Тема: Колебания и волны

Часть I Колебания

1. Введение

Академик Мендельштам — «Колебания — это движения туда-обратно».

Периодические колебания $f(t+T)=f(t)$, T — период, частота $\nu=\dfrac{1}{T}$ ($\omega=2\cdot\pi\cdot\nu$ — круговая(циклическая) частота).

Встречаемые частоты (в 1/сек)

10^{-10} — вековое возмущение планет

10^{-8} — вращение планет

10^{-5} — приливы и отливы

10^{1} — колебания в машинах

10^{4} — акустические колебания

$10^{5}-10^{8}$ — УЗ, радиотелеграфия

10^{12} — ИК

10^{18} — рентген

10^{20} — γ - лучи

2. Свободные гармонические колебания

$m\ddot{x}=f(x)$ — пример из механики,

$f(x)\approx f(0)+xf'(0)+\ldots$

Равновесие $f(0)=0;\ f'(0)<0,$ обозначим $f'(0)=k$,

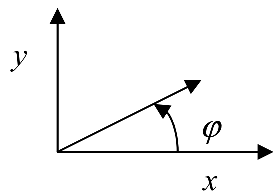
$m\ddot{x}=-kx$ — гармонический осциллятор.

Добавка в разложение слагаемых $x^2, x^3, \ldots$ — ангармонизм.

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi)\rightarrow\ddot{x}+\omega^2x=0,\omega^2=\frac{k}{m};$$

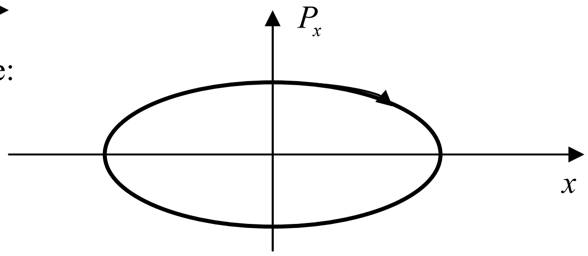
В полярных обозначениях $x(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi)}$;

$$(e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha, z=x+iy, z=pe^{i\alpha}, p=\sqrt{x^2+y^2}, tg\alpha=\frac{y}{x})$$

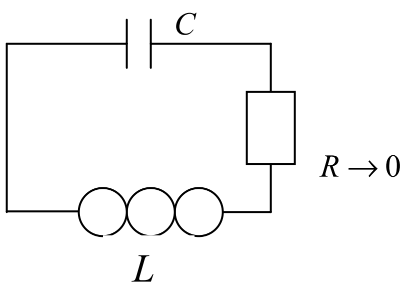


В фазовом пространстве:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{P_x^{\,2}}{A^2\omega^2m^2}=1;$$



Пример из «електричества»:



$$\varepsilon=-\frac{1}{C}\frac{d\Phi}{dt}, \text{ в СИ } \varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}$$

$\Phi=LJ, L$ — самоидукция;

$$\varepsilon = -L\frac{dJ}{dt};\ \varepsilon = \oint \vec{E}\,d\vec{r} = \frac{q}{C};\ J = \dot{q};$$

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{C} \to \ddot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} q = 0;$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC};\ T = 2\pi\sqrt{LC};$$

Закон сохранения энергии

$$\dot{\psi}x\left(\ddot{\psi}^2 + \psi^2\cdot\omega^2\right) = 0 \to \dot{\psi}\cdot\ddot{\psi} + \omega^2\cdot\dot{\psi}\cdot\psi = 0$$

$$\to \frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}^2 + \psi^2\cdot\omega^2\right) = 0 \Rightarrow \dot{\psi}^2 + \psi^2\cdot\omega^2 = const;$$

$$E = K + U = \frac{mV^2}{2} + \frac{m}{2}\omega^2 x = \frac{mV^2}{2} + \frac{\nu x^2}{2};$$

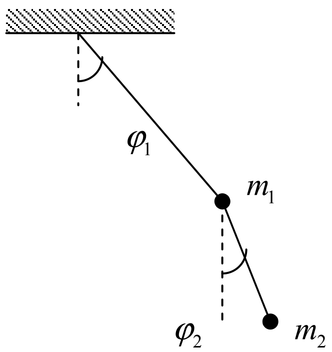
$$L\dot{J} - \frac{q}{C} = 0 \to \frac{1}{2}LJ^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = const;$$

