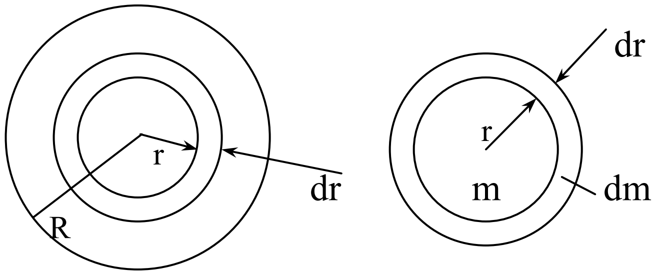
$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

M r — M m

$$F(r<R) \sim \frac{1}{r^2}$$

Гравитационная энергия шарового тела

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$



$$dU_{гр} = -G\frac{mdm}{r}$$

$$m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr$$

$$dU_{гр} = -G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 4\pi r^2 \rho dr}{r} = -G\frac{16}{3}\pi^2\rho^2 r^4 dr$$

$$U_{гр} = -G\frac{16}{3}\pi^2\rho^2\int_0^R r^2 dr = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

$$U_{гр} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}$$

Пример Лапласа

$$G\frac{M^2}{r_g} = MC^2 \qquad r_g = G\frac{M}{c^2}$$

$$r_g(Земли) = 0.4 \text{ см.}$$

Специальная теория относительности (СТО)

Литература:

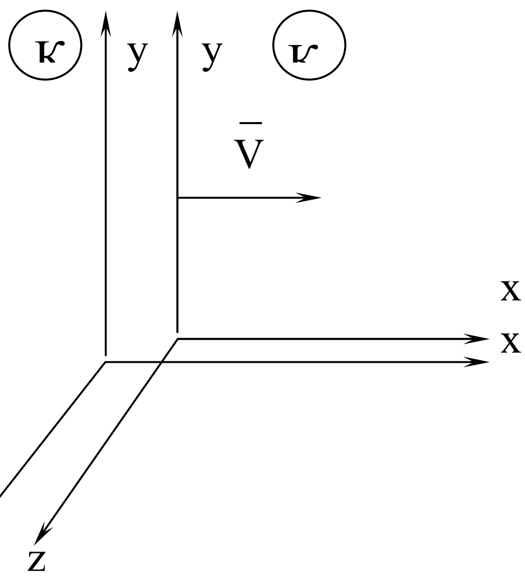
- Э. Тейлор, Дж. Уиллер «Механика и теория относительности»
- В. Паули «Теория относительности»
- Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц «Теория поля»

Дополнительная литература:
А.Н.Матвеев «Механика и теория относительности»

1. Исторический обзор.

1676 г. Рёмер – с.
Постоянство скорости света.
1727 г. Брадлей – аберрация света.
Мировой эфир и абсолютная скорость.
1881 г. Майкельсон и Морли.
1860 г. Физо.
1905 г. Эйнштейн.

2. Постулаты СТО и преобразования Лоренца.



В К $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ (*)
В К $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$

Требования к преобразованиям:

1) линейность;
2) при $V/_C$ 0 – переход к пр. Галилея.

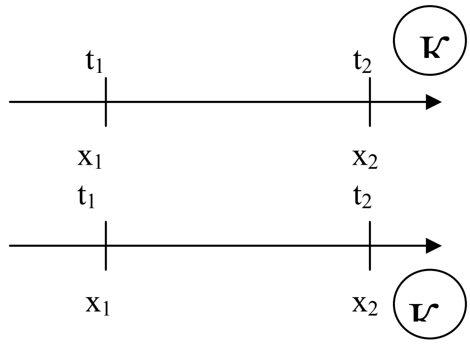
$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta t' \\ y &= \ldots \\ z &= \ldots \\ t &= \ldots \end{aligned}\right\}$$

Из 1), 2) и (*) получаем

$$\boxed{x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y, \quad z = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{(Преобразования Лоренца)}}$$

3. Следствие из правила Лоренца.

1). Понятие одновременности



$$x_1' = \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{\ }}\ ,\ x_2' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{\ }}$$

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{V}{c^2} t_1}{\sqrt{\ }}\ ,\ t_2' = \frac{t_2 - \frac{V}{c^2} t_2}{\sqrt{\ }}$$

пусть в К t1=t2 (одновременные события), то x1 x2

$$t_1' = t_2' - t_1' = \frac{V}{c^2}\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\ }} \neq 0, \qquad t\ 0$$

2). Относительность одновременности и причинность

при x2>x1 , t <0

при x2<x1 , t >0

может ли поменяться местами причина и следствие при переходе от К к К .

