1.Электричество и магнетизм

Литература:

1. **Я.Б.Зельдович, А.Д. Мышкис «Элементы прикладной математики», гл.9 векторы гл. 10 теория поля;**
2. **ФЛФ т.5 «Электричество и магнетизм»,**
   Гл.2 Дифференциальное исчисление векторных полей,
   Гл.3 Интегральное исчисление векторных полей.

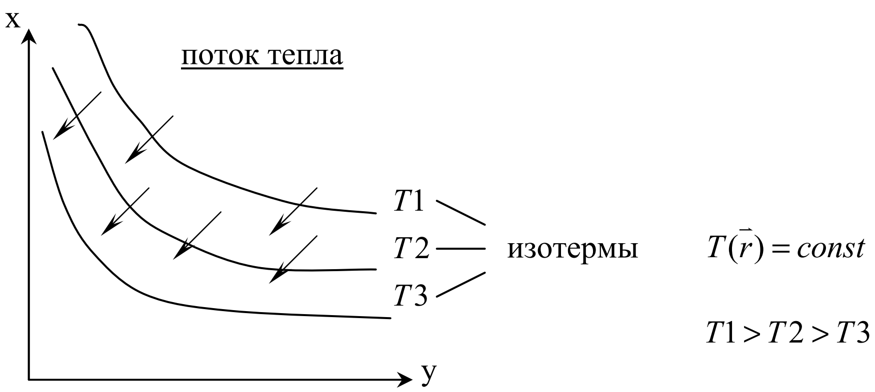
1.1 Дифференциальное исчисление векторных полей

Скалярное поле – $f\left(\vec{r}\right)$

Векторное поле – $\vec{A}\left(\vec{r}\right)$

Тензорное поле – $\hat{B}\left(\vec{r}\right)$

Пример скалярного поля – температурное поле $T(x, y, z)$



Скалярному полю соответствует векторное:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$$

$$gradT = \vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}$$

Оператор набла – ∇.

$$\nabla = \vec{i}\nabla_x + \vec{j}\nabla_y + \vec{k}\nabla_z = \vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial T}{\partial z}$$

∇ – дифференциальный векторный оператор.

$f(\vec{r})\nabla \neq \nabla f(\vec{r})$

$\nabla * скаляр = вектор$ – называется $grad$
$\nabla * вектор = скаляр$
$\nabla f = gradf$

$$\nabla A = divA$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}dx + \frac{\partial A_y}{\partial y}dy + \frac{\partial A_z}{\partial z}dz$$

$$\nabla\vec{B} = rot\vec{B}$$

$$rot\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}) + \vec{j}(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}) + \vec{k}(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y})$$

Вторые « производные » :

$$\nabla(\nabla f) = div\ gradf$$
$$\nabla(\nabla\vec{a}) = grad\ div\vec{a}$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a}) = rot\ rot\vec{a}$$
$$\nabla\times(\nabla f) = rot\ gradf \equiv 0$$
$$\nabla(\nabla\times\vec{a}) = div\ rot\vec{a} \equiv 0$$
$$(\nabla\nabla)\vec{a} = \nabla^2\vec{a}$$

Теорема 1. Если $rot\vec{A} = 0$, то $\vec{A} = grad\varphi$.

Теорема 2. Если $div\vec{B} = 0$, то $\vec{B} = rot\vec{F}$.

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} \to \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{c}) = \nabla(\nabla\vec{c}) - \nabla^2\vec{c} = grad\ div\vec{c} - \nabla^2\vec{c}$$

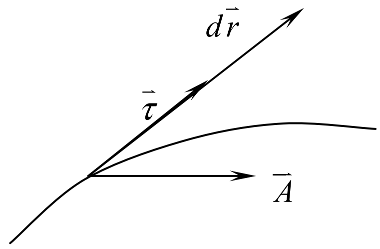
Подвох:

$(\vec{A}a)\times(\overline{A\ b}) = 0$ всегда

$(\nabla a)\times(\nabla b) \neq 0,$ т.к. вообще говоря,

$grad\ a \nparallel grad\ b$

<u>1.2 Интегральное исчисление векторов</u>



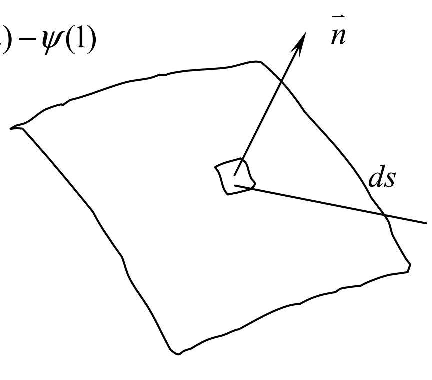
<u>Криволинейный интеграл</u>

$$C = \int\vec{A}d\vec{r} = \int\vec{A}\vec{\tau}dl = \int A_l dl$$

<u>Циркуляция</u> $C = \oint\vec{A}d\vec{r}$

Если $\vec{A} = grad\psi$, то:

$$C = \int_1^2\vec{A}d\vec{r} = \int_1^2 grad\psi d\vec{r} = \int_1^2 d\psi = \psi(2) - \psi(1)$$

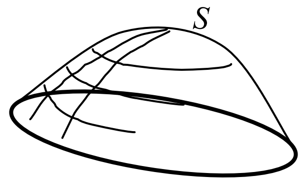


Поток векторного поля

$$= \int\vec{A}d\vec{s}, \quad d\vec{s} = \vec{n}\cdot ds$$

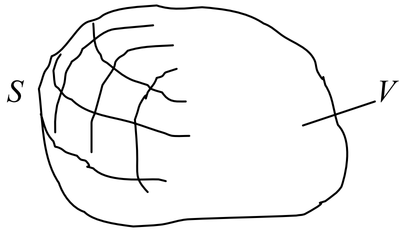
Теорема Стокса

$$\int_S rot\vec{A}d\vec{s} = \int_L \vec{A}d\vec{r}$$



Теорема Гаусса-Остроградского

$$\int_V div\vec{A}dV = \int_S \vec{A}d\vec{s}$$



1.3 Система уравнений Максвелла в дифференциальной и интегральной форме

Гаусс

$$\begin{cases} div\vec{D} = 4\pi\rho \\ \oint \vec{D}d\vec{s} = 4\pi q \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \oint \vec{B}d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \Phi = \int \vec{B}d\vec{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \oint Hdl = \frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{s} + \frac{4\pi}{c}J \end{cases}$$

СИ

$$\begin{cases} div\vec{D} = \rho \\ \oint \vec{D}d\vec{s} = q \end{cases}$$

$$\begin{cases} div\vec{B} = 0 \\ \oint \vec{B}d\vec{s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \\ \Phi = \int \vec{B}d\vec{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\ \oint Hdl = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{s} + J \end{cases}$$

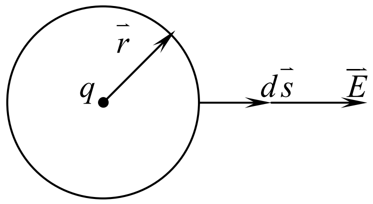
2. Электростатика

2.1. Теорема (закон) Гаусса

В вакууме: $\oint Eds = 4\pi q \quad (\textit{Гаусс}), \quad \oint Eds = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \quad (\textit{СИ})$