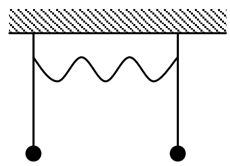
$$K = \frac{1}{2}LJ^2, U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

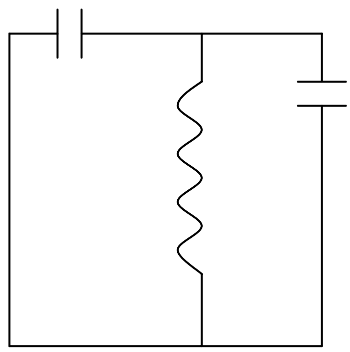
3. Гармонические свободные колебания с двумя степенями свободы

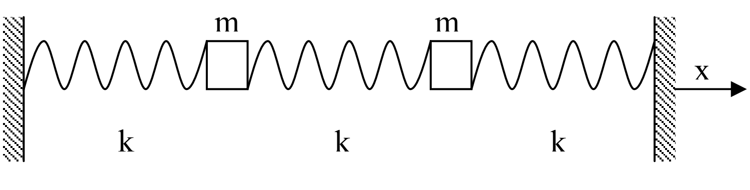
1.Линейность диф. уравнения
2.Однородность
$\Bigg\}\Rightarrow$ сумма решений есть решение.

Примеры:



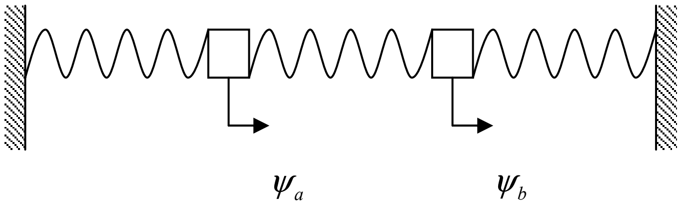






Упругие продольные колебания
(силы тяжести отсутсвуют)

Продольные колебания — вдоль OX



$$\left.\begin{aligned} F_a &= -k\psi_a + k(\psi_b - \psi_a) \\ F_b &= -k\psi_b + k(\psi_a - \psi_b) \end{aligned}\right\}$$

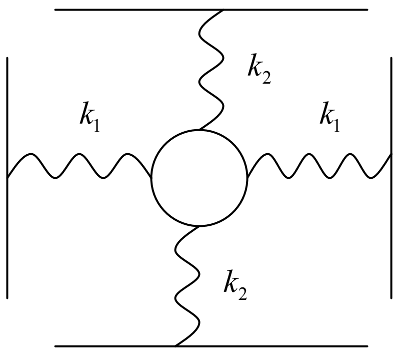
$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\psi}_a &= -2k\psi_a + k\psi_b \\ m\ddot{\psi}_b &= k\psi_a - 2k\psi_b \end{aligned}\right\}$$

$$\psi_1 = \psi_a - \psi_b; \psi_2 = \psi_a + \psi_b;$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\psi}_a &= -3k\psi_1 \\ m\ddot{\psi}_b &= -k\psi_2 \end{aligned}\right\}; \left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= 3\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}\right\}$$

ψ_1 и ψ_2 -- нормальные колебания,
собственные колебания,
гармоники,
нормальные моды.
моды

Еще один пример; Функции Лиссажу



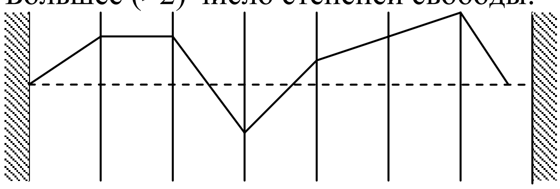
При малых отклонениях:

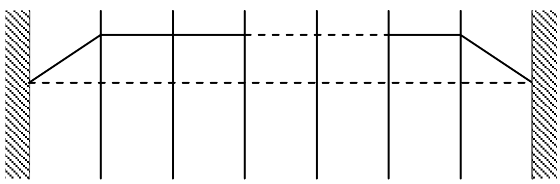
$$F_x = -2k_1x; mx = -2k_1x;$$

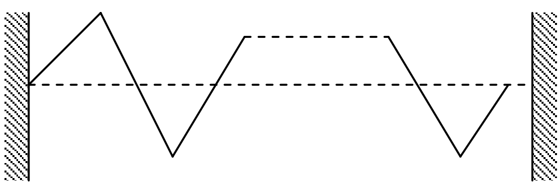
$$F_x = -2k_2y; my = -2k_2y;$$

$$\omega_x^2 = 2\frac{k_1}{m}, \omega_y^2 = 2\frac{k_2}{m};$$

Большее (>2) число степеней свободы:







