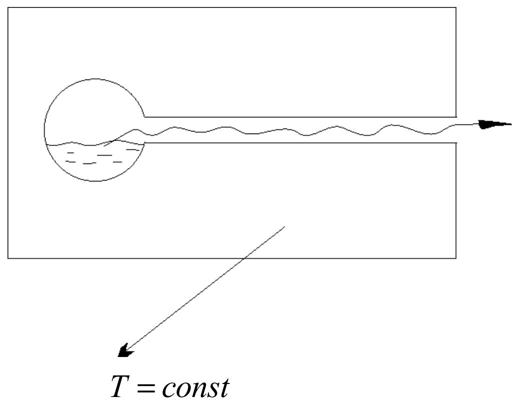
ТЕМА 2. ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

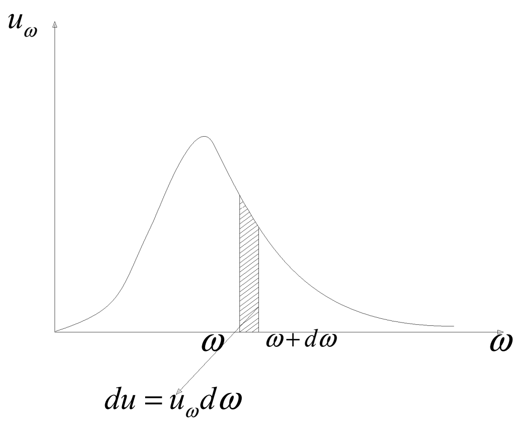
1.Равновесное излучение

Т.д. равновесие с веществом

Свойства:

1) Зависит только от Т стенок
2) Изотропно
3) Однородно
4) Неполяризовано





u – количество энергии в еденице объема

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \int_0^\lambda u_\lambda d\lambda$$

$$u = \frac{4\pi}{c} J$$

$$u_\omega = \frac{4\pi}{c} J_\omega , \quad J = \int_0^\infty J_\omega d\omega$$

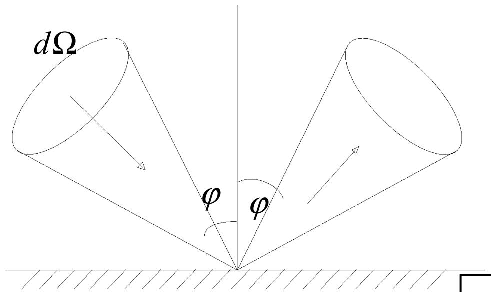
J - удельная интенсивность излучения

J_ω- электронная интенсивность излучения

Поток простой энергии, проходящий за dt через площадку ds в телесном угле $d\Omega$

$$d\Phi = J ds d\Omega dt$$

2.Закон Кирхгофа



Падает - $J_\omega d\omega ds dt d\Omega a s \varphi$

излучается - $(1 - A_\omega) J_\omega$, A_ω - поглощение

измеряется $E_\omega d\omega ....$, E_ω - излучательная способность

При равновесии: падает = отражается + излучается

$$J_\omega = (1 - A_\omega) J_\omega + E_\omega$$

Закон Кирхгофа: 1859 $\boxed{J_\omega = \frac{E_\omega}{A_\omega}}$ эксперимент Прево 1809.

т.к J_ω не зависит от свойств стенок, то E_ω / A_ω - универсальная функция T_ω и ω одинакова для всех тел

Пример: зеленая и красная поверхность

Абсолютно черное тело $A_\omega = 1$

$u_\omega = u_\omega(T, \varphi)$ - эту функцию и надо найти

3.Закон Стефана – Больцмана

$u = aT^4$ - для абсолютно черных тел.

Пример абсолютно черного тела в визуальном диапазоне - Солнце!

4.Теорема и закон смещения Вина

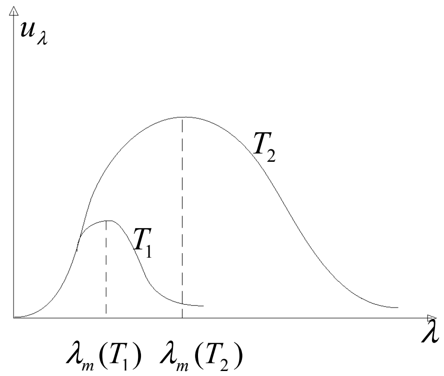
$u_\omega(\omega, T) = T^3 \varphi(\omega / T)$ или

$u_\omega(\omega, T) = \omega^3 f(\omega / T)$

В терминах λ $\quad \lambda d\omega = -d\lambda \quad \begin{pmatrix} \omega\lambda = 2\pi c \\ d(\omega\lambda) = 0 \end{pmatrix}$

$u_\lambda = T^5 \varphi_1(\lambda T) \quad x = \lambda T \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = 0 \quad x_c - \max \varphi_1$

$x_c = \lambda_m T \quad \boxed{\lambda_m T = b}$ закон смещения



5.Формула Рэлея-Джинса

В рамках классической физики в 1900 г. Рэлей, через 5 лет развит Джинсом.