2.2. Примеры применения закона Гаусса

1) точечный заряд q



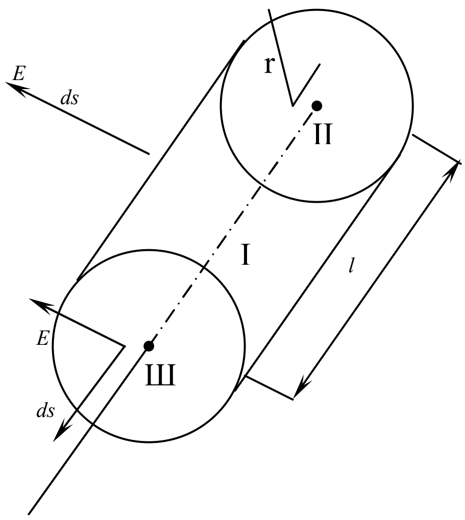
$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 4\pi q$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = \oint Eds = E \underbrace{\oint ds}_{4\pi r^2} = E \cdot 4\pi r$$

$$E \cdot 4\pi r = 4\pi q$$

$$E = \frac{q}{r^2} - \textit{закон Кулона}$$

2) электрическое поле прямой бесконечной равномерно-заряженной нити:

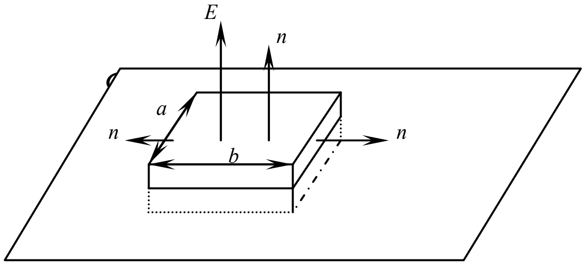


τ - линейная плотность заряда

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = \int_I + \int_{II} + \int_{III} = E \cdot 2\pi r l;$$

$$4 \cdot \pi \cdot q = 4 \cdot \pi \cdot \tau \cdot l; E \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l = 4 \cdot \pi \cdot \tau \cdot l; E = \frac{2 \cdot \tau}{r};$$

3) электрическое поле прямой бесконечной равномерно-заряженной плоскости:

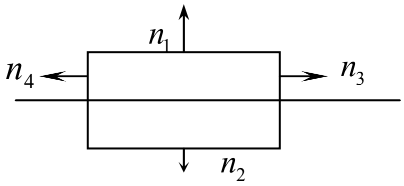


σ - поверхностная плотность заряда,

$$\oint \vec{E} d\vec{S} = 2 \cdot a \cdot b \cdot E; 4\pi q = 4\pi \cdot \sigma ab;$$

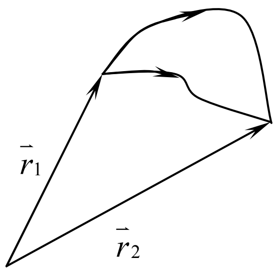
$$2ab \cdot E = 4\pi \cdot ab;$$

$$E = 2\tau;$$



Электростатический потенциал

Экспериментально установлено, что $\int\limits_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec E d\vec r$ не зависит от пути.



$$\varphi_{21} = -\int\limits_1^2 \vec E d\vec r$$

$[\varphi] = Вольт(Си)$, $\quad СГСЭq - стат.\ Вольт$

$$1B = \frac{1}{300} СГСЭq$$

$$\varphi_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = \int\limits_1^2 d\varphi, \quad \int\limits_1^2 d\varphi = -\int\limits_1^2 \vec E d\vec r$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \nabla\varphi \cdot d\vec r$$

$$E = -grad\varphi$$

Уравнение Пуассона:

$$divE = 4\pi\rho, \qquad E = -grad\varphi$$

$$div\ grad\varphi = -4\pi\rho$$

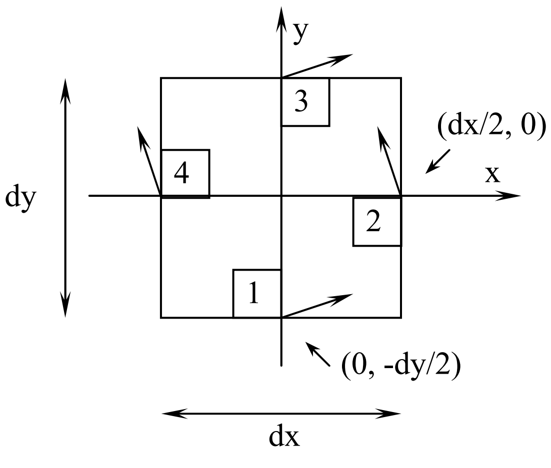
$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ – уравнение Пуассона

Роль граничных условий.

Частный случай $\rho = 0$, $\nabla^2\varphi = 0$ уравнение Лапласа

$rot\vec E = 0$ $\quad или \quad$ $\oint \vec E d\vec r = 0$

Пример: $\oint\limits_L \vec E d\vec r = \oint\limits_S rot\vec E d\vec s$



$$\oint\limits_L \vec{E}d\vec{r} = E_x(1)dx + E_y(2)dy - E_x(3)dx - E_y(4)dy = (E_x(1) - E_x(3))dx + (E_y(2) - E_y(4))dy =$$

$$= \left[E_x(x, -\frac{1}{2}dy) - E_x(x, \frac{1}{2}dy) \right] dx + \left[E_x(\frac{1}{2}dx, y) - E_x(-\frac{1}{2}dx, y) \right] dy =$$

$$= -\frac{E_x(x, \frac{1}{2}dy) - E_x(x, -\frac{1}{2}dy)}{dy} dydx + \frac{E_y(\frac{1}{2}dx, y) - E_y(-\frac{1}{2}dx, y)}{dx} dxdy, dxdy = (d\vec{S})_z$$

Теорема Ирншоу

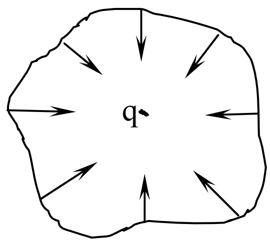
$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k \\ i \neq k}} \frac{q_i q_k}{R_{ik}}, \qquad R_{ik} = \left| \vec{r}_i - \vec{r}_k \right|$$

Условие устойчивости для j-го заряда:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x_j} = \dfrac{\partial U}{\partial y_j} = \dfrac{\partial U}{\partial z_j} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} < 0, \dfrac{\partial^2 U}{\partial y_j^2} < 0, \dfrac{\partial^2 U}{\partial z_j^2} < 0 \end{cases}$$

Однако $\nabla^2 \dfrac{1}{r} = div\ grad \dfrac{1}{r} = 0 \qquad (r \neq 0)$

Если устойчивое положение, то картина поля вблизи заряда,

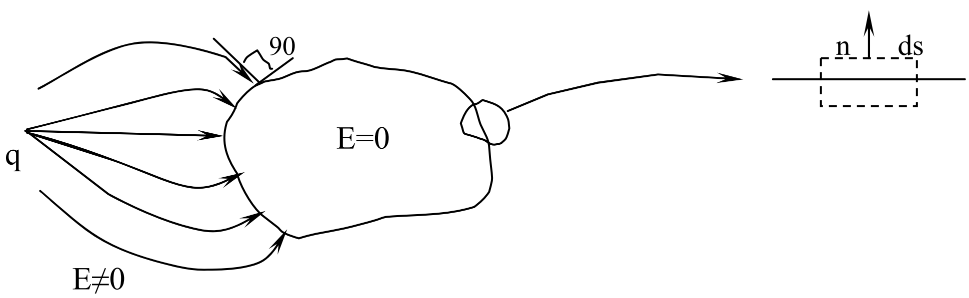


т.е. $\oint \vec{E}d\vec{s} \neq 0$ – противоречие.

Эквипотенциальные поверхности.
Поле и потенциал неоднородно заряженного кольца.

Проводники в электрическом поле.