Высокочастотная мода

4. Биения

$\psi = \psi_1 + \psi_2; \psi_1 = A\cos\omega_1 t, \psi_2 = A\cos\omega_2 t;$

$\psi_1 + \psi_2 = A\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right);$

$\omega_{ср} = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \omega_{мод} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2};$

$\omega_1 = \omega_{ср} + \omega_{мод};$

$\omega_2 = \omega_{ср} - \omega_{мод};$

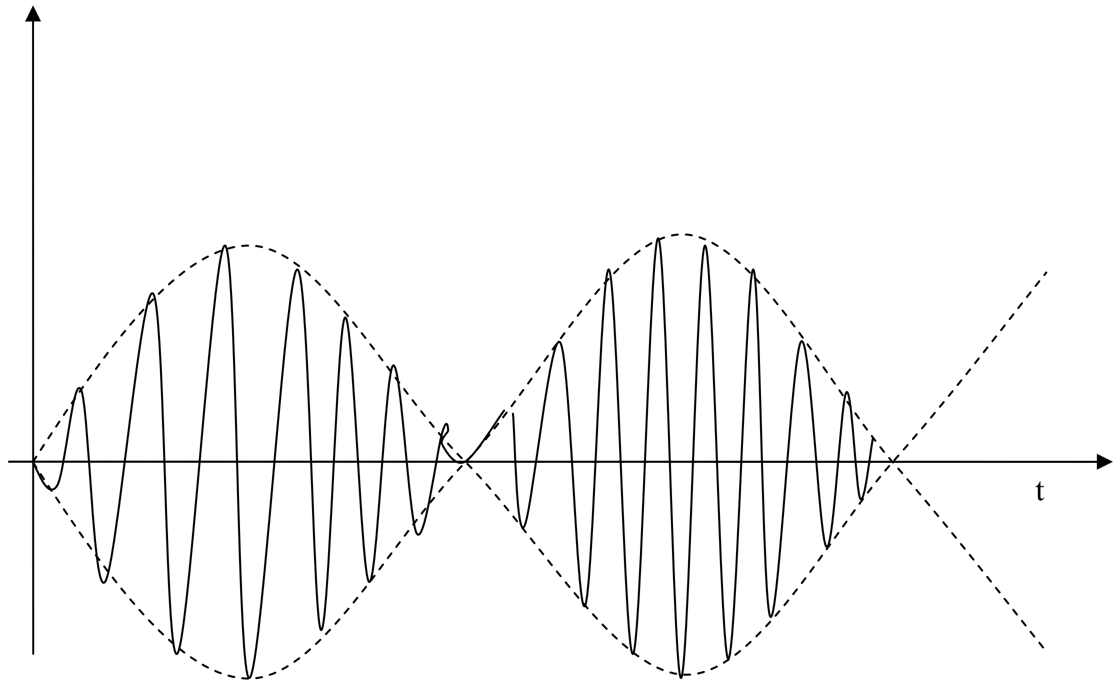
$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t;$

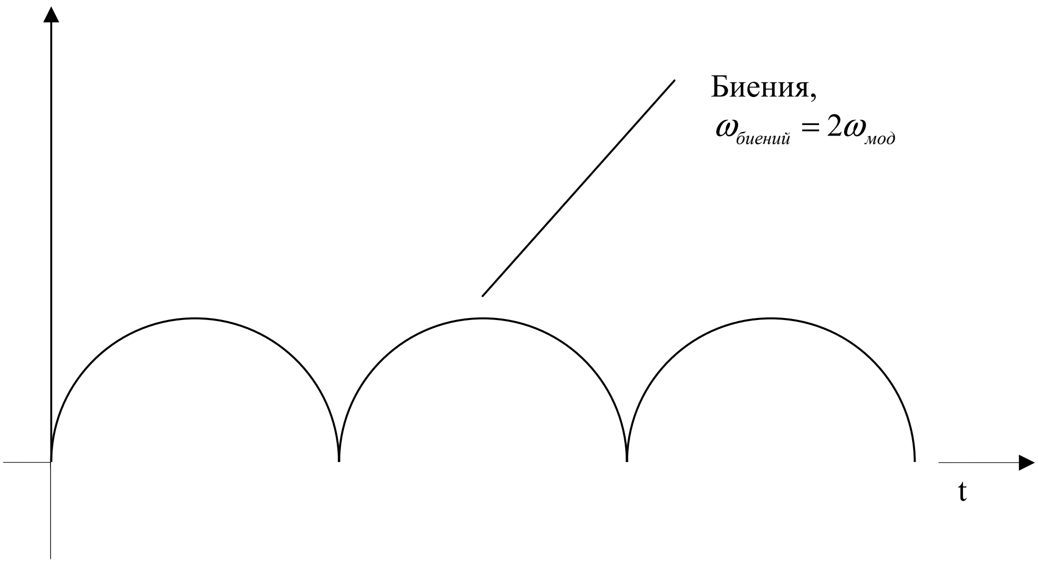
при $\omega_1 \approx \omega_2$ величина $2A\cos\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} t$ — изменяется намного медленнее $\cos\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$ и ее можно назвать амплитудой.