Теорема классической физики: О равно распределению энергии по степеням свободы в т.д.р.

На каждую степень свободы - $\frac{1}{2}kT$

Самое главное найти число степеней свободы для эл. магн. поля в полости в т.д.р.

Рассмотрим скалярное поле $A(\vec{r},t)$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

Полость – куб с ребрами *l,* волны стоячие

$A(\vec{r},t) = X(x)Y(y)Z(z)l^{irt}$

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \frac{\omega^2}{c^2}XYZ = 0$$

из уравнения

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -(\frac{\omega}{c})^2$$

$$\frac{X''}{X} = -q_x^2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -q_y^2, \qquad \frac{Z''}{Z} = -q_y^2$$

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = (\frac{\omega}{c})^2 \quad (\equiv \vec{q}^2) \qquad q^2 = (\frac{\omega}{c})^2$$

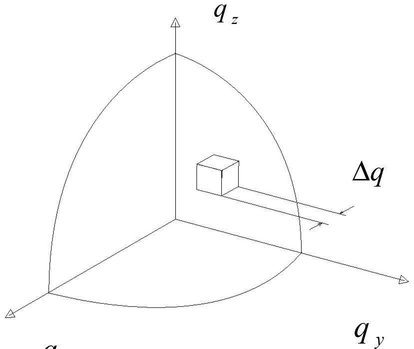
$$X'' + q_x^2 X = 0 \rightarrow X_{(x)} = \sin(q_x x + \delta_x)$$

$$X_{(x)}|_{x=0,l} = 0 \quad \delta_x = 0 \quad q_x = \frac{m_x \pi}{l}$$

$$A(\vec{r},t) = \mathbb{C}\sin q_x x \sin q_y y \sin_z z l^{i\omega t}$$

$\uparrow$ const, не важна для определения числа степеней

Данную стоячую волну задает тройка чисел m_x, m_y, m_z



$$\Delta q_x = \frac{\pi}{l} \qquad V_{\Delta q} = (\frac{\pi}{l})^3$$

каждая стоячая волна это узел кубической решетки.

Объем части сферы с радиусом q

$$\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi q^3 = \frac{\pi}{6}q^3,$$

Z - узлов $\qquad Z = \dfrac{\frac{\pi}{6}q^3}{(\frac{\pi}{l})^3} = \dfrac{l^3}{6\pi^2}q^3 = \dfrac{V}{6\pi^2}(\dfrac{\omega}{c})^3$

$\boxed{dZ = \frac{V}{2\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega}$ - это и есть число степеней свобод в диапазоне $(\omega, \omega + d\omega)$

$\frac{1}{2}$kT – на электрическую степень свободы, $\frac{1}{2}$kT – на магнитную, т. о. kT – на степень свободы.

+ две поляризации, т. е. в dZ надо умножить на 2

$$dZ = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

$$kTdZ = \underbrace{Vu_\omega d\omega}_{\text{энергия в полости объёмом } V}, \quad V = l^3$$

$$u_\omega = \frac{kT}{V}\frac{dZ}{d\omega} = \frac{kT}{V}\frac{V}{\pi^2 c^3}\frac{\omega^2 \cancel{d\omega}}{\cancel{d\omega}} = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2$$

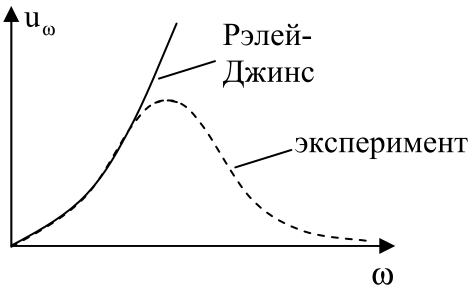
$$\boxed{u_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2} \text{ – Формула Рэлея-Джинса}$$

Анализ формулы Рэлея-Джинса

$u_\omega = \dfrac{\overline{\varepsilon}}{\pi^2 c^3}\omega^2$, $\overline{\varepsilon} = kT \leftarrow$ классическая физика

Ультрафилетовая катастрофа

$$u = \int_0^\omega u_\omega d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\int_0^\omega \omega^2 d\omega \to \infty$$



6. Формула Планка

Согласно идее Планка, рассматриваем не само излучение, а осциллятор, помещённый в полость с равновесным излучением.