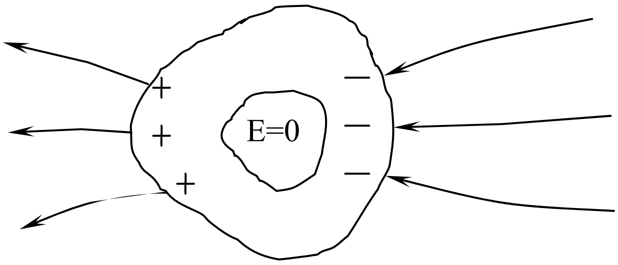
$\vec{E} \to \vec{E}_{макро} = \left\langle \vec{E}_{микро} \right\rangle$



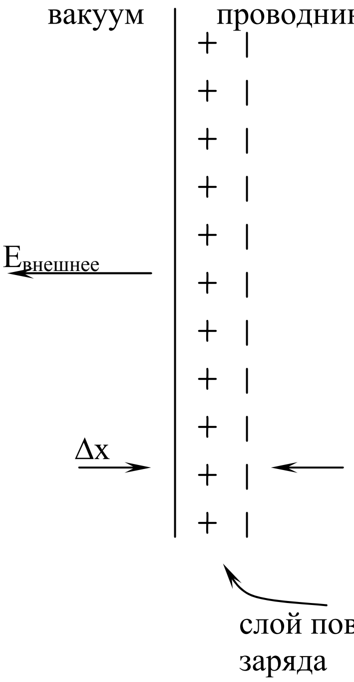
$\vec{E}_n ds = 4\pi\sigma ds$

$E_n = 4\pi\sigma \quad (= \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad СИ)$

<u>Поле в полости проводника</u>



<u>Глубина проникновения поля в проводник</u>



– плотность положит. Поверхностного заряда.

$\vec{E} = 2\pi\sigma = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$\sigma = eN_0\Delta x$

$E = \dfrac{eN_0\Delta x}{2\varepsilon_0}$

$N_0 \sim 10^{28}\, м^{-3}$

$\Delta x \sim 5\cdot 10^{-10}\, м$ – одна постоянная решетки

$E \sim 10^{10}\, В/м$

Пробой воздуха происходит при $E \sim 3*10^6$ В/м.
Т.о., для экранирования «пробойного» поля достаточно, чтобы из одного слоя ушла одна десятичная доля электронов.

<u>Движение частиц в стационарных электрических и **магнитных полях**</u>

1.Сила, действующая на заряды (движущиеся).

$\vec{E} = -grad\varphi, \qquad U = q\varphi(\vec{r}),$

$\vec{F} = -gradU$

$\vec{F} = -qgrad\varphi = q\vec{E}$

В магнитном поле

$$\vec{F}_л = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} \qquad (q\vec{v}\times\vec{B} \quad в\ СИ)$$

Уравнение движения

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B})$$

P.S.

Пренебрегаем потерей энергии на излучение.

2.Движение заряда в стационарном электрическом поле.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E}, m\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\nabla\varphi \qquad (не\ релятивистский\ случай)$$

$$v\cdot m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{v}\cdot\nabla\varphi \to \frac{d}{dt}(\frac{mv^2}{2}) = -q\frac{d\varphi}{dt},$$

$$d(\frac{mv^2}{2} + q\varphi) = 0$$

Закон сохранения энергии: $\frac{mv^2}{2} + q\varphi = const \qquad (= \text{E})$

Пример: для ускорение электрона (v(начальная)=0):

$$\frac{mv^2(конечная)}{2} = |e|\Delta\varphi$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|\Delta\varphi}{m}}, \quad при\ \ \Delta\varphi = 1B,\ \ v \sim 600\ км/сек$$

Релятивистский случай

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi = const$$

Частные случаи:

1)Движение в однородном поле – $\vec{E} = const$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = q\vec{E}, \qquad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} = const,$$

полная аналогия с однор. гравитац. полем:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{\vec{a}t}{2}$$

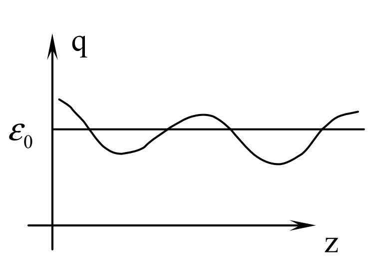
2)Неоднородное одномерное поле $\quad \vec{E} \parallel Oz, \quad \vec{v} \parallel Oz$

$$v(z) = \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{dz} = dt, \quad \int_{t_0}^{t} dt = \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{v(z)}$$

$$t(z) = t_0 + \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{v(z)}, \quad v(z)\ \ находим\ \ из\ \ закона\ \ сохранения$$

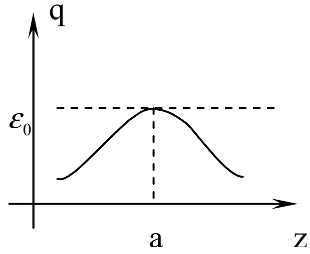
$$\frac{mv^2}{2} + q\varphi = \varepsilon_0,\ \ v(z) = \sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon_0 - q\varphi(z))},\ \ \varepsilon_0 - полная\ \ энергия$$

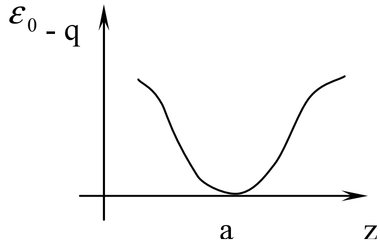
$$t = t_0 + \int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon_0 - q\varphi(z))}}$$



P.S.

Особая точка:





$$\varepsilon_0 - q\varphi = (a-z)^2 \cdot C,$$

$$t \sim \int \frac{dz}{\sqrt{(a-z)^2}} = \int \frac{dz}{a-z} = \ln|a-z|$$

$$t \xrightarrow[x \to a]{} \infty$$

3. Движение в стационарном однородном магнитном поле.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \qquad \vec{B} = \vec{B}(0,0,B), \quad т.е. \ \vec{B} \parallel Oz$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{v} \times \vec{B})_x = v_y \cdot B$$

$$(\vec{v} \times \vec{B})_y = -v_x \cdot B$$

$$(\vec{v} \times \vec{B})_z = 0$$

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \dfrac{qB}{mc} \cdot v_y \\ \dot{v}_y = \dfrac{qB}{mc} \cdot v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

$$v_z = const$$

Используем тот факт, что $\dfrac{d(\frac{mv}{2})}{dt} = 0,$ в самом деле: $K = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$

$$\frac{dK}{dt} = m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}, \quad \dot{\vec{v}} = \frac{q}{mc}\vec{v} \times \vec{B},$$

$$\frac{dK}{dt} = m\frac{q}{mc}\underbrace{\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}_{=0} = 0, \quad K = const$$

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) = v_0 \sin \omega t \\ v_y(t) = v_0 \cos \omega t \end{aligned}\right\} \to |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = const$$

Из уравнений движения следует, что

$$\omega = \frac{qB}{mc} \equiv \omega_c - циклотронная \ \ частота$$

Уравнение траектории:

$$\dot{x} = v_0 \sin \omega_c t, \quad \dot{y} = v_0 \cos \omega_c t$$

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}\dot{x}dt=v_0\int\sin\omega_c t dt=-\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t+x_0$$

$$y(t)=\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t+y_0$$

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=x_0-\rho\cos\omega_c t\\ y(t)&=y_0+\rho\sin\omega_c t\\ z(t)&=z_0+v_z t\end{aligned}\right\}\quad \rho=\frac{v_0}{\omega_c}=\frac{mcv_0}{qB}\equiv\rho_c-\textit{циклотронный радиус}$$

Пример:

B=10кГс (стационарный электромагнит с железным сердечником)

$$\omega_c\approx 10^{11}\,Гц, \nu=\frac{\omega}{2\pi}\sim 3\cdot 10^{10}\,Гц,$$

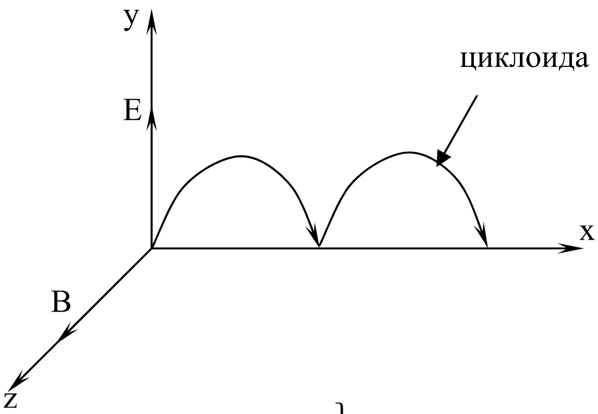
$$\rho\sim\frac{v_0}{\omega_c}=\frac{10^8}{10^{11}}\sim 10^{-3}\,см$$

