

## Тема 9

### Электрические поля в веществе

1. Макроскопический (феноменологический) подход к описанию электрических полей в диэлектриках
2. Микроскопическое описание
3. Электрические поля на далеких расстояниях от заряженных тел
4. Поляризуемость газов

#### 1. Макроскопический подход...

В диэлектрике нет протекания токов. Поэтому, в отличие от металлов, в стационарном случае электрическое поле в диэлектрике  $\vec{e} = 0$ .

$\vec{e}(\vec{r})$  — неусредненное поле

$\vec{E}$  — усредненное, по физическим — по малому объему

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(x') dx$$

$$\text{rot } \vec{e} = 0 \rightarrow \langle \text{rot } \vec{e} \rangle = 0 \rightarrow \text{rot } \langle \vec{e} \rangle = 0 \rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$$

$$\text{div } \vec{e} = 4\pi\rho \rightarrow \dots \rightarrow \text{div } \langle \vec{e} \rangle = 4\pi\langle \rho \rangle$$

Если сторонних зарядов нет

$$\int \langle \rho \rangle dv = 0 \rightarrow \langle \rho \rangle = -\text{div } \vec{P}$$

$$\vec{P} / \Gamma = 0 \text{ и все тела}$$

$$\int \langle \rho \rangle dv = - \int \text{div } \vec{P} dv = - \oint \vec{P} d\vec{S} = 0$$

$\vec{P}$  — вектор диэлектрической поляризации

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\langle \rho \rangle, \quad \text{div } \vec{E} = -4\pi \text{div } \vec{P}$$

$$\text{div } (\vec{E} + 4\pi\vec{P}) = 0, \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \epsilon$$

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = 0}$$

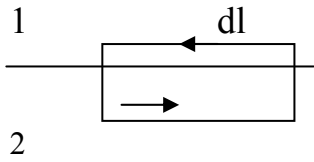
$$\text{СИ} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$\vec{D}$  — электрическая индукция.

При наличии сторонних зарядов ст.

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho_{cm}$$

Граничные условия



$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \rightarrow E_{\tau 1}|_{\Gamma} = E_{\tau 2}|_{\Gamma}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \rightarrow D_{n1}|_{\Gamma} = D_{n2}|_{\Gamma}$$

Связь между  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  для каждого вещества свое, но наиболее часто

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{см } \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E})$$

диэлектрическая проницаемость

$$\vec{P} = \chi \vec{E}$$

$\vec{P} = \chi \vec{E}$ , диэлектрическая восприимчивость

$$\epsilon \vec{E} = \vec{D} = \vec{E} + 4\pi \chi \vec{P},$$

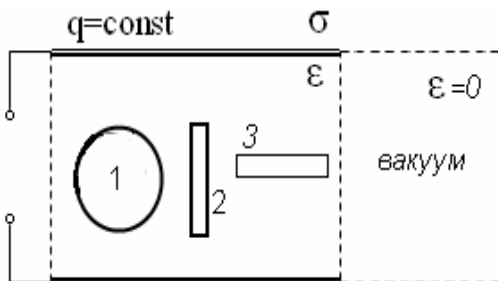
$$\epsilon = 1 + 4\pi \chi$$

Еще раз о ГУ

$$E_{\tau 1}|_{\Gamma} = E_{\tau 2}|_{\Gamma}, \quad \epsilon_1 E_{n1}|_{\Gamma} = \epsilon_2 E_{n2}|_{\Gamma}$$

Однородный диэлектрик  $\epsilon = \text{const}$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \chi \vec{P} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{P} = 0, \quad \langle \rho \rangle = 0$$



		E	P	D
1	8	$4\pi \frac{\delta}{\epsilon}$	9	$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \delta$
2	10	$4\pi \frac{\delta}{\epsilon}$	11	12
3	4	4	3	2
4	5	4	6	7

1 – находим из  $\oint \vec{D} d\vec{\delta} = 4\pi \int \rho_{cm} dv$

Неоднородный диэлектрик ( д.3)

$$\langle \rho \rangle = -\operatorname{div} \vec{P} \quad , \quad \vec{P} = \chi \vec{E} = \frac{\chi}{\epsilon} \vec{D} \quad , \quad \chi = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \vec{D}$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \operatorname{div} \left( \frac{\epsilon - 1}{4\pi\epsilon} \vec{D} \right) = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{D} + \frac{\vec{D}}{4\pi} \operatorname{grad} \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) = \dots = \frac{\vec{E}}{4\pi\epsilon} \operatorname{grad} \epsilon$$