Согласно электродинамике и статической физике (классической)

$u_\omega = \dfrac{\overline{\varepsilon}}{\pi^2 c^3}\omega^2$ (Формула Рэлея-Джинса),

теперь $\overline{\varepsilon}$ – средняя энергия осциллятора, он поглощает и излучает и находится в термодинамическом равновесии с излучением.

Для классического осцилятора $\overline{\varepsilon} = kT$ (½kT на кинетическую, ½kT на потенциальную)

<u>Гипотеза Планка:</u> гармонический осциллятор излучает и поглощает энергию конечными порциями

$0,\ \varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ 3\varepsilon_0,\ ... \quad \varepsilon_n = n\varepsilon_0$

Найдём в этом случае $\overline{\varepsilon}$. Сначала классический случай:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\varepsilon}$$

Обозначим $\beta = \dfrac{1}{kT}$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\varepsilon\beta} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\varepsilon\beta} d\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\int_0^\infty e^{-\varepsilon\beta}d\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(-\frac{1}{\beta}e^{-\varepsilon\beta}\Big|_0^\infty\right) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(-\frac{1}{\beta}(0-1)\right) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\frac{1}{\beta} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\ln\beta = \frac{1}{\beta} = kT \qquad \overline{\varepsilon} = kT$$

Теперь согласно гипотезе Планка

$$\overline{\varepsilon}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta\varepsilon_n},$$

$$\varepsilon_n=n\varepsilon_0 \quad \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta n\varepsilon_0}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\beta\varepsilon_0}\right)^n=\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-\text{сумма бесконечной геом. прогрессии}\right)$$

$$\overline{\varepsilon}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(1-e^{-\beta\varepsilon_0}\right)=\frac{\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0}}{1-e^{-\beta\varepsilon_0}}=\frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0}-1};\ \overline{\varepsilon}=\frac{\varepsilon_0}{e^{\beta\varepsilon_0}-1}$$

Подставим $\overline{\varepsilon}$ в $u_\omega=\frac{\overline{\varepsilon}}{\pi^2c^3}\omega^2$:

$$u_\omega=\frac{\omega^2\varepsilon_0}{\pi^2c^3\left(e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}-1\right)}$$

Заметим, что теореме Вина это не противоречит, если $\varepsilon_0\sim\omega$

$$u_\omega=\omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

Коэффициент пропорциональности и есть постоянная Планка $\hbar$

$$\varepsilon_0=\hbar\omega$$

$$\boxed{u_\omega=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}-1}}\ \text{– формула Планка}$$

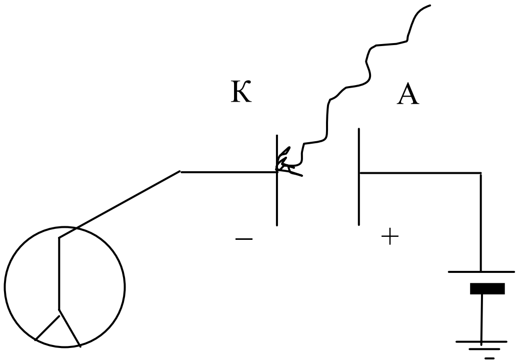
$$\varepsilon=n\hbar\omega$$

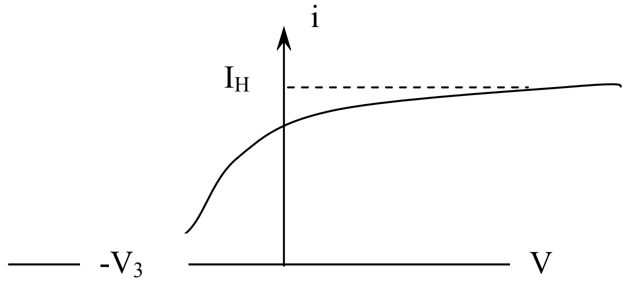
Тема 3. Опыты, приведшие к КМ.

1. Фотоэффект – А. Эйнштейн 1905
2. Опыт Майера-Герлиха 1914
3. Эффект Комптона 1922
4. Опыт Девинона-Джершара 1927
5. Волны де Бройля

1. 1987 – Г. Герц – проскакивание искры при освещении цинковых шариков разрядника УФ-светом.

1888-1890 А. Г. Столетов - испускаемые заряды имеют отрицательный знак
- наибольшее действие оказывает УФ





i – величина потока
$i_н$ – величина насыщения
V_3 – запирающее напряжение

1) Количество имитируемых e^-
2) Максимальная скорость фотоэлектронов $v_{max}= f(\omega)$, но не зависит от I (закон Ф. Ленарда)
3) Красная граница – фотоэффект не наблюдается при $\lambda > \lambda_{max}$ ($\omega < \omega_{max}$), характеристика вещества и не зависит от I (Закон Столетова)
4) $V_3 = a\,\omega - \varphi$, а не зависит от свойств облучаемого вещества (закон Милликена).