Релятивистский случай:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{q}{c}\vec{v}\times\overline{B},\ \text{т.к. K=const, то } v^2=const$$

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\dot{\vec{v}}=\frac{q}{c}\vec{v}\times\overline{B}$$

4. Сращенные $\overline{E}$ и $\overline{B}$ поля



$$m\dot{\vec{v}}=q(\overline{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\overline{B})$$

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{\vec{x}}&=\frac{q}{c}Bv_y\\ m\ddot{\vec{y}}&=q\overline{E}-\frac{q}{c}Bv_x\\ m\ddot{\vec{z}}&=0\end{aligned}\right\}$$

Замена:

$x_1=x-ut, x=x_1+ut$

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=\frac{q}{c}B\dot{y}_z\\ m\ddot{y}&=qE-\frac{q}{c}B\dot{x}_1-\frac{qB}{c}u\end{aligned}\right\}$$

Выбираем $u=c\frac{E}{B}$, тогда:

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}_1&=\frac{qB}{c}\dot{y}\\ m\ddot{y}&=-\frac{qB}{c}\dot{x}_1\end{aligned}\right\}\quad \textit{или}\quad \left.\begin{aligned}\ddot{x}_1&=\omega_c\dot{y}_z\\ \ddot{y}&=-\omega_c\dot{x}_1\end{aligned}\right\}$$

Если начальная скорость равна в системах отсчета { x_1, y}

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 = v_0 \sin\omega_c t\\ \dot{y}_1 = v_0 \cos\omega_c t\end{aligned}\right\} \qquad \frac{dx_1}{dt} = 0 \qquad \frac{dy_1}{dt} = v_0$$, то

Решение:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{v_0}{\omega_c}\cos\omega_c t + x_0 \\ y_1 &= \frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t + y_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + c\frac{E}{B}t - \frac{v_0}{\omega_c}\cos\omega_c t \\ y &= y_0 + \frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t \end{aligned}\right\}$$

Для случая $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$ имеем $x_0 = \dfrac{v_0}{\omega_c}, y_0 = 0,$ т.о.

$$\left.\begin{aligned} v_x(t) &= c\frac{E}{B} + v_0 \sin\omega_c t \\ v_y(t) &= v_0 \cos\omega_c t \end{aligned}\right\} \quad \text{см. рисунок}$$

$u_{\partial p} = c\dfrac{E}{B} - \textit{дрейфовая скорость}, \ \perp \textit{к}\ \overline{E}, \perp \textit{к}\ \overline{B}.$

P.S.

Если в скрещенное поле бросить заряд с

$v_x = c\dfrac{E}{B}, v_y = 0, v_z = 0,$ то частица полетит по прямой!

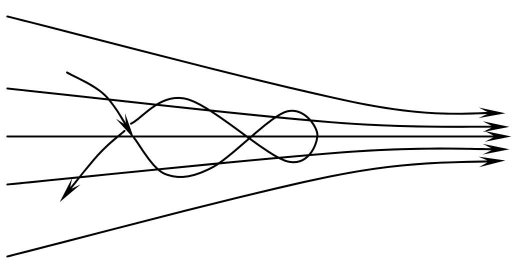
Примеры:

1)иммерсионная линза;
2)электронный проектор;
3)эффект Холла;
4)’классический атом’ в магнитном поле – траектория движения электрона;
5)фокусировка в аксиально-симметричном поле;
6)электронный микроскоп:

свет. волна $\lambda_{\min} \sim 2000 - 3000\,\overset{\circ}{A}$ $\quad (1\overset{\circ}{A} = 10^{-10}\,м)$

электрон $\lambda \sim 0{,}04\,\overset{\circ}{A}$ $\quad (\lambda = \dfrac{h}{p})$

т.о. увеличение электронного микроскопа сильнее в 200000 раз (и более).
7)медленно меняющиеся в пространстве поля



– магнитная пробка

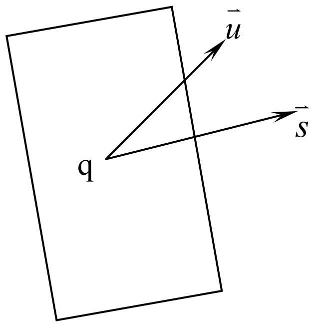
8)радиационные полюса Земли;
9)электронные умножители;
10)фокусировка в поперечном магнитном поле.

Электрический ток

1.Плотность тока. Уравнение непрерывности.

$$[J] = ед\frac{СГСЭq}{сек}, (Гаусс), [J] = \frac{Кл}{сек} = A$$

$$1A = 3\cdot 10^9\, ед\frac{СГСЭq}{сек}$$



$$J(s) = \frac{nq\vec{u}\vec{s}\Delta t}{\Delta t} = nq\vec{u}\vec{s}$$

$$J(s) = \sum n_i q_i \vec{u_i}\vec{s} = s\sum n_i q_i \vec{u_i}$$

$$\vec{j} = \sum n_i q_i \vec{u_i}$$

$$\vec{j} = \sum n_i q_i \vec{u_i} = q\sum n_i \vec{u_i} = qN_e \frac{1}{N_e}\sum n_i \vec{u_i}$$

Уравнение непрерывности – закон сохранения электрического заряда.

$J = \oint\limits_s \vec{j}d\vec{s}$, $\oint\limits_s \vec{j}d\vec{s} = \oint\limits_V div\,\vec{j}dV$ – s – неподвижна.

Т.о. $J = \oint\limits_V div\,\vec{j}dV$

Для стационарного случая $div\,\vec{j} = 0$.

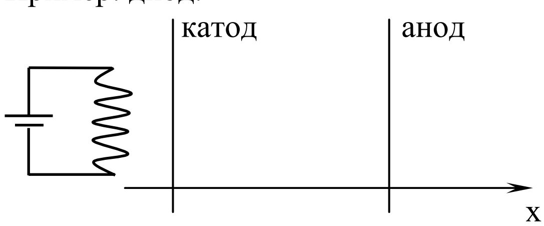
Нестационарный случай:

$$\frac{dq}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho dV = -\oint \vec{j}d\vec{s}$$

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = \int div\,\vec{j}dV, \qquad т.е.$$

$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0$ – уравнение непрерывности или закон сохранения заряда в локальной форме

Пример: диод.



n – плотность электронов.

$j = \rho V$, $\rho = -ne$

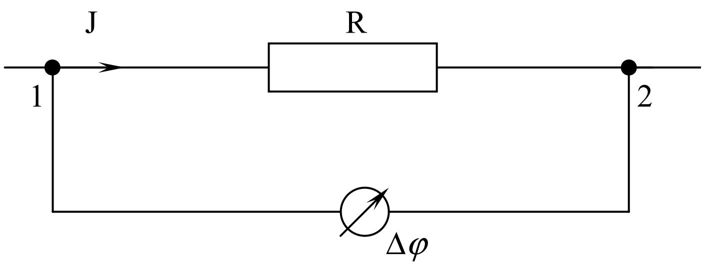
$j_x = \rho V_x$, $V_y = V_z = 0$

Стационарный случай: $div\,\vec{j} = 0 \to \partial j_x / \partial x = 0$, $\rho V_x = const$

$$\rho \sim \frac{1}{V_x}, \quad \frac{mv_x^{\,2}}{2} = e\varphi, \quad v_x \sim \sqrt{\varphi}, \quad \rho \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$$

2.Закон Ома.