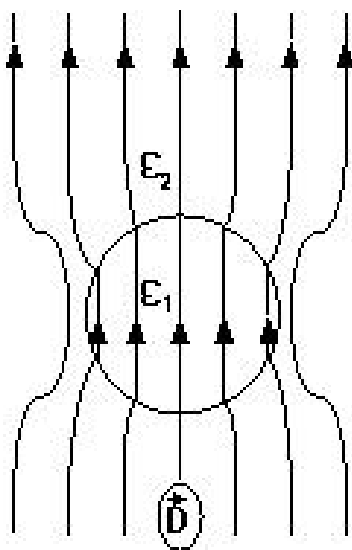
$$\langle \rho \rangle = -\frac{\vec{E}}{4\pi\epsilon} \times \operatorname{grad} \epsilon$$

Задача о эффективных значениях <sup>e</sup>

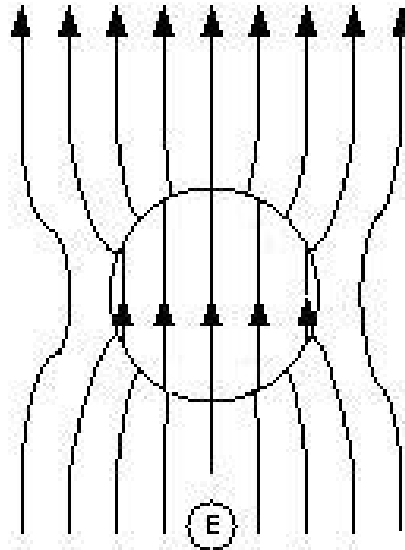
$$\epsilon^e = \epsilon_1 + \rho \frac{3(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \times \epsilon_1 \quad \text{Максвелл, Бруггеман, Максвелл - Гарнет,}$$

Ландауер,...

Диэлектрический шар во внешнем однородном поле



1 2

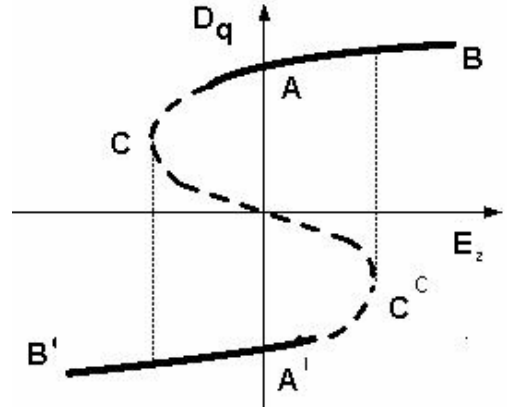
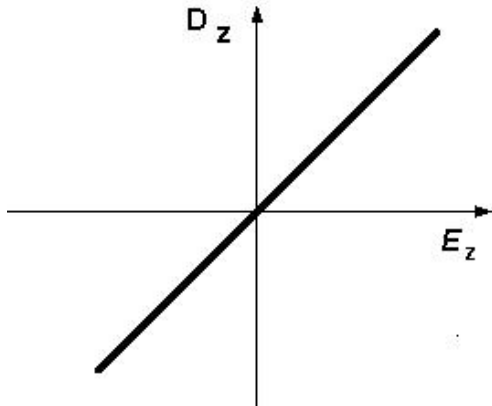


1 2

Кристаллы  $\vec{D} = \hat{\epsilon} \vec{E}$  ( $\vec{D}_i = \epsilon_{iK} \vec{E}_K$ )