А. Эйнштейн $\frac{1}{2}\cdot mv_{\max}^2 = h\nu - A_{вых}$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot mv_{\max}^2 = h\omega - A_{вых}\right),\ h = 6.63\cdot 10^{-34}\,\frac{Дж}{Гц}$$

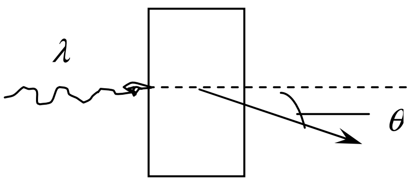
2. Опыт Майера-Герлиха

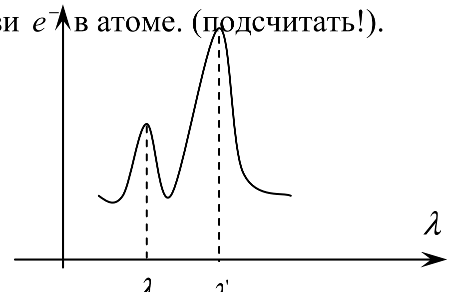
Фотоэффект на металлических частицах – металлическая пыль

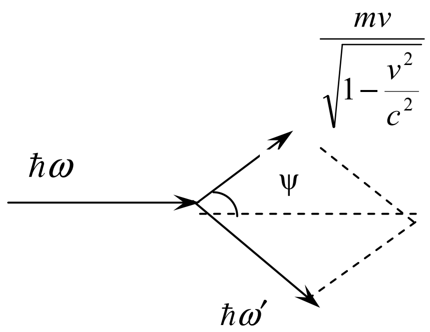
Выцветание ткани!

3. Эффект Комптона

рассеивание лучей в газах и веществах с легкими атомами – парафин, Li, Be, B, … $h\nu_{рект}$ в тысячи раз превосходит энергию связи e^- в атоме. (подсчитать!).







	До соударения		После соударения	
	e^-	γ	e^-	γ
энергия	$\frac{m_0c^2}{\sqrt{\ }}$	$\hbar\omega$	E_e	$\hbar\omega'$
импульс	0	$\hbar\omega$/c	P_e	$\hbar\omega'$/c

Закон сохранения энергии $\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Закон сохранения импульса OX : $\hbar\omega$/c = $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ cos ψ + cosφ* $\hbar\omega'$/c

OZ : 0 = $-\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ sin ψ + sinφ* $\hbar\omega'$/c

Решение системы уравнений $\hbar\omega$ *c(ω – ω`) = ω* ω` (1 – cosφ), т.е. ω : ω` после преобразований.

λ` – λ = 2 $\lambda_0 \sin^2(\varphi/2)$, где $\lambda_0 = \frac{h}{\mu_0 c}$ – длина волны;

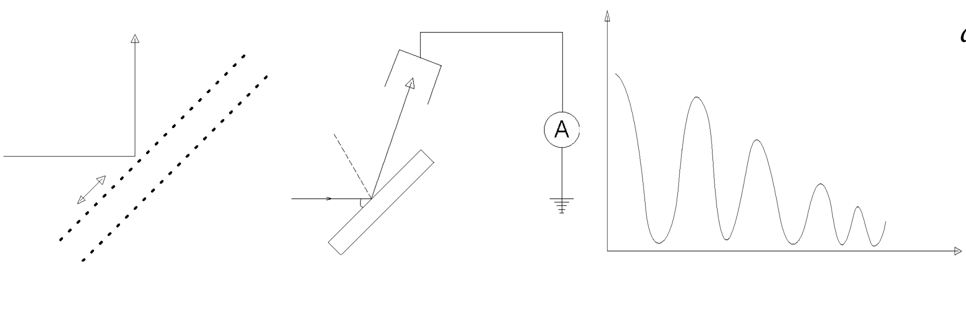
Д/З : вывести соотношение λ` – λ

4.Опыт Девидсона-Джеммера

Опыт Девитсона-Дженера – отражение пучков от поверхности металла

$2d\sin\alpha = k\lambda$

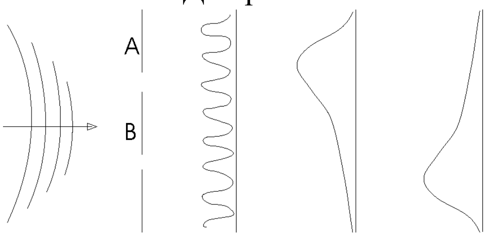
d -постоянная решетки



Оказалось $\lambda \approx \dfrac{1}{p}$, точнее $\lambda = \dfrac{h}{p}$

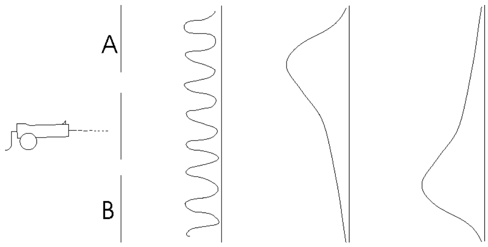
5. Волны де Бройля

«В оптике в течение столетия слишком пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым; не делалась ли в теории вещества обратная ошибка?» Л. Де Бройль



