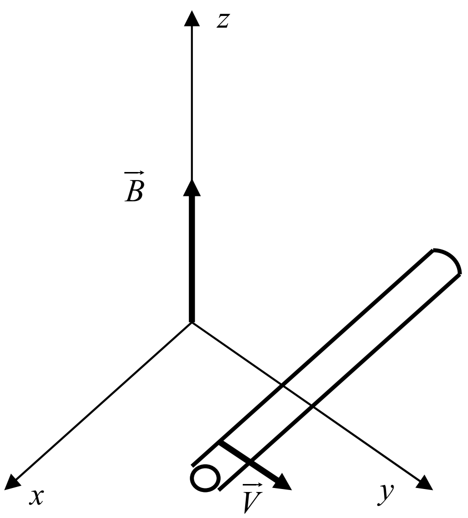
Тема 7

Электромагнитная индукция

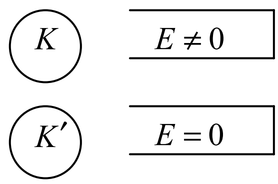
7.1 Проводящий стержень, движущийся в однородном магнитном поле. Рамка, движущаяся в неоднородном магнитном поле. Электромагнитная индукция.

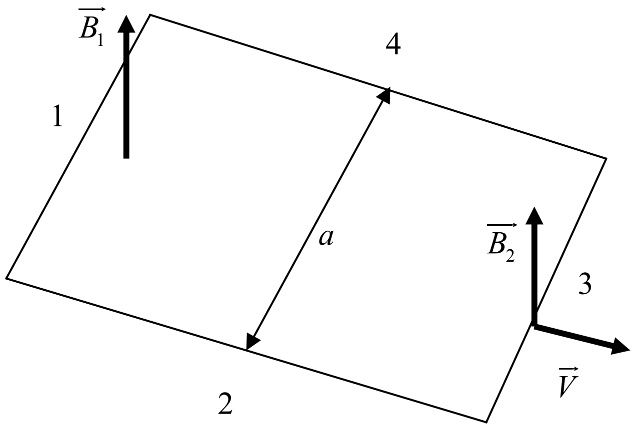


$$\vec{F} = q\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B};$$

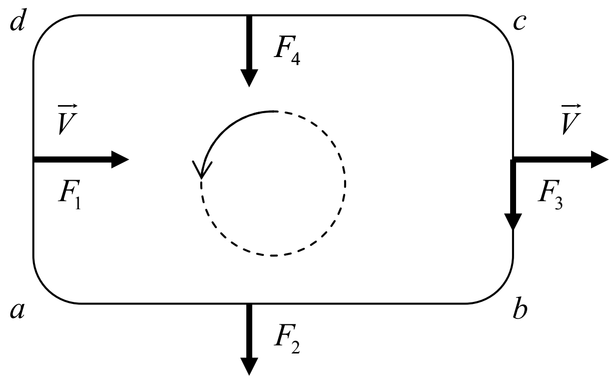
$$F_л = qE;$$

$$q\frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B} = q\vec{E};$$



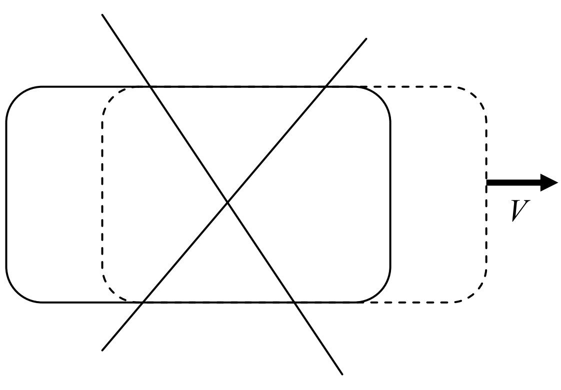


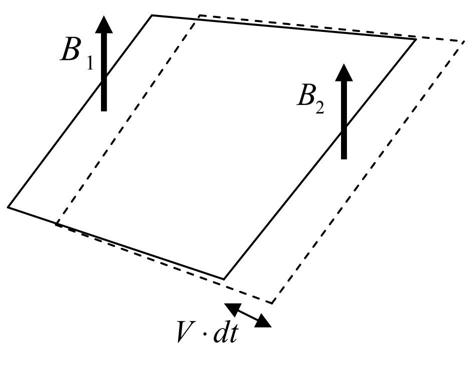
$\Rightarrow$



$$\oint \vec{F}\vec{dl} = \int_d^a F_1 dl - \int_d^a F_3 dl = \frac{q}{c}VB_1a - \frac{q}{c}VB_2a;$$

$$\oint \vec{F}\vec{dl} = \frac{qV}{c}(B_1 - B_2)a, \varepsilon = \frac{1}{q}\oint \vec{F}\vec{dl}, \varepsilon = \frac{V}{c}(B_1 - B_2);$$





$$d\Phi = -B_1 aVdt + B_2 aVdt = -V(B_1 - B_2)adt;$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -(B_1 - B_2)Va;$$