Экспериментальный факт (~1800 год) $J \sim \Delta\varphi$



$$J=\frac{\Delta\varphi}{R},\qquad R=\rho\frac{l}{S}-\textit{в прост. случае}$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}\ \text{ или }\ \vec{E}=\rho\vec{j},\qquad \rho=\frac{1}{\sigma}$$

Обобщения

1) $\sigma=\sigma(\vec{r})$ – неоднородность
2) $\sigma=\hat{\sigma}$ – анизотропия
3) гиротропия (σ в магнитном поле тензор– эффект Холла)
4) переменный ток $\sigma=\sigma(\omega)$.

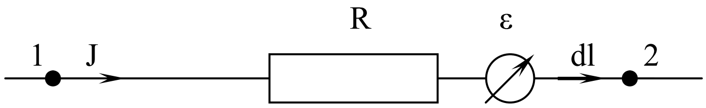
Единицы измерения:

$$[\sigma]=\frac{[j]}{[E]}=\frac{A/м^2}{B/м}=\frac{A}{B}\frac{1}{м}=(Ом\cdot м)^{-1}\qquad \text{СИ}$$

В Гауссовой системе:

$$[\rho]=\frac{[E]}{[j]}=\frac{заряд/м^2}{заряд/м^2\cdot сек}=сек$$

Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС:



$$\vec{E}=\rho\vec{j},\qquad \vec{E}=\vec{E}_{ст.}+\vec{E}^*$$

$\vec{E}^*$ – стороннее электрическое поле (не электростатического происхождения)

$$\int_1^2\vec{E}d\vec{l}=\int_1^2\rho\vec{j}d\vec{l}\quad \text{или}\quad \int_1^2\vec{E}_{эл.ст.}d\vec{l}+\int_1^2\vec{E}^*d\vec{l}=\int_1^2\rho\vec{j}d\vec{l}$$

$$\int_1^2\vec{E}_{ст.}d\vec{l}=\int_1^2(-grad\varphi)d\vec{l}=-(\varphi_2-\varphi_1),$$

$$\int_1^2\vec{E}^*d\vec{l}=\varepsilon,\qquad \int_1^2\rho\vec{j}d\vec{l}=\int_1^2\rho\frac{dl}{S}\underbrace{jS}_{J}=J\int_1^2\rho\frac{dl}{S}=JR_{12}$$

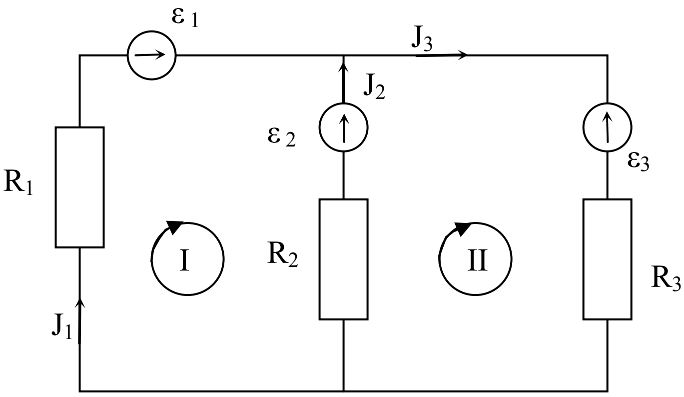
$$\varphi_2-\varphi_1+\varepsilon=JR_{12}$$

JR_{12} – называется U-падением напряжения.

Законы Кирхгофа:

$$\sum J_i=0$$
$$\sum J_iR_i=\sum\varepsilon_i$$

Пример:



$J_1 + J_2 - J_3 = 0$

Для I-го контура:

$J_1R_1 - J_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$

Для II-го контура:

$J_2R_2 + J_3R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

2.Дополнение: время релаксации Максвелла.

$$\frac{d\rho}{dt} = -divj, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad div\vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{j} = -div\sigma\vec{E} = -\sigma div\frac{\vec{D}}{\varepsilon} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho$$

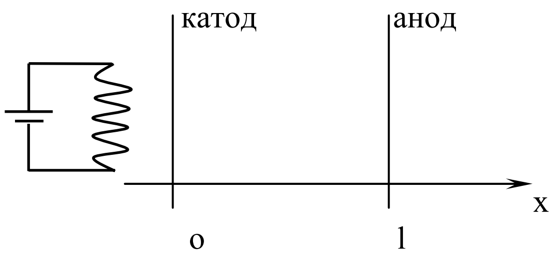
$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho, \qquad \rho(\vec{r},t) \sim \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

$$\tau_m = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}(\Gamma), \quad \tau_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}(СИ)$$

$$\tau_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{8.85\cdot 10^{-12}\varepsilon}{\sigma} \approx 10^{-11}\cdot 10^4\cdot\varepsilon \approx \varepsilon\cdot 10^{-7}сек$$

Для СИ :

2.Закон 3/2 Ленгмюра (диод с ограничением тока пространственным зарядом)



Допущения (упрощения):

1) v(0)=0
2) $E|_{x=0}=0$
3) катод – неисчерпаемый источник электронов.

$$\left.\begin{array}{ll} div\vec{E} = 4\pi\rho & (1) \\ div\vec{j} = 0 & (2) \\ m\frac{dv}{dt} = F, F = e\varphi E(x) & (3) \end{array}\right\}$$

$$j = \rho v, E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

$(1):\varphi'' = -4\pi\rho(4), \quad (4): v\cdot\varphi'' = -4\pi\rho v = -4\pi j(5)$

$(3):\dfrac{mv^2}{2} = e\varphi(6), \quad (6): v = A\sqrt{\varphi}(7)$

$(7)\to(5) \quad A\sqrt{\varphi}\varphi'' = -4\pi j$ или

$\varphi'' = Aj\varphi^{-\frac{1}{2}},$ умножили на φ'

$\varphi''\varphi' = Aj\varphi^{-\frac{1}{2}}\varphi'$

$\varphi''\varphi' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2, \quad \varphi'\varphi^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{d}{dx}(\sqrt{\varphi}),$

т.о.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = Aj\frac{d}{dx}(\sqrt{\varphi}),$$

с учётом допущений (1), (2), (3) и выбрав $\varphi(0)$=0 получаем:

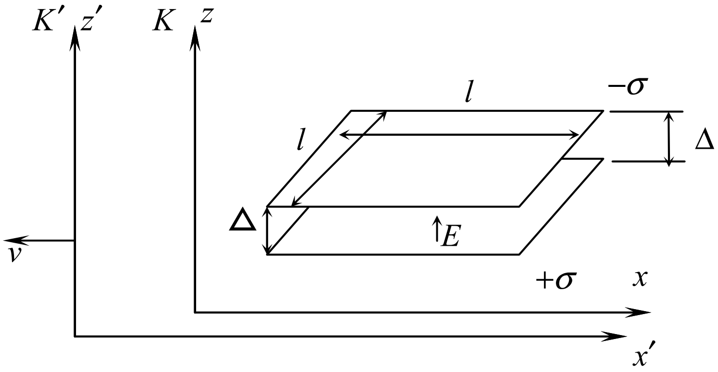
$(\varphi(0))^{3/2} = Aj,$

т.е. $j \sim (\varphi(0))^{3/2}$ – *закон* $^3/_2$ *Ленгмюра*.

Тема 5. Поле движущихся зарядов.

5.1 Инвариантность заряда. Электрическое поле заряженных параллельных пластин.

Заряд является релятивистски-инвариантной величиной
(«Проверка» при помощи закона Гаусса)



$l \gg \Delta, \quad \vec{E}(0,0,E)$

$\vec{E} = 4\pi\sigma$

$l' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$Q_\pm = \sigma_\pm \cdot S = \sigma_\pm \cdot l_\parallel \cdot l_\perp$

$Q'_\pm = Q_\pm$ (invar заряда)

$Q_\pm = \sigma'_\pm \cdot l_\parallel \cdot l_\perp \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, *откуда*

$\sigma' = \sigma \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Соответственно: $E'_z = E_z \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Для E_x изменяется Δ, но она не входит в выражение для E_x, т.о.