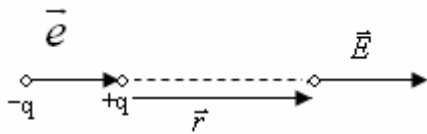
Линейный диэлектрик

Сегнето-электрик



## 2. Микрописание

### 1. Электрический диполь



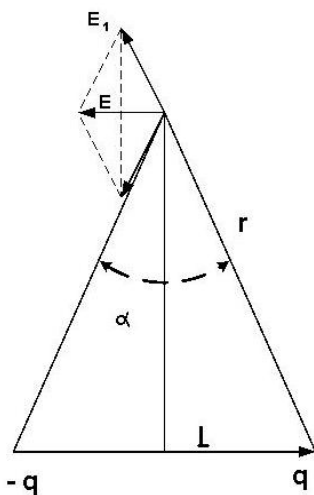
$$l \ll r$$

$$E = q \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right) = q \frac{r^2 + 2rl + l^2 - r^2}{r^2(r+l)^2} \approx q \frac{2rl}{r^4} = 2 \frac{ql}{r^3}$$

$$E = 2 \frac{P}{r^3}$$

$$p = ql$$

$$\vec{E}_{\parallel} = 2 \frac{\vec{P}}{r^3}$$

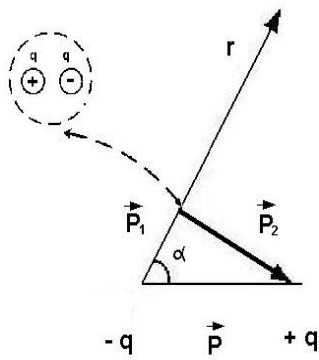


$$\alpha \approx \frac{l}{r}$$

$$E = 2 E_1 \sin \frac{\alpha}{2} \approx 2 E_1 \times \frac{\alpha}{2} = E_1 \alpha = \frac{a}{r^2} \frac{l}{r} = \frac{ql}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\perp} = -\frac{\vec{P}}{r^3}$$

Общий случай



$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{1}{r^3} (2\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = \frac{1}{r^3} (3\vec{P}_1 - \vec{P})$$

$$\vec{P}_2 = \vec{P} - \vec{P}_1$$

$$P_1 = P \cos \alpha$$

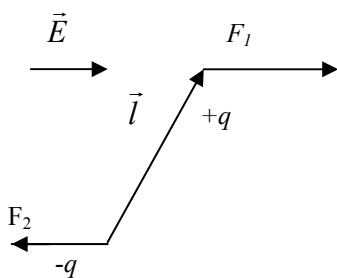
$$\vec{P} \cdot \vec{r} = P \cdot r \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{P \cdot r}$$

$$P_1 = P \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{P \cdot r} \rightarrow \vec{P}_1 = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^2} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{r^3} (3\vec{P}_1 - \vec{P}) = \frac{3(\vec{P} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{P}}{r^3}$$

Силы, действующие на диполь в электрическом поле:

Однородное поле



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F} = q \cdot \vec{l} \times \vec{E} = \vec{P} \times \vec{E} \quad , \quad \boxed{\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}}$$

(сравнить с магнитным моментом!)

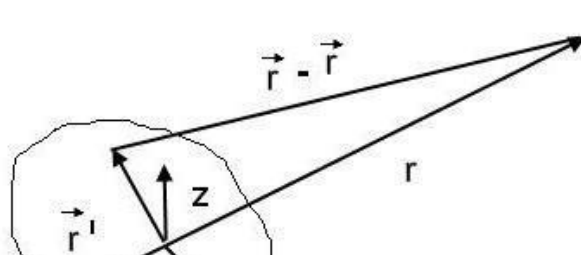
Неоднородное поле

взять  $d\vec{l}$       $d\vec{E} = (d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E}$

$$\vec{F} = q d\vec{E} = (q d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E}$$

$$\vec{F} = (\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E}$$

### 3. Электрические поля на далеких расстояниях от заряженных тел.



$$|\vec{r}| \gg l \quad |\vec{r}'| \ll r$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\rho = \rho(\vec{r}')$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$E(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \cdot dv'$$

Разложим на  $r'/r \ll 1$

$$f(\vec{r}') \approx f(0) + \nabla_{r'} \cdot f(\vec{r}') \Big|_{\vec{r}'=0} \times \vec{r}' + \dots$$

$$\nabla_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\vec{r}'=0} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad f(0) = \frac{1}{r}$$