Сравнивая, получим:

$$\varepsilon = -\frac{1}{C}\frac{d\Phi}{dt};\left(\text{СИ}\,\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}\right);$$

Принцип Ленца (принцип Ле-Шателье - Брауна)

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\vec{dl},$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\vec{ds} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{ds}; \quad \boxed{rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \textbf{СИ:}\; rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\underbrace{\oint \vec{E}\vec{dl}}_{\oint rot\vec{E}\vec{ds}} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{ds};$$

7.2 Система уравнений Максвелла в вакууме и ток смещения

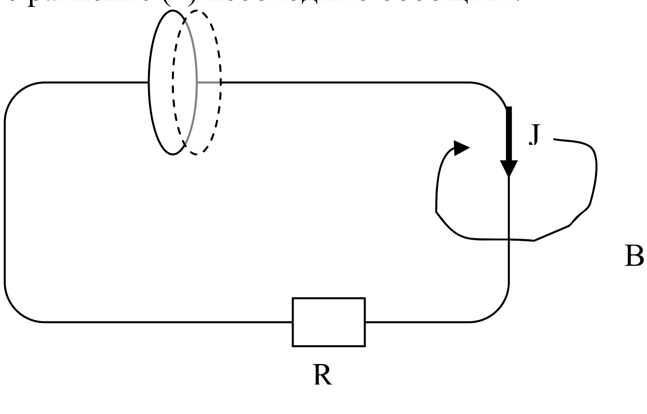
$$\left.\begin{matrix} div\vec{E} = 4\pi \cdot \rho, rot\vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ div\vec{B} = 0, rot\vec{B} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}; \end{matrix}\right\} \left(СИ \begin{cases} div\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho; \\ div\vec{B} = 0; \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \\ rot\vec{B} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{j}; \end{cases} \right)$$

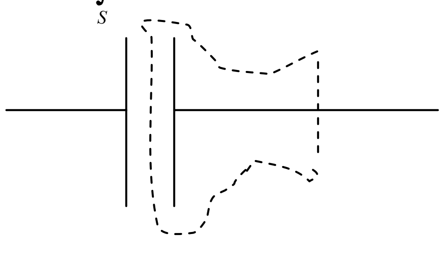
Уравнения Максвелла должны быть совместимы с законом сохранения заряда, т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j} = 0$. Пусть $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$.

Проверим: $\vec{j} = \frac{c}{4\pi} rot\vec{B}(*) \rightarrow div\vec{j} = \frac{c}{4\pi} divrot\vec{B} = 0 \rightarrow$ противоречие.

Уравнение (*) необходимо обобщить.

$$\oint \vec{B}\vec{du} = \int_S rot\vec{B} \cdot d\vec{s};$$





$$\frac{4\pi\pi}{J} \leftarrow \int_{S_1} rot\vec{B}d\vec{s} = \oint \underbrace{\vec{B}}_{\neq 0} d\vec{l} = \int_{S} rot\vec{B}ds \to 0;$$

Противоречие можно снять (Максвелл) введя дополнительное слагаемое в (*)

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\substack{ток \\ смещения}}\right);$$

Еще раз: система уравнений Максвелла в вакууме

$$\left.\begin{aligned} & div\vec{E} = 4\pi\cdot\rho; \\ & rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \\ & \operatorname{div}\vec{B} = 0; \\ & \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

1. уравнения Максвелла содержат уравнения движения Электромагнитного поля + Г.У.+Н.У. у. М. С производными по времени – уравнения движения, два других — условия, налагаемые на $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Т.о. из 6-ти компонент $\vec{E}$ и $\vec{B}$ только 4-е …
2. у. М. + сила Лоренца + три закона Ньютона — т.н. фундаментальная система уравнений Максвелла-Лоренца. Если добавить закон всемирного тяготения, то это — вся классическая физика
3. Свойства уравнений Максвелла:
    a) Линейность, т.е. работает принцип суперпозиции(не зависит от Г.У и Н.У.)
    b) Содержит закон сохранения заряда
    c) Каждое эл. поле может быть выражено через $\vec{A}$ и φ.
    d) Эл.-магн. поле может существовать самостоятельно в отсутствие зарядов
    e) Ур. М. — релятивистки инвариантны.