$\psi \approx A(t)\cos\omega_{ср} t, A(t) = 2A\cos\omega_{мод} t,$

$\omega_{мод} \ll \omega_{ср};$

$\psi = \psi_1 + \psi_2;$





5. <u>Ангармонический осциллятор</u>

$$m\ddot{x} = f(x), f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + ...;$$

Устойчивость $f'(0) < 0$, и выберем $f(0) = 0$

$$m\ddot{x} = -x\left|f'(0)\right| + \frac{1}{2}f''(0)x^2;$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\left|f'(0)\right|}{m}}_{\omega_0^{\,2}} x = \frac{1}{2}f''(0)x^2; \qquad x_0 \text{— амплитуда.}$$

$$\frac{1}{2}f''(0)x_0 \ll f'(0)$$

$$\varepsilon = \frac{xf''(0)}{2f'(0)} = \frac{x_0\frac{1}{2}f''(0)/m}{\omega_0^{\,2}}; \text{— малый параметр}$$

$$\frac{1}{2}f''(0)/m = \varepsilon\cdot\omega_0^{\,2}; \ddot{x} + \omega_0^{\,2}x = \varepsilon\cdot\omega_0^{\,2}x^2, \varepsilon \ll 1;$$

Как решать линейное уравнение:
Метод малого параметра (метод возмущений) $x(t) = A_0\sin\omega_0 t + x_1(t) = x_2(t) + x_1(t);$

$$x(t) = x_0\psi(t); \frac{d}{dt} = \omega_0\frac{d}{d\tau}; t = \frac{1}{\omega_0}\tau;$$

тогда уравнение колебаний примет вид $\ddot{\psi} + \psi = \underbrace{\frac{1/2\cdot f''(0)}{m}\frac{x_0}{\omega^2}}_{\varepsilon}\psi^2$

$$\boxed{\ddot{\psi} + \psi = \varepsilon\cdot\psi^2, \varepsilon \ll 1}$$

Ищем решение в виде $\psi(\tau)=\psi_0(\tau)+\varepsilon\cdot\psi_1(\tau)$. Подставляя в уравнение, получим:

$\ddot{\psi}_0+\psi_0+\varepsilon\cdot\ddot{\psi}_1+\varepsilon\cdot\psi_1=\varepsilon\cdot\psi_0{}^2+\varepsilon^3\cdot\psi_1{}^2+2\varepsilon^2\cdot\psi_1\psi_0;$

При ε^0: $\ddot{\psi}_0+\psi_0=0, т.е.\ \psi_0=\sin\tau;$

При ε^1: $\ddot{\psi}_1+\psi_1=\psi_1{}^2, или\ \ddot{\psi}_1+\psi_1=\sin^2\tau\leftarrow$ это уже линейное уравнение

$\sin^2\tau=\frac{1}{2}(1-\cos 2\tau), \ddot{\psi}_1+\psi_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\tau;$

$\psi_1=a+b\cos 2\tau; a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{6};$

$\psi_1=\psi_0+\varepsilon\cdot\psi_1=\sin\tau+\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{6}\varepsilon\cos 2\tau, \tau=\omega_0 t;$

Умножая на x_0 находим: $x(t)=x_0\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}x_0\varepsilon+\frac{1}{6}x_0\varepsilon\cos 2\omega_0 t$

Выводы: к ангармонизму приводят

1. Появление слагаемых с удвоенной частотой
2. смещение центра колебаний (расширение твердых тел при их нагреве)