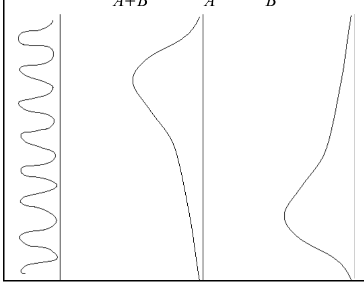
J – интенсивность

$J_{A+B} \neq J_A + J_B$



$J_{A+B} = J_A + J_B$ – пуля

$J_{A+B} \neq J_A + J_B$



электрон
! но на очень малых расстояниях

Волна – принцип суперпозиции $\vec{E}_\Sigma = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, $J = |\vec{E}|^2$

$E = f(\vec{r})e^{i\omega t}$ аналогия $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$

ψ_1 – амплитуда вероятности, при прохождении отверстия А

ψ_2 – амплитуда вероятности, при прохождении отверстия В

$P(\vec{r})$ – вероятность попирания

$P(r) = |\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$, $P = |\Sigma\psi|^2$, но $|E|^2 = J = |E_1 + E_2|^2$ не $\Sigma|\psi|^2$!

Не частица, не волна – «кентавр»

де Бройль : $\lambda = \dfrac{h}{p}$ или $\vec{k} = \dfrac{\vec{p}}{\hbar}$ 1923г., 1925г.

$$E = E_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \qquad E = \hbar \omega = \hbar \nu \qquad \omega = \frac{E}{\hbar} = 2\pi\frac{E}{h},$$

$$\psi = \psi_0 e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x \cdot x - E \cdot t)} \qquad k_x = \frac{p_x}{\hbar} = 2\pi\frac{p_x}{h}$$

ТЕМА 4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1.Уравнение Шрёдингера 1926
2.Трактовка волновой функции
3.Понятие об операторах
4.Уравнение Шрёдингера как операторный закон сохранения энергии
5.Принцип (соотношение) Гайзенберга
6.Измерение

<u>1.Уравнение Шрёдингера</u>

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi+U(\vec{r},t)\Psi} \quad (1)$$

Стационарный случай U - не зависит от t (и Г.У.)

$$\Psi(\vec{r},t)=\Psi(\vec{r})e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (2)$$

$(2)\rightarrow 1$

$$\boxed{\nabla^2\Psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)(\vec{r})\Psi=0} \quad (3)$$ стац. у. Ш.

Частный случай: $U=0$ - свободная частица

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi=E\Psi \quad : \quad \Psi(\vec{r})=\Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

$$\vec{k}=\frac{\vec{p}}{\hbar}, \quad E=\frac{p^2}{2m}$$ - см. де Бройль.

<u>2.Трактовка волновой функции</u> (Макс Борн)

$|\Psi|^2\,dV=dP$ **-** вероятн. нахождения в dV

$$P(V_0)=\int_{V_0}dV|\Psi|^2=\int_{V_0}dV\Psi\Psi^*$$

Квантово механически средняя координата

$$<x>=\int_{-\infty}^{+\infty}x|\Psi|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi x\Psi^* dx$$

Волновая функция должна удовлетворять:

1) конечность
2) однозначность
3) непрерывность

(договоренность: если нет пределов в интеграле, значит от $-\infty$ до $+\infty$)

Нормировка $\int dV|\Psi|^2\,dx=1$

$$<L(x)>=\int L(x)|\Psi|^2\,dx=\int dx\Psi^* L(x)\Psi dx$$

3.Понятие об операторах

$\hat{L}u(x)=v(x)$

Примеры: $\hat{L}=x$, $\hat{L}=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{L}=\sqrt{\ldots}$

Линейные операторы $\hat{L}(c_1u_1+c_2u_2+\ldots)=c_1\hat{L}u_1+c_2\hat{L}u_2+\ldots$

$c_i=const$

Эрмитово сопряженные операторы $\hat{L}^{+}$ - эрм. сопр. Оператор к $\hat{L}$

$$\int u_1^*\left(\hat{L}u_2\right)dV=\int\left(\hat{L}^*u_1\right)^*u_2dV$$

и коротко $\hat{L}^{+}=\hat{L}$, $\left(\hat{L}^{+}\right)^{+}=\hat{L}$

Самосопряженный (или эрмитовый) оператор: $\hat{L}^{+}=\hat{L}$, т.е.