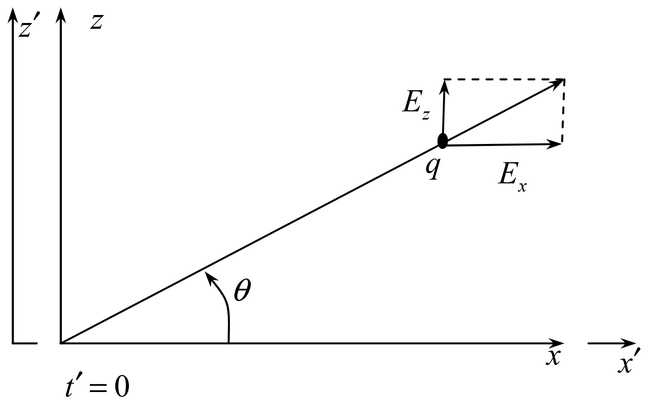
$E'_x = E_x$ и $E'_y = E_y$

Введя обозначения

$\vec{E}_\perp \ (\perp \kappa\ \vec{v})$ *и* $\vec{E}_\parallel \ (\parallel \kappa\ \vec{v})$, получаем

$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel, \quad \vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

5.2 Поле точечного движущегося заряда.



$$|E| = \frac{q}{r^2},$$

$$E_x = \frac{q}{r^2}\cos\theta,\quad E_z = \frac{q}{r^2}\sin\theta\ ,$$

$$E_x = \frac{qx}{(x^2+y^2)^{3/2}},\quad E_z = \frac{qz}{(x^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{E_z}{E_x} = \frac{z}{x}$$

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad t = \frac{t' - \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \textit{выбрано}\ \ t' = 0,$$

$$\textit{т.о.}\quad x = \frac{x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\textit{Т.к.}\quad E'_x = E_x \ \text{ и } \ E'_z = x = \frac{E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\textit{см.предыдущий пункт})$$

$$E'_z = \frac{q\,x'\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(\left(x'\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 - z'^2\right)^{3/2}};\qquad E_z = \frac{q\,z'\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(\left(x'\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2 - z'^2\right)^{3/2}}$$

Заметим, что как и в случае v=0

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'},\quad \textit{т.е.}\ \ \overline{E}\,\|\,\vec{r}$$

Найдём $|\overline{E'}|$

$$|\overline{E'}|^2 = \frac{q^2}{(\sqrt{\ })^2}\cdot\frac{(x')^2+(z')^2}{((\frac{x'}{\sqrt{\ }})^2+z'^2)^3} = \ldots = \frac{q^2(\sqrt{\ })^4}{(r')^2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{z'^2}{x'^2+z'^2})^3};$$

$$\textit{где}\quad r' = \sqrt{x'^2+z'^2}.$$

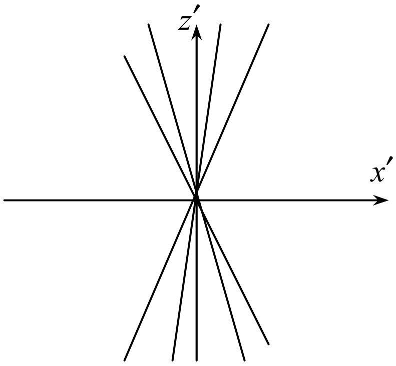
Заметим, что

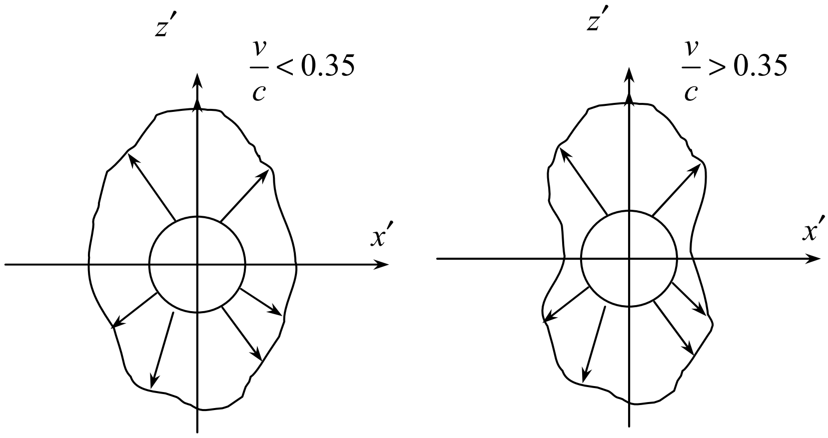
$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2+z'^2}} = \sin\theta,\quad \textit{получаем}$$

$$E' = \frac{q}{\left(\frac{r'}{\sqrt{\ }}\right)\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin\theta'\right)^{3/2}}.$$

$При\ \ \theta' \to \pm\dfrac{\pi}{2},\ E' \to \max$

$При\ \ \theta' \to 0, \pi,\ E' \to \min$



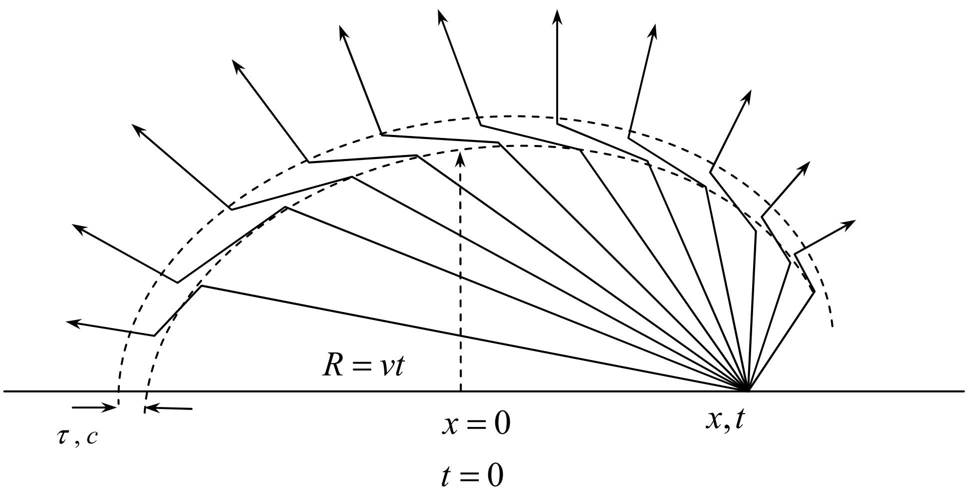


1) *при* $\dfrac{v^2}{c^2} \to 0$ E' *переходит в "кулоновское" выражение;*

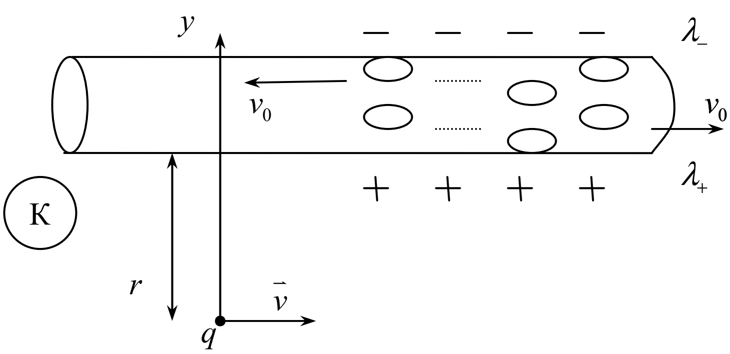
2) *поле не сферически симметрично;*

3) $\oint \vec{E}d\vec{l} \neq 0 -$ *поле не потенциальное. Такое поле не может быть создано никаким стационарным распределением заряда.*