P.S. Необходимо переопределить связь между $\vec{E}$ и φ:

$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ — годится только для потенциальных полей.

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \to \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A};$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\underbrace{\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}_{-\operatorname{grad}\varphi} = 0; -\operatorname{grad}\varphi = \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

т.е. $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

Калибровочная инвариантность:

$$\left.\begin{aligned} & \vec{A} \to \vec{A} + \nabla f(\vec{r}, t); \\ & \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}; \end{aligned}\right\}$$ при такой замене поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ остаются неизменными.

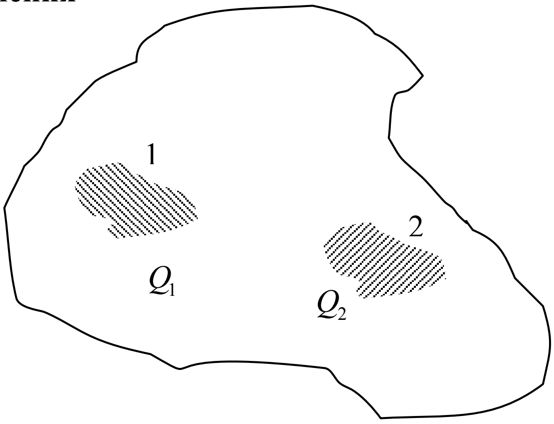
Тема 8

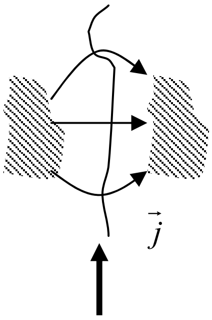
Законы сохранения для эл.м. поля. Импульс и энергия эл.м. поля

8.1 Локальные законы сохранения

е.д. $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0;$ — лок з.с.

$Q_1+Q_2=0$ — не лок. з.с.





$$\frac{dQ_1}{dt}=-\int\vec{j}d\vec{s}=-\frac{dQ_2}{dt};$$

8.2 Плотность и поток энергии

Умов (1874) — общий вид с примерами из механики сплошных сред.

Пойнтинг (1874+10 лет) — для эл.-магн. поля

$\vec{S}$ — плотность потока энергии, u — плотность энергии э.м.п. по аналогии:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{S}=0\,?$$

Уменьшение энергии в объеме	=	Потоку энергии через поверхность из этого объема	+	Работа поля, затраченная на изменение энергии весчества

$$-\frac{dV}{dt}=\int\vec{S}d\vec{s}+\dot{A};$$

$$d\vec{F}=\rho dV\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}\right);d\vec{F}\cdot\vec{V}=\rho\cdot\vec{E}\cdot\vec{V}\cdot dV=\vec{j}\cdot\vec{E}\cdot dV;$$

$$\dot{A}=\int\vec{E}\cdot\vec{j}\cdot dV,-\int\frac{\partial u}{\partial t}\cdot dV=\int\operatorname{div}\vec{S}\cdot dV+\int\vec{E}\cdot\vec{j}\cdot dV$$

$\vec{S}$—?

Найдем из у. Максвелла и $-\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}\vec{S}+\vec{E}\vec{j};$

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\qquad\bullet\vec{E}$$

–

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\bullet\vec{B}$$

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B}-\vec{B}\operatorname{rot}\vec{E}=\frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+B^2}{2}\right)=-\left(\vec{B}\operatorname{rot}\vec{E}-\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B}\right)-\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E}\,(*)$$

$\operatorname{div}\vec{E}\times\vec{B}-?$

Мат. дополнения:

$\hat{D}f \neq f\hat{D}$, но можно вести правило

$\hat{D}_f \cdot f \neq f \cdot \hat{D}_f$, $\hat{D}_f$ — действует только на f. Тогда $\nabla(\vec{E}\times\vec{B}) = \nabla_E(\vec{E}\times\vec{B}) + \nabla_B(\vec{E}\times\vec{B})$

используя $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ находим $\begin{array}{l} \nabla_E\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \nabla_E\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{E} \\ \nabla_B\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = -\nabla_B\left(\vec{B}\times\vec{E}\right) = -\vec{E}\operatorname{rot}\vec{B} \end{array}$, т.о.