т.о.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \approx \underbrace{\frac{1}{v} \int \rho(r') dv'}_q + \frac{\vec{r}}{r^3} \int \rho(\vec{r}') \cdot \vec{r}' dv' + \dots$$

q

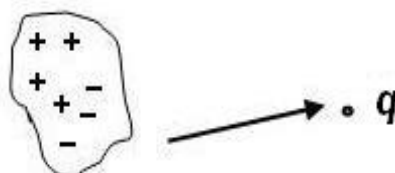
$$\int \rho(\vec{r}) \vec{r} dv = \int \vec{r} [\rho^+(\vec{r}) + \rho^-(\vec{r})] dv = \int \vec{r} \rho^+ dv + \int \vec{r} \rho^- dv \Rightarrow$$

введем  $\vec{r}^+ = \frac{1}{q} \int \vec{r} \rho^+(\vec{r}) dv,$

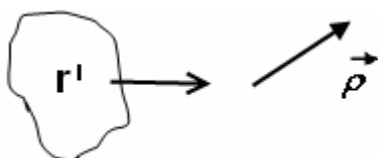
$$\vec{r}^- = -\frac{1}{q} \int \vec{r} \rho^-(\vec{r}) dv^- \quad (\text{ср. с центром масс!})$$

$$\Rightarrow = q\vec{r}^+ - q\vec{r}^- = q(\vec{r}^+ - \vec{r}^-) = \vec{P}, \quad l = \vec{r}^+ - \vec{r}^-$$

нулевое приближение

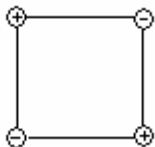


Первое приближение (если  $q = 0$ )



## ДИПОЛЬ

Второе приближение ( $\vec{P} = 0$ ) квадруполь



### 4. Поляризуемость газов неполярные молекулы

$\vec{P} = n \vec{p}$      $n$  — числа атомов газа в единице объема

$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \beta n \vec{E} \quad = \quad n$$

$$= 1 + 4 \quad = 1 + 4 \quad n$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{n} = const \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon - 1}{\rho_{\text{газа}}} = const}$$

В плотных газах более сложно

$$\frac{1}{\rho_{\text{газа}}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = const \quad \text{формулы Мосотти-Клазиуса}$$

↙ не зависит от температуры

полярные молекулы    есть  $\vec{P}_0$

$-(\vec{P}_0 \cdot \vec{E}) = U$  — потенциальная энергия распределение энергия Больцмана —

главный параметр  $\frac{\vec{P}_0 \cdot \vec{E}}{KT}$  без вывода (см. Сивухин)

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi n P_0^2}{3KT}$$

Дополнительно

Пьезоэлектричество — Пьер и Жак Кюри — 1880 кварц

Пироэлектрики — турмалин.

## Тема 10

### Магнитные поля в веществе

1. Феноменологические описания
2. Микроскопическое описание

#### 1. Феноменологические описания

Магнитное поле возбуждается 1) токами проводимости и 2) движением заряженных частиц внутри молекул и атомов

$j_m$  молекул. токи

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \frac{4\pi}{c} (J + J_{mol}) \quad \text{или} \quad \text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_m)$$

Введем вектор намагниченности  $\vec{I}$  — средний магнитный момент единицы объема

$$\vec{I} = n \vec{P}_m, \quad \vec{P}_m \text{ — средн. магн. момент молекул}$$

$n$  — число молекул в един. объема

$$\vec{j}_m = c \text{rot} \vec{I}$$

$$\text{при } j = 0 \quad \cdot \quad - \text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_m = 4\pi \text{rot} \vec{I} \quad \text{или}$$

$$\text{rot} \underbrace{(\vec{B} - 4\pi \vec{I})}_{\vec{H}} = 0$$

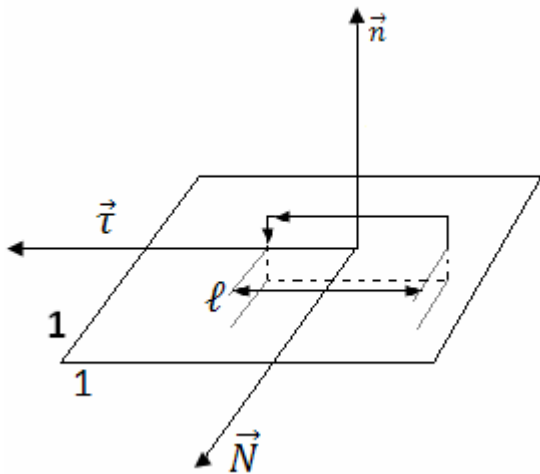
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I}, \quad \vec{H} \text{ — напряж. магн. поля}$$