Маленькое дополнение: поле заряда, бывшего неподвижным, потом ускоренным за время τ *и далее двигающегося с постоянной скоростью*

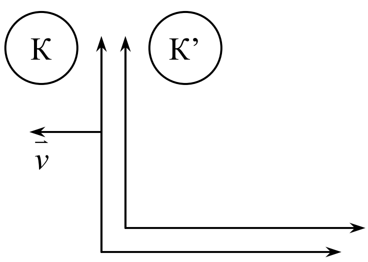


<u>5.3 Взаимодействие между движущимися зарядами.</u>



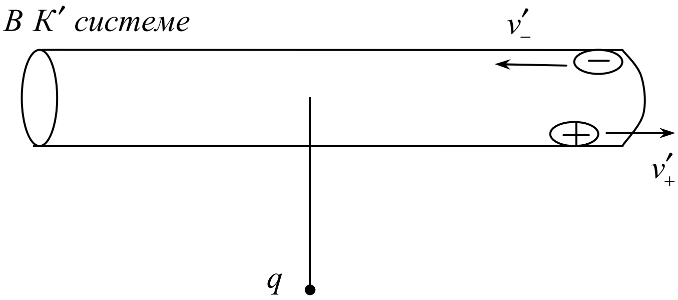
$\lambda_+ = \lambda_- = \lambda$

$\vec{j} \neq 0, \vec{E} = 0$



В К системе

В K' системе



Теперь уже $\lambda_+ \neq \lambda_-$

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \qquad v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - \frac{v_0 v}{c^2}}$$

$$v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + \frac{v_0 v}{c^2}}$$

Введя обозначения $\beta = v/c$, имеем

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta}, \qquad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta}$$

Система найдет плотности зарядов + и - в их собственной (где они неподвижны) системе отсчета

$$\lambda_{собст} = \lambda_\pm \sqrt{1 - \beta_0^2} = \pm \lambda \frac{1}{\gamma_0}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v/c}}$$

Перейдем из этих собственных (их две) систем отсчета в K'

$$\lambda_\pm (K') = \pm \lambda \frac{\gamma'_\pm}{\gamma_0}, \ т.е. \ \lambda_\pm (K') = \pm \lambda \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\sqrt{1 - (\beta'_+)^2}}$$

Таким образом, суммарная плотность линейного заряда (с учётом их знака) равна

$$\sum \lambda' = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{\lambda}{\gamma_0} (\gamma'_+ - \gamma'_-),$$

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} \right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \beta} \right)^2}} = \ldots = 2 \beta_0 \beta \gamma_0 \gamma$$

и

$$\sum \lambda' = \lambda'_+ - \lambda' = -\frac{2 \lambda \gamma v_0 v}{c^2}$$

Ранее из закона Гаусса, уже однородно заряженной нити мы получали

$$E' = \frac{2 \sum \lambda'}{r} = -\frac{4 \lambda \gamma v_0 v}{r c^2}$$

следовательно

$$F'_y = -\frac{4 q \lambda \gamma v_0 v}{r c^2}$$

и согласно правилу преобразования силы имеем

$$F'_y = \frac{1}{\gamma} F'_y = \sqrt{1-\beta^2}\, F'_y$$

$$F_y = -\frac{4q\lambda\gamma v_0 v}{rc^2},$$

т.к. $2\lambda v_0 = J$ *– ток в К системе, то*

$$F_y = -\frac{4Jvq}{rc^2} - \text{сила не равна нулю!}$$

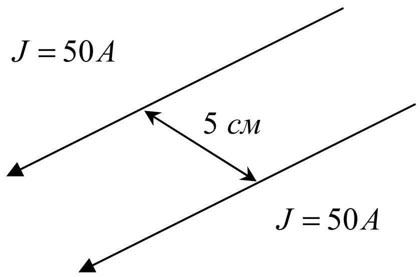
Тема 6. Магнитное поле

6.1. Определение магнитного поля

Из предыдущего пункта $F_y = -\dfrac{2Jvq}{rc^2},$

сила Лоренца $\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\bar{v}\times\vec{B}),$ *сравнивая имеем* $B = \dfrac{2J}{rc^2}$ *– магнитное взаимодействие между двумя движущимися зарядами – релятивистский эффект.*

Численный пример и ФЛФ.



F на один e^- $\approx 10^{-25}$ *Н*

F на 1 см $\approx 10^{-4}$ *Н/см*

F без компенсации заряда ~ 10^{16} *Н/см*

Сила Ампера

$$d\vec{F} = \frac{J}{c} dl \times \vec{B},$$

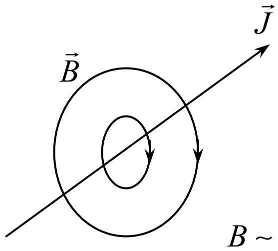
$$d\vec{F} = dq\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}, \quad \vec{v} = d\vec{l}\big/dt,$$

$$d\vec{F} = \underbrace{J\,\cancel{dt}}_{dq}\frac{d\vec{l}\times\vec{B}}{c\,\cancel{dt}} = \frac{J}{c} d\vec{l}\times\vec{B}.$$

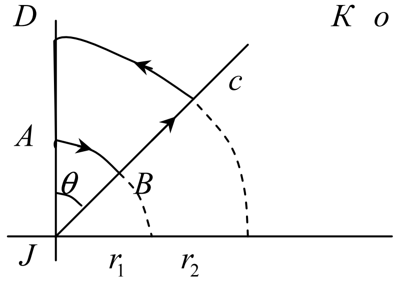
!!!

Вопрос для обдумывания: какие силы действуют между двумя зарядами, движущимися параллельно друг другу с одинаковой скоростью.

6.2. Циркуляция магнитного поля



$B \sim \frac{1}{r}$



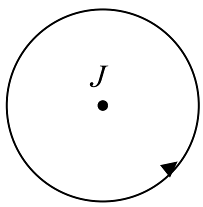
К о н т у р 1

$$\oint\limits_{ABCD} \vec{B}d\vec{r} = 0, \textit{докажем}:$$

$$\oint \vec{B}d\vec{r} = \int\limits_{AB} B(r_1)dr - \int\limits_{CD} B(r_2)dr = (B(r_1)r_1 - B(r_2)r_2)\theta$$

$$\frac{B_{DC}}{B_{AB}} = \frac{B(r_2)}{B(r_1)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Контур 2



$$B = \frac{2J}{rc} \qquad \oint \vec{B}d\vec{r} = \frac{2J}{rc} \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} J,$$

таким образом $\oint \vec{B}d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} J$

$$(\frac{d\vec{B}}{\gamma t} = 0)$$

$$J = \int\limits_S \vec{j}d\vec{s}, \quad \oint Bd\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}d\vec{s}, \quad \textit{или}$$

$$\int rot\vec{B}d\vec{s} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}d\vec{s},$$

$$\boxed{rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}} \qquad (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0)$$

еще одно соотношение

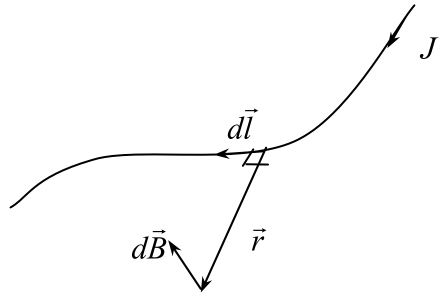
$$div\vec{B} = 0$$

Таким образом, для постоянных по времени полей

$$div\vec{E} = 4\pi p \qquad (\frac{1}{\varepsilon_0}\rho); \quad rot\vec{E}=0$$

$$div\vec{B} = 0; \quad rot\vec{B}\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad\qquad (\frac{1}{\mu_0}\vec{j})$$