$$\int u_1^*\left(\hat{L}u_2\right)dV=\int\left(\hat{L}u_1\right)^*u_2dV \ (\int u_1^*\left(\hat{L}u_2\right)dV=\int\left(\hat{L}^*u_2\right)^*u_1dV\ )$$

Проверьте, что $\hat{L}=-i\dfrac{d}{dx}$ - эрмитовый оператор, в классе нормируемых ф-ций ($u(x)\to 0$, при $x\to\pm\infty$)

<u>Сложение и умножение операторов:</u>

$\hat{L}=\hat{L}_1+\hat{L}_2 \quad \to \quad \hat{L}_1u+\hat{L}_2u=Lu$

$\hat{L}=\hat{L}_1+\hat{L}_2 \qquad \hat{L}u=\hat{L}_1\left(\hat{L}_2u\right)$

вообще говоря $\hat{L}_1(\hat{L}_2u)\neq\hat{L}_2(\hat{L}_1u)$

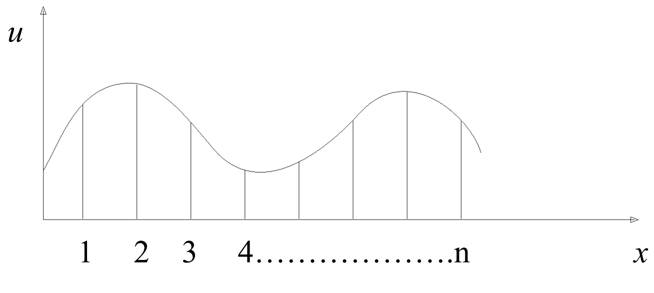
Имеет место $\left(\hat{L}_1,\hat{L}_2\right)^{+}=\hat{L}^{+}{}_2\hat{L}^{+}{}_1$ - покажите!

Собственные значения - EW и собственные функции - EV

EW - $eigenwert$, EW - $eigenvector$

$$\hat{L}u=Lu,\ L-EW,\ u-EV$$

(аналогия с матрицами) .



u – вектор в многомерном (n) пространстве

$\hat{L}$ - $n\times n$ матрица

4.Уравнение Шрёдингера как операторное уравнение

Пример - в.ф. свободной частицы

$$\Psi=Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-p_xx)} \quad - \quad 1D$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=i\hbar p_x\Psi \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}E\Psi$$

или $\quad p_x\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad , \quad E\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$

Замена $\quad P_x \to \widehat{P}_x$, $\quad E \to \widehat{H}$ (оператор импульса и энергии)

$$\widehat{P}_x\Psi = -i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad \widehat{E}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

или $\quad \widehat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \widehat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

Гамильтониан (энергия, выраженная через $\vec{p}$ и $\vec{r}$)

Закон сохранения энергии $\quad H = K + U \quad \to \quad \widehat{H} = \widehat{K} + \widehat{U}$, $\quad \widehat{K} = \frac{\widehat{P}^2}{2m}$

$$\widehat{H}\Psi = \frac{\widehat{P}^2}{2m}\Psi + \widehat{U}\Psi \quad , \qquad \widehat{P}^2 = (-i\hbar\nabla)^2 = -\hbar^2\nabla^2,$$

т.о. $\quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi$ - ур. Шрёдингера

Res. После того как выбраные операторы, у. Ш. – это «просто» операторный аналог закона сохранения.

Обобщение среднего:

$$< L(x) >= \int dx\Psi^* L(x)\Psi(x)dx \to$$

$$< P_x(x) >= \int dx\Psi^* \widehat{P}_x(x)\Psi(x)dx,$$

$$< f\left(P_x, x\right) >= \int dx\Psi f\left(\widehat{P}_x, x\right)\Psi dx.$$

<u>Основные положения К.М.</u>

1.Все физические величины в К.М. определяются операторами
(P.S. в координатном Шрёдингеровском представлении это выглядит так)

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla,$$
$$L(\hat{\vec{r}}) = L(\vec{r}), \quad L(\hat{\vec{p}}) = L(-i\hbar\nabla)$$

Все «…» операторы – эрмитовы:

$$\int \Psi_a{}^* \hat{L}\Psi_b dV = \int \Psi_b{}^* \hat{L}\Psi_a dV$$

коротко это иногда записывают как - $\hat{L}^+ = \hat{L}$
в этом случае собственные решения оператора – вещественны (докажите)
2.Состояние системы в К.М. определяется вол. функцией Ψ, которая находится решением у.Ш.
3.Среднее значение всех различных величин находится по правилу:

$$\left\langle L\left(\vec{p}, \vec{r}\right)\right\rangle = \int dV\Psi^* L\left(\hat{\vec{p}}, \vec{r}\right)\Psi$$

4.Вероятность положения частицы в объеме V_0

$$\mathrm{P}_{rob}(V_0) = \int_{V_0} dV\left|\Psi\right|^2$$

9. Операторы момента импульса

$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$, $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$, $\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r}\times\nabla$

$L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)$, $\partial_z = \dfrac{\partial}{\partial z}$,...