Система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} \end{array} \right\} \Gamma \quad \left. \begin{array}{l} \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \vec{j} \end{array} \right\} Cu$$



### Граничные условия



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \rightarrow \oint \vec{B} d\vec{S} \rightarrow B_{1n}|_{\Gamma} = B_{2n}|_{\Gamma}$$

ГУ1

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} d\vec{S}$$

Поверхностный ток  $i_q : J = i_N \cdot l$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = (H_{2\tau} - H_{1\tau})l$$

$$(H_{2\tau} - H_{1\tau})l = \frac{4\pi}{c} i_N \cdot l$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

ГУ2

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость:

$$\vec{I} = \chi \vec{H} \quad \chi - \text{магнитная восприимчивость}$$

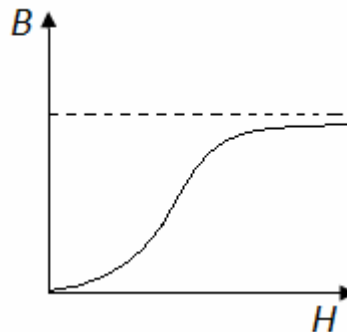
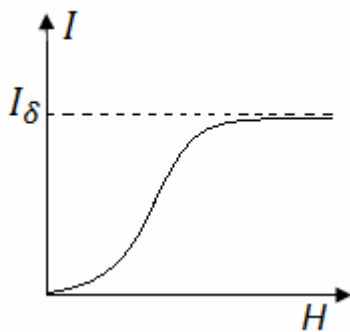
$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I} = (1 + 4\pi \chi) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{в СИ } \mu \Rightarrow \mu_0 \mu)$$

магнитная проницаемость

$$\left. \begin{array}{l} \chi > 0 - \text{парамагнетик вещества} \\ \chi < 0 - \text{диамагнетики} \end{array} \right\} \mu \approx 1$$

Ферромагнетики



Доменная структура точка Кюри, фазовый переход второго рода.

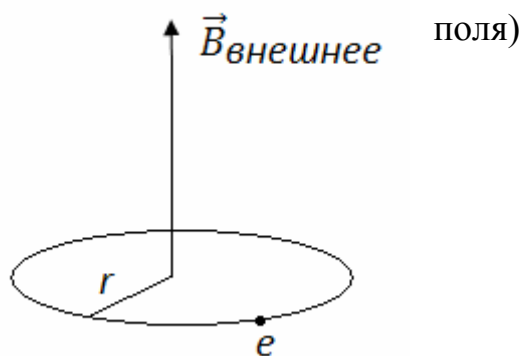
## 2. Микроскопическое описание

Теорема Бора (1911), Ван – Лёвен (1920)

В сост. т.д. равновесия системы электрических заряженных частиц, помещаемая в постоянное магнитное поле не имеет магнитного момента, если она подчиняется законам классической физики.

Ланжевен 1905 г. (опирается на факты, не объяснимые в классич. Физике) – объяснение для парамагнетарные

Диамагнетики: (воз... ослабленного



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 2\pi r E \quad 2\pi r E = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

момент сил  $M = -reE$  ( $\ominus$  тормозит)

$$mr^2 \frac{d\Omega}{dt} = M = -reE = re \frac{1}{2\pi r c} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$mv^2 \Omega = \frac{e}{2\pi c} \Phi(t) + c^0$$

$$\Omega = \frac{e}{2\pi cmr^2} \Phi = \frac{e}{2\pi m r^2 c} B \pi r^2$$

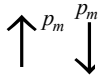
$$\Omega = \frac{eB}{2mc}$$

Ларморова частота

Парамагнетарные:

Магнитные диполи – магнитные моменты

$$U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad \text{потенциальная энергия}$$