6.3. Закон Био-Савара



$$d\vec{B} = \frac{J}{c} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$Jd\vec{l} = \vec{j}dV$$

$$d\vec{B} = \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{cr^3} dV,$$

$$\vec{B} = \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{cr^3} dV \qquad \left(d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot J \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad СИ\right)$$

6.4. Векторный потенциал и его калибровка

Из $div\vec{B} = 0$ *следует*

$$\vec{B} = rot\vec{A}$$

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \to rot(rot\vec{A}) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

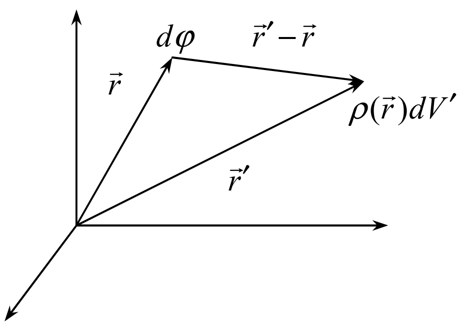
Свобода в выборе $\vec{A}$, $\vec{A} \to \vec{A}' + grad\, f(\vec{r})$, $f(\vec{r})$ – *произвольная функция.* *Наложим дополнительное условие (калибровка)*

$$div\vec{A} = 0, \text{ тогда}$$

$$rot(rot\vec{A}) = graddiv\vec{A} - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A},$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Аналогично: $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ *имеет решение* $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(r')dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$



По аналогии получаем общее решение уравнения

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$, *отсюда, в частном, следует закон Био–Савара.*

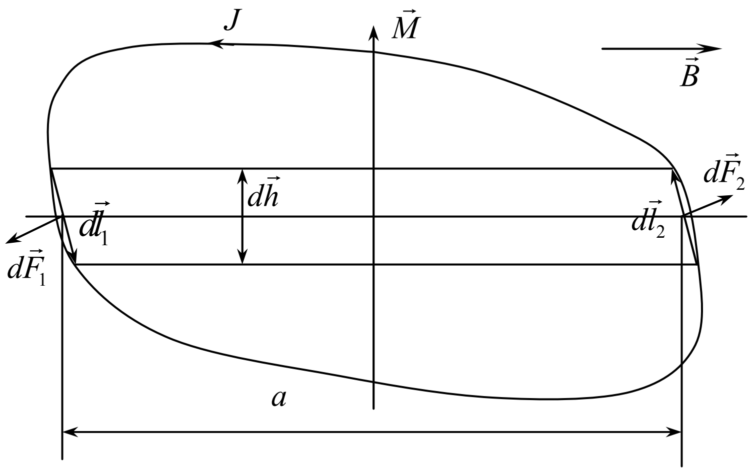
Замечание (с использованием δ – *функции Дирака) для точечного заряда* $\vec{j}(\vec{r}') = e\vec{v}\delta(\vec{r}')$, *и из* $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{1}{c}\int \frac{e\vec{v}\delta(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} = \frac{e\vec{v}}{cr}$, *а так как* φ *точечного заряда* $\varphi = \frac{e}{r}$, *то* $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{v}}{c}\varphi.$

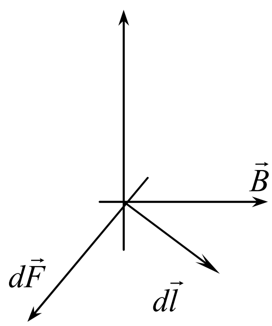
6.5. Магнитный момент. Момент сил, действующих на виток с током в магнитном поле.

$$d\vec{F} = \frac{J}{c} d\vec{l} \times \vec{B}, \vec{F} = \frac{J}{c} \oint d\vec{l} \times \vec{B},$$

$$\text{если} \quad \vec{B} = const, \quad \text{то} \quad \vec{F} = \frac{J}{c} \underbrace{(\oint d\vec{l}\,)}_{0} \times \vec{B} = 0.$$

Найдем момент силы (он, вообще говоря, не равен нулю).





$$d\vec{F}_1 = \frac{J}{c} d\vec{l} \times \vec{B};$$

$$\left| d\vec{F}_1 \right| = \frac{J}{c} B dl_1 \cdot \sin\alpha_1 = \frac{J}{c} B dh, \quad \left| d\vec{F}_2 \right| = \frac{J}{c} B dh,$$

$$dM = \frac{J}{c} B \underbrace{dh \cdot a}_{ds} = \frac{J}{c} B dS, \quad d\overrightarrow{M} = -\frac{J}{c} \vec{B} \times d\vec{S} = \frac{J}{c} d\vec{S} \times \vec{B},$$

$$\vec{M} = \int d\vec{M} = \frac{J}{c} \vec{S} \times \vec{B}, \quad \vec{M} = \frac{J}{c} \vec{S} \times \vec{B}$$

$$\vec{P}_m = \frac{J}{c} \vec{S} - \text{магнитный момент}$$

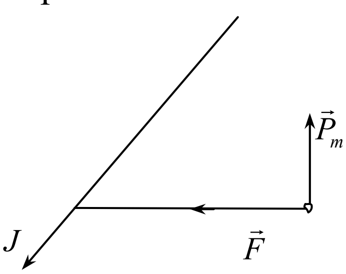
Примеры : рамка с током в магнитном поле.

В неоднородном магнитном поле $\quad \vec{F} \neq 0$

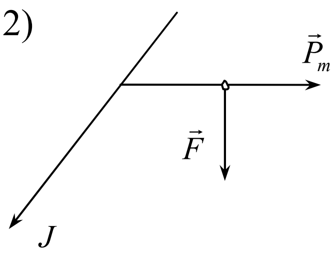
$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) \to \vec{F} = (\vec{P}\nabla) \cdot \vec{B}$$

Примеры:

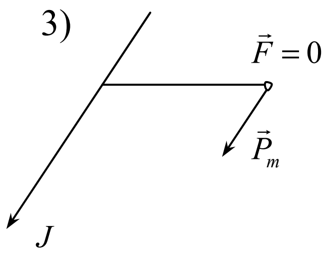
1)



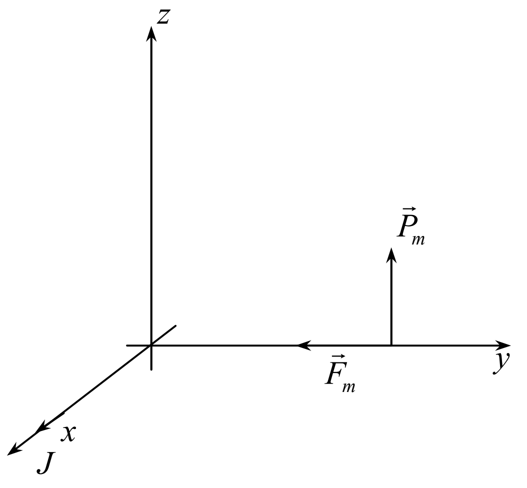
2)

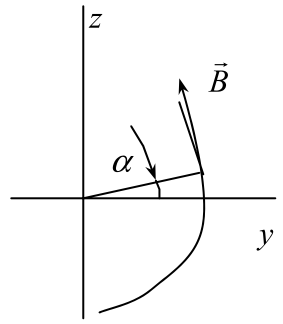


3)



Пример расчета





$$\vec{P}_m(0,0,\vec{P}_z), \quad \vec{B}(0,B_{y,}B_z)$$

$$\vec{F} = (\vec{P}_m \cdot \nabla)\vec{B} = (\underbrace{P_x}_{0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{P_y}_{0} \frac{\partial}{\partial y} + P_z \frac{\partial}{\partial z})\vec{B} = P_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}.$$

$$B_y = -B\sin\alpha = -\frac{B}{r} \cdot z,$$

$$B_z = B\cos\alpha = \frac{B}{r} \cdot y$$

$$\left.\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{B}{r} \cdot \vec{j},$$

$$\vec{F} = -\frac{P_m \cdot B}{r} \cdot \vec{j}$$