Потребуем, что бы причинность не нарушалась

$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v_{ВЛ}$ (скорость ВЛИЯНИЯ) , $t_2 < t_1$

$$\Delta t' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{\ }} = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{\ }}\left(1 - \frac{v}{c^2} v_{ВЛ}\right)$$

из $\Delta t > 0$ – $\Delta t' > 0$ и , таким образом, $1 - \frac{v}{c^2} v_{ВЛ} > 0$,

$\frac{v v_{ВЛ}}{c^2} < 1$ – $v_{ВЛ}$: c .

Примеры «движений» со скоростью больше c:

1) зайчик света,
2) ножницы

3) импульс света, проходящий через лазер

УФН, 1998, 168, №12.

4. Интервал и его инвариантность

Первое событие (x_1, y_1, z_1, t_1)

Второе событие (x_2, y_2, z_2, t_2)

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right] \quad \text{или} \quad s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2$$

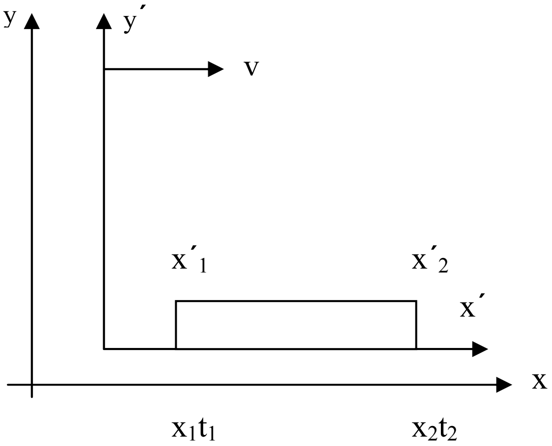
$$\boxed{s^2 = inv}$$

$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$

$s^2 < 0$ - пространственно подобный интервал (в k' $s = (\Delta r')^2$)

$s^2 > 0$ - времени подобный интервал (в k' $s'^2 = c^2(\Delta t')^2$)

5. Длина движущегося тела



$l_0 = x'_2 - x'_1$ собственная длина тела (неподвижного)

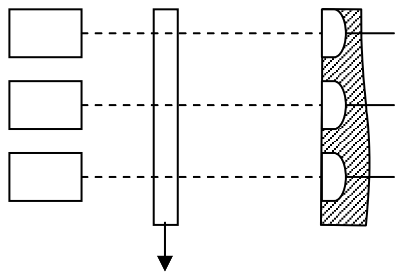
$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v\overbrace{(t_2 - t_1)}^{=0}}{\sqrt{}}$$

$t_2 = t_1$ (но не $t'_2 \geq t'_1$!)

$$\underbrace{x'_2 - x'_1}_{l_0} = \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{l}}{\sqrt{}}, \quad \boxed{l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

форма движущегося тела

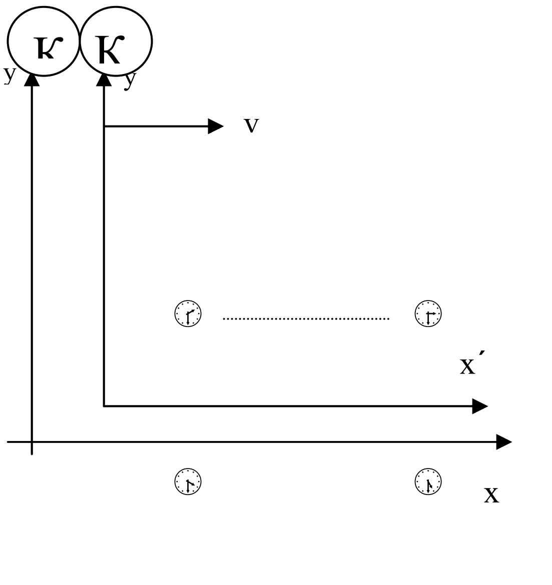
пример с лазерами



парадоксы : 1) бегун с шестом;

2) перепрыгивание через люк.

6. Замедление хода часов



$t'_2 - t'_1 = \Delta t_0$, $\quad x'_2 = x'_1$

$$t' = \frac{t \ominus \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{}} \quad - \quad t = \frac{t' \oplus \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{}}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + \frac{v}{c^2}\overbrace{(x' - x'_1)}^{0}}{\sqrt{}}, \quad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

парадокс близнецов
парадокс с μ-мезоном

7. Сложение скоростей в СТО

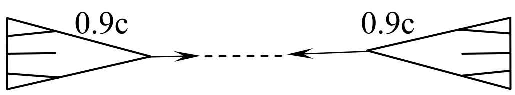
$$\left.\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} \end{aligned}\right\} \qquad\qquad \left.\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx}{dt} \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{}} \rightarrow dx = \frac{dx'+vdt'}{\sqrt{}} = dx'\frac{1+v\frac{dt'}{dx'}}{\sqrt{}} = dx'\frac{1+\frac{v}{u'_x}}{\sqrt{}}$$

$$dt = dt'\frac{1+\frac{v}{c^2}u'_x}{\sqrt{}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'}\frac{1+\frac{v}{u'_x}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} = \frac{u'_x+v}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}$$