$L_y = -i\hbar(z\partial_x - x\partial_z)$,

$L_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_y)$

В более «подходящей» системе координат – сферической

$$\left.\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + ctg\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}) \\ \hat{L}_y &= i\hbar(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + ctg\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}) \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}\right\}$$

$\hat{L}_z\psi = L_z\psi$, $-i\hbar = \dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi} = L_z\psi$, $\psi = C(r,\theta)\cdot e^{\frac{iL_z}{\hbar}\varphi}$, т.к. $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$, то

$i\dfrac{L_z}{\hbar}\cdot 2\pi = m\cdot 2\pi i$, $m = 0,\pm 1,...$ откуда $L_z = m\hbar$, $m = 0,\pm 1,\pm 2,...$

Операции $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ не коммутируют между собой $\hat{L}_x = -i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_y)$,

Т.е $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = 0$, но с ними коммутирует $\hat{L}^2$, проверьте $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$,

$\hat{L}^2\psi_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)\hbar^2\psi_{lm}(\theta,\varphi)$, $l = 0,1,2$ – квантовое число момента импульса.

$\hat{L}_z\psi_{lm}(\theta,\varphi) = m\hbar\psi_{lm}(\theta,\varphi)$, $m = -l, -l+1,...0,1,2,...l$

ψ_{lm} для $\hat{L}^2$ u $\hat{L}_z$ общая, но собственные значения, $\psi_{lm}(\theta,\varphi)$ выражается через т.к. сферическую функцию (см справочник Корн и Корн).

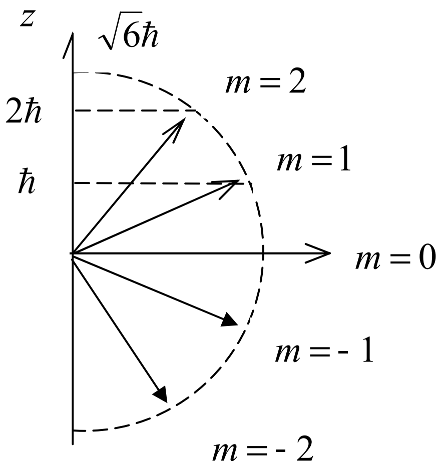
Итак $L^2 = \hbar^2 l(l+1)$, l – орбитальное квантовое число.

$L_z = m\hbar$

Например, для $l = 2$

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) = 6\hbar^2 \qquad m = -l, \ldots, +l = -2, -1, 0, 1, 2$$

$$L_z = -2\hbar, -1\hbar, 0, 1\hbar, 2\hbar$$



5. Принцип (соотношение) Гайзенберга или коммутирующие и некоммутирующие операторы

Е. д. $\hat{p}_x \cdot \hat{x} \neq \hat{x} \cdot \hat{p}_x$ (проверите)

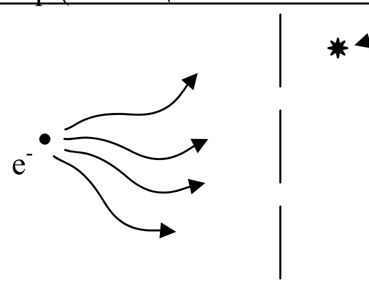
Коммутатор операторов $\hat{A}$ и $\hat{B} - \left[\hat{A}, \hat{B}\right]$

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

если $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 0$ - операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют

Физические величины, соответствующие некоммутирующим операторам не измеримы одновременно, с как угодно большой точностью.

Пример (из лекций Р. Фейнмана)



источник света

$$\Delta x \downarrow \to \lambda \downarrow \to \omega \uparrow \to \hbar\omega \uparrow$$

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Вывод: соотношения неопределённости Гайзенберга для p_x и x для простоты частный случай $\langle x \rangle = 0$ и $\langle p_x \rangle = 0$.