для (*) получим $-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{E^2 tB^2}{8\pi}\right) = \operatorname{div} c\dfrac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi} + \vec{j}\vec{E}$, откуда $u = \dfrac{E^2+B^2}{8\pi}, \vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}$ — вектор Умова-Пойнтинга (СИ: $u = \dfrac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}, \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$)

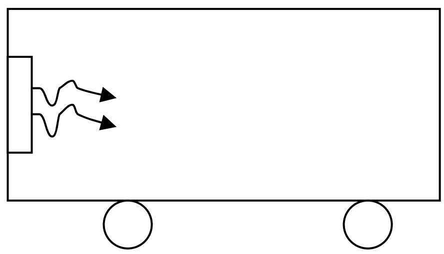
$$\dot{A} = \frac{dK}{dt}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{E^2+B^2}{8\pi}dV - \int \dot{A}dV\right) = \int \vec{S}d\vec{s};$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \frac{E^2+B^2}{8\pi}dV + \int KdV\right) = \int \vec{S}d\vec{s};$$

8.3 Плотность импульса эл.м. поля. Мысленный опыт А. Эйнштейна



$$p_m = \frac{u}{c^2}, \vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2}, \vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{B}, \vec{g} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{4\pi c}$$

g — плотность импульса

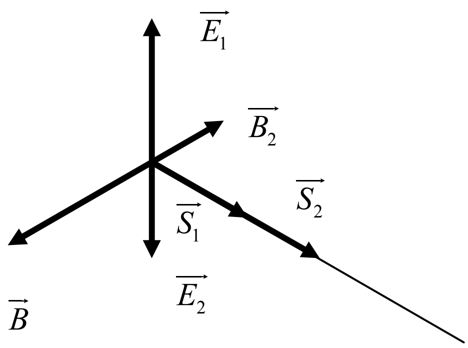
Закон сохранения импульса в замкнутой системе:

Импульс поля в замкнутой системе $= \int\limits_V \vec{g}dV$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int \vec{g}dV + \underbrace{\sum \vec{P}}_{\substack{\text{сумма}\\ \text{импульсов}\\ \text{весчества}}}\right) = 0$$

Прямое доказательство в 1900г. Лебедев — не путать с термомеханическим давлением — $3\cdot 10^{-11}H$

P.S. из книги Мешкова и Черкасова

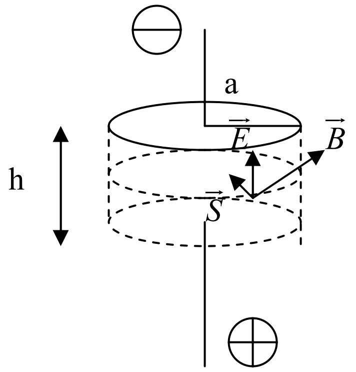


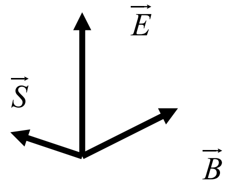
Пусть $\left|\vec{E_2}\right| = \left|\vec{E_1}\right|, \left|\vec{B_2}\right| = \left|\vec{B_1}\right|, т.е.$ $\vec{B_2} = -\vec{B_1}, \vec{E_2} = -\vec{E_1},$ *тогда* $\vec{S_2} = \vec{S_1}$

с другой стороны $\vec{S_2} \neq \vec{S_1} + \vec{S_2} = 2\vec{S_1}, т.к.$ $\vec{E_1} + \vec{E_2} = 0, \vec{B_1} + \vec{B_2} = 0, \vec{S_2} = 0$.

8.4 Примеры

1. **Зарядка конденсатора**





$$u = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}$$

ток небольшой, зарядка медленная:

$$B^2 \ll E^2, u \approx \frac{E^2}{8\pi},$$

$$U = \frac{E^2}{8\pi} V_{конд} = \frac{E^2}{8\pi} \pi \cdot a^2 h = \frac{E^2 a^2 h}{8},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{a^2 h}{4} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (*)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}, \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$$\int \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{S}, \int \operatorname{rot} \vec{B} d\vec{S} = \oint \vec{B} d\vec{l} =$$

$$= B\left(\vec{r}\right) 2\pi r, \int \vec{E} d\vec{S} = E\pi r^2; B\left(r\right) 2\pi r = \frac{\pi}{c} r^2 \frac{\partial E}{\partial r};$$