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_xv}{c^2}}, \qquad u_y = u'_y\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}}, \qquad u_z = \dots}$$

из $u'_x = c$ получаем $u_x = c$ (постоянная скорости света)
пример с относительной скоростью ракет



8. Динамика СТО

1) Постулаты СТО (Л.Б.Окунь УФН, 1989,158, 3)

$$\boxed{\begin{aligned} &E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \\ &\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{u} \end{aligned}}$$

m – масса покоя (другой массы во «взрослой» физике не вводится)

Пример: движение частицы со скоростью света u=c

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \qquad p^2 = \frac{E^2}{c^4}\overbrace{u^2}^{=c^2} = \frac{E^2}{c^2}$$

при $u = c$ – $\mathrm{m} = 0$,

$$\underbrace{E^2 - \frac{E^2}{c^2}c^2}_{0} = \underbrace{m^2c^4}_{0} \quad \to \quad m = 0$$

только частица с $\mathrm{m} = 0$ может двигаться со скоростью света!

Пусть $\mathrm{m} \neq 0$

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2}u^2 \qquad E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

$\mathrm{E}^2(1 - \frac{u^2}{c^2}) = m^2c^4$ или $\boxed{E = \frac{\mathrm{m}c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{c^2}}}}$! под корнем не v (скорость одной СО,

а $\vec{u}$ -скорость частицы.

Переход к классической механике: $\mathrm{v}^2/c^2 \ll 1 \qquad \mathrm{u}^2/\mathrm{c}^2 \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + ..., \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{m}c^2}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{\mathrm{c}^2}}} \approx mc^2(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + ...), \qquad E \approx mc^2 + \frac{mu^2}{2}$$

2) Второй закон Ньютона

$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{p}}}{\mathrm{dt}} = \vec{F}$ «взрослая» форма $\equiv$ при переходе к «детской» форме отличие

обозначим $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathrm{u}^2}{c^2}}} = \gamma, \quad \frac{\vec{\mathrm{u}}}{\mathrm{c}} = \vec{\beta}, \quad \vec{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{u}}}{\mathrm{dt}}$

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{u} \cdot \gamma) = ...,\quad \vec{\mathrm{F}} = \mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}\gamma + \mathrm{m}\vec{\beta}(\vec{\beta}\vec{\mathrm{a}})\gamma^3$ или $\boxed{\vec{F} = \frac{ma}{\sqrt{\ }} + \frac{m\vec{u}(\vec{u} \cdot \vec{a})}{(\sqrt{\ })^3c^2}}$

и, соответственно, $\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}\gamma = \vec{\mathrm{F}} - \vec{\beta}(\vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\beta})$ или $\boxed{\frac{\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}}{\sqrt{\ }} = \vec{F} - \frac{\vec{u}(\vec{F} \cdot \vec{u})}{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$

Следствия : $\vec{\mathrm{a}} \nparallel \vec{F}$

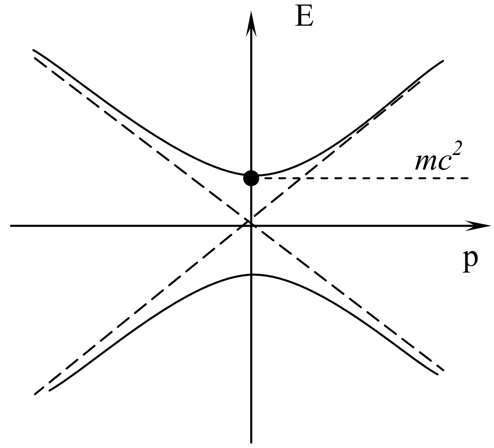
1) при $\vec{\mathrm{u}} \perp \vec{F}$ $\quad \vec{F} \cdot \vec{\beta} = 0$ и $\frac{m\vec{a}}{\sqrt{\ }} = \vec{F}$ (часто $\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ называют

релят. массой, но забывают, что это имеет очень ограниченный смысл, в частности только при $\vec{\mathrm{u}} \quad \vec{F}$)

2) при $\vec{u} \parallel \vec{F}$ $\qquad \dfrac{m\vec{a}}{(\sqrt{\ })^3} = \vec{F}$

3) Дисперсионное соотношение

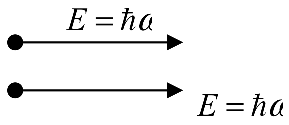
и античастицы



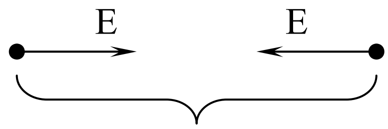
$$E^2 - \mathrm{p}^2c^2 = m^2c^4$$
$$E^2 = c^2(p^2 + m^2c^2)$$

$$E = \pm c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

P.S. Масса одного и двух фотонов



m=0



$$\boxed{m = \frac{2E}{c^2} \neq 0}$$