Модель – два возможных положения

$$\text{Больцман} \quad n_1 = c e^{\frac{p_m B}{kT}}, \quad n_2 = c e^{-\frac{p_m B}{kT}}$$

$$\vec{P}_m \parallel \vec{B} \qquad \qquad -\vec{P}_m \parallel \vec{B}$$

$$n_1 + n_2 = n = \text{const}$$

$$n = n_1 + n_2 = c (e^+ + e^-)$$

$$c = \frac{n}{e^+ + e^-}$$

$$\text{Намагниченность} \quad I = (n_1 - n_2) p_m = c (e^+ - e^-) p_m = n p_m \frac{e^+ - e^-}{e^+ + e^-} = n p_m \operatorname{th} \frac{p_m B}{kT}$$

Общий случай

$$I = n p_m L(x), \quad L(x) \quad \text{функция Ланжевана}$$

$$L_{(\text{два})}(x) = \operatorname{th} x \qquad L_{(\infty)}(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$$

$$L_2(x) = \operatorname{th} x \approx x + \dots$$

$$L_{\infty}(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \approx \frac{1}{3} x$$

$$x = \frac{p_m B}{kT}$$

$$I_{(2)} = \frac{n p_m^2 B}{kT} \qquad I_{\infty} = \frac{n p_m^2 B}{3kT}$$

Закон Кюри (для слабых полей)

$$\frac{1}{T}$$

Д.....: 1) опыт Эйнштейна – де Гааза

2) опыт Баркгаузена (значения  $10^{-6} \text{см}^3, 1$  до 2-3 мм)

## Сверхпроводники и магнитное поле

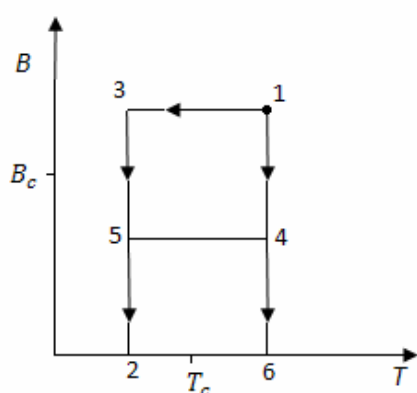
1911 г. Камерлинг-Оннес Hg  $T_c = 4.15$  К при переходе через  $T_c$  сопротивление падает в  $10^{17}$  раз. Кольцо с

Двухплоскостная модель.

Переменные поля.

До 1933 г (22 года со времени открытия сверхпроводимости) считалось, что Сверхпроводимость идеальный проводник

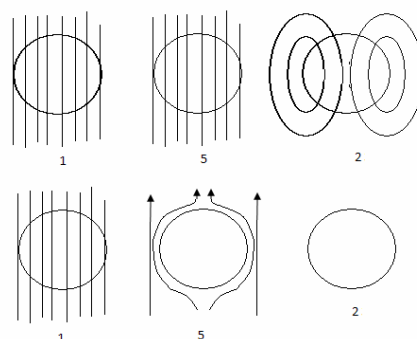
Майслер и Оксенфельд 1933 г.



Пути 1352

1452

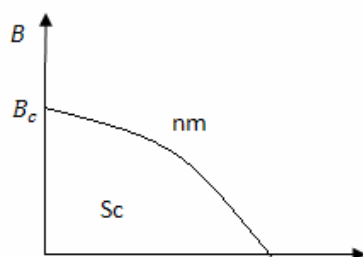
1462



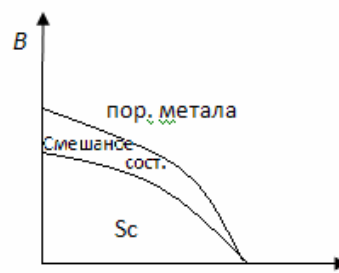
Сверхпроводники I и II рода (вихри Эбрикосова)

I род  $B = B_0 e^{-\frac{z}{\Lambda}}$   $\Lambda \sim \frac{1}{\sqrt{n_s}}$   $n_s \sim T_c - T$

$\Lambda \sim 10^{-6}$  см



Sc I-рода



Sc II-рода

HTSP (ВТСП) 1986 Бернхард Мюллер

La Ba Cu O      11 К      (123 керамика)

.....

Tl Ba Ca Cu O      - 118 К