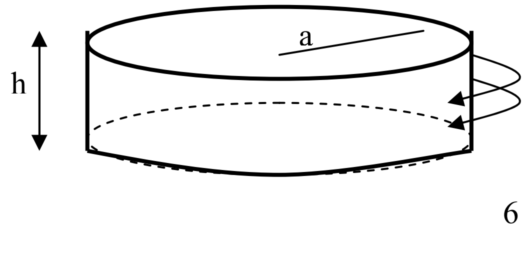
$$B(r) = \frac{r}{2c} \frac{\partial E}{\partial t};$$

($\frac{\partial E}{\partial t}$ — мало, $B^2 \sim \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)^2$ — еще меньше, что оправдывает выбранное приближение $B^2 \ll E^2$). $B(a) = \frac{a}{2c} \frac{\partial E}{\partial t}$; Через боковую поверхность $S_{бок} = 2\pi a h$.

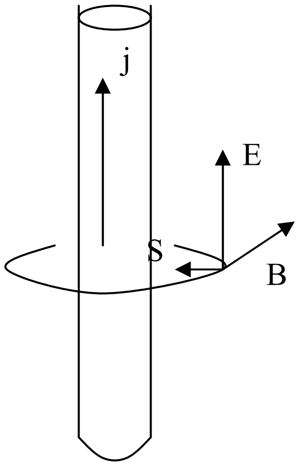
$$\left|\vec{S}\right| = \frac{c}{4\pi} E \frac{a}{2c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{a}{8\pi} E \frac{\partial E}{\partial t}$$

,что совпадает с (*) !

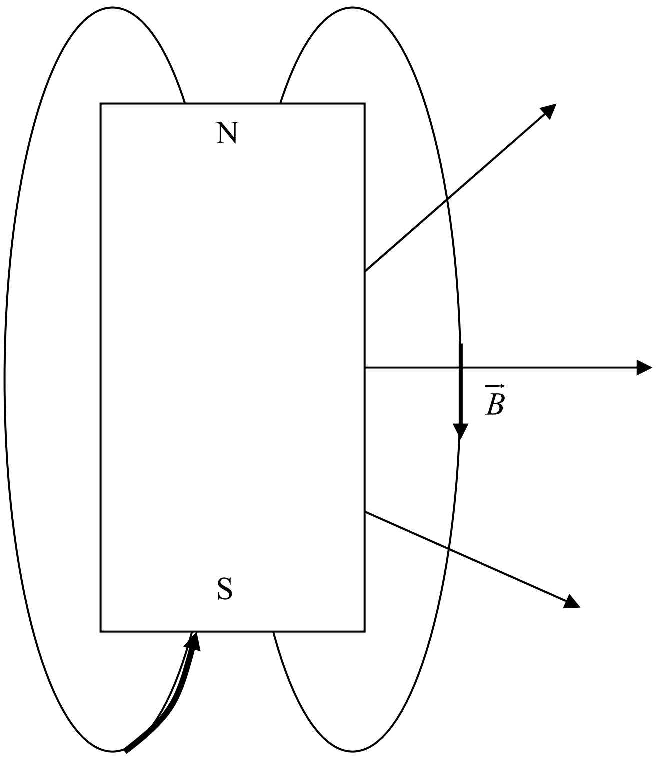
$$\left|\vec{S}\right| \cdot S_{бок} = \frac{a^2 h}{4} E \frac{\partial E}{\partial t}$$



2. **Нагрев провода за счет тепла Джоуля (качественно)**



3. **Постоянно заряженный магнит(задача Капицы)**



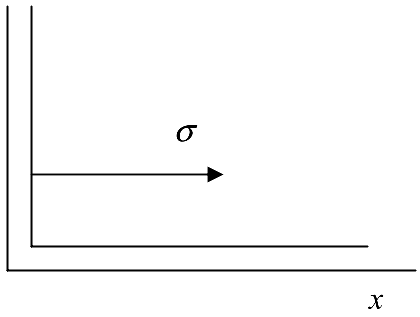
В стационарном случае $\vec{E}\times\vec{B}\neq 0$ — парадокс

Resume:	**Плотность**	**Поток**
Энергия	u	$\vec{S}$
Импульс	$\vec{g}$	
Момент импульса		

Тема 9

Уравнения Максвелла и СТО

9.1 Преобразования эл.-магн. полей при переходе из одной ИСО в другую



$$E_x' = E_x, \; B_x' = B_x,$$

$$\left.\begin{aligned} E_y' &= \frac{E_y - \frac{V}{c}B_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \; B_y' = \frac{B_y + \frac{V}{c}E_z}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \\ E_z' &= \frac{E_z - \frac{V}{c}B_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \; B_z' = \frac{B_z + \frac{V}{c}E_y}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \end{aligned}\right\},$$

или

$$E_{y,z}' = \frac{\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right)_{y,z}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \; B_{y,z}' = \frac{\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}\right)_{y,z}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},$$

или

$$\vec{E}_{\|}' = \vec{E}_{\|}, \; \vec{B}_{\|}' = \vec{B}_{\|}, \; \vec{E}_{\perp}' = \frac{\left(\vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \; \vec{B}_{\perp}' = \frac{\left(\vec{B} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}\right)_{\perp}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

$$\text{При } \frac{V}{c} \ll 1:$$

$$\overbrace{\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{B}}^{\text{Сила Лоренца}}; \; \vec{B}' = \vec{B} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E};$$

9.2 Четыре-векторы

Координаты $(ct, x, y, z) \to (x^i); x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z;$

Любой вектор $\vec{A}(A^0, A^1, A^2, A^3)$ — контрвариантные координаты.

Преобразование <u>любого</u> 4-вектора одинаково

$$A^0 = \frac{\tilde{A}^0 + \frac{V}{c}\tilde{A}^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, A^1 = \frac{\tilde{A}^1 + \frac{V}{c}\tilde{A}^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, A^2 = \tilde{A}^2, A^3 = \tilde{A}^3.$$

Ковариантные координаты: $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$.

Рассматривается псевдоевклидова метрика $(+---)$, поэтому

$A_0 = A^0, A_1 = -A^1, A_2 = -A^2, A_3 = -A^3$, т.е. длина 4-вектора

$(\overline{A})^2 = \sum A_i A^i = A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = (A_0)^2 - (A_1)^2 - (A_2)^2 - (A_3)^2$, вспоминая, что длина — это инвариант и если уже знакомый нам инвариант — интервал $S^2 = inv$.

$$S^2 = \sum x_i x^i = x_0{}^2 - \underbrace{x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2}_{l^2} = c^2 t^2 - l^2.$$

4-импульс: $p^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \vec{p}\right)$ — сразу … преобразования

$\frac{\varepsilon}{c} = \frac{\frac{\varepsilon'}{c} + \frac{V}{c} p_x{}'}{\sqrt{\ }}; p_x = \frac{p_x{}' + \frac{V}{c}\frac{\varepsilon'}{c}}{\sqrt{\ }}$, и инвариант — длина 4-импульса: $inv = p^i p_i = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2$, мы знаем, что $\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$.

9.3 Электромагнитное поле

$$A^i = (\varphi, \vec{A}), m.o.$$

4-вектор — потенциал $\varphi = \frac{\tilde{\varphi} + \frac{V}{c}\tilde{A}^x}{\sqrt{\ }}, A^x = \frac{\tilde{A}^x + \frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{\ }},$

$$\varphi = \frac{\tilde{\varphi} - \frac{V}{c}\tilde{A}_x}{\sqrt{\ }}, A^x = \frac{\tilde{A}_x - \frac{V}{c}\varphi}{\sqrt{\ }},$$

$\vec{E}$ и $\vec{B}$ не входит в 4-вектор, они есть компоненты <u>тензора</u> эл.м. поля

$$F_{i,x} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Инварианты тензора (различные свертки, в данном случае их две)

$F_{ik}F^{ik} = inv \to B^2 - E^2 = inv,$

$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = inv \to \vec{E} \cdot \vec{B} = inv,$

$$\overbrace{e^{iklm}}^{\text{Тензор Леви-Чивитты}}, e^{0123} = 1,$$

Замена новых елементов меняет знак, если есть повторяющиеся индексы то $=0$,
e^{iklm} — абсолютный антисимметричный единичный вектор.

У Максвелла в 4-виде

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0;\to\begin{cases}\mathrm{rot}\,\vec{E}=0;\\ \mathrm{div}\,\vec{B}=0;\end{cases}$$

или

$$e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k}=0;$$

Вторая пара у Максвелла :

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=-\frac{4\pi}{c}j^i,\quad j^i\text{ — 4-ток: } j^i\left(cp,\vec{j}\right);$$

Следствие из inv у Максвелла:

1. $B^2-E^2=inv$, если $E^2>B^2$, то найдется такая ИСО, что B=0 и наоборот;
2. $\vec{E}\cdot\vec{B}=inv$, если в одной из ИСО $\vec{E}\perp\vec{B}$, то так будет в любой другой.