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle - \left\langle x \right\rangle^2} \to \sqrt{\left\langle x^2 \right\rangle}, \; \Delta p = \sqrt{\left\langle p_x^2 \right\rangle - \left\langle p_x \right\rangle^2} \to \sqrt{\left\langle p_x^2 \right\rangle}$$

Рассмотрим функционал $J(\lambda) = \int \left| x\psi + \lambda\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx$, $J(\lambda)$ – положительно определённый функционал, то есть $J(\lambda) \geq 0$ для любого λ.

$$J(x) = \int \left| \left(x + i\lambda \widehat{f}_x \right) \Psi \right|^2 dx$$

$$J(\lambda)=\int\left(x\psi+\lambda\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(x\psi^*+\lambda\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx=\int\left(x^2\psi\psi^*+\lambda\hbar x\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}+\lambda\hbar x\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}+\lambda^2\hbar^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)dx$$

$$\int\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\,dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}dx=du & u=\psi^*\\ \psi x=v & dv=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}x+\psi\right)x\end{array}\right|=\psi\psi^*x\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}x\,dx-\int\psi\psi^*dx$$

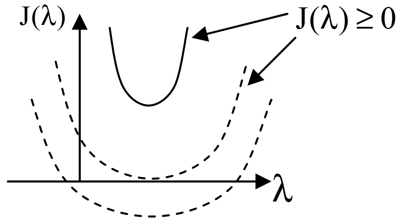
таким образом $\int\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\,dx+\int\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}x\,dx=\overbrace{\psi\psi^*x\Big|_{-\infty}^{+\infty}}^{=0}-\int\psi\psi^*dx=-\int\psi\psi^*dx$

$$\int\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi^*}{\partial x}dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{\partial\psi^*}{\partial x}dx=du, & u=\psi^*\\ \frac{\partial\psi}{\partial x}=v, & dv=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx\end{array}\right|=\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx$$

таким образом $J(\lambda)=\underbrace{\int\psi^*x^2\psi dx}_{<x^2>}-\lambda\hbar\underbrace{\int\psi^*\psi dx}_{1}+\underbrace{\lambda^2(-1)\hbar^2\int\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx}_{<p_x^2>}$

в самом деле $\left\langle p_x^2\right\rangle=\int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi dx=-\hbar^2\int\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dx$

окончательно $J(\lambda)=\left\langle x^2\right\rangle-\lambda\hbar+\lambda^2\left\langle p_x^2\right\rangle$



$\lambda^2\left\langle p_x^2\right\rangle-\lambda\hbar+\left\langle x^2\right\rangle\geq 0$

a b c

$b^2-4ac\leq 0$ так как только один корень или их отсутствие $\hbar^2-\left\langle 4p_x^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\leq 0$

Откуда $\left\langle p_x^2\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle\geq\frac{\hbar^2}{4}$

<u>Домашнее задание:</u> Пусть $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=i\hat{C}$, и $\hat{A}^+=\hat{A}$, $\hat{B}^+=\hat{B}$ и для простоты $\left\langle A\right\rangle=0,\left\langle B\right\rangle=0$

Докажите, что $\left\langle A^2\right\rangle\left\langle B^2\right\rangle\geq\frac{1}{4}\left\langle C\right\rangle^2$

Подсказка: введите $\hat{Q}=\lambda\hat{A}+i\hat{B}$ и рассмотрите функционал $f(\lambda)=\int(\hat{Q}\psi)^*(Q\psi)dV\ \ (\geq 0)$

P. S. Для дальнейшего нам необходимо соотношение (считаем, что в. ф. нормированы) $\int dx\psi_m^*(x)\psi_n(x)=\delta_{mn}$ (1), $\delta_{mn}=\begin{cases}0, m\neq n\\ 1, m=n\end{cases}$, где $\psi_m(x)$ и $\psi_n(x)$ – собственная волновая функция некоторого оператора $\hat{L}$.

Доказательство: $\hat{L}\psi_m=L_m\psi_m$, $\hat{L}\psi_n=L_n\psi_n$ (2)

$\hat{L}^*\psi_m^*=L_m^*\psi_m^*$, так как $\hat{L}$ – эрмитов, то $L_m^*=L_m$, $\hat{L}^*\psi_m^*=L_m\psi_m^*$ (3)

Домножаем (2) слева на ψ_m^*, а (3) на ψ_n

$$-\begin{array}{l}\psi_m^*\hat{L}\psi_n=\psi_m^*L_n\psi_n\\ \psi_n(\hat{L}\psi_m)^*=\psi_nL_m\psi_m^*\end{array}$$

$$\int dx\psi_m^*(\hat{L}\psi_n)-\int dx\psi_n(\hat{L}\psi_m)^*=(L_n-L_m)\int dx\psi_m^*\psi_n\ \ (4)$$

$\hat{L}$ – эрмитов, то есть $\int dx\psi_m^*(\hat{L}\psi_n) = \int dx\psi_n(\hat{L}\psi_m)^*$. Если $L_n \neq L_m$, то из равенства нулю левой части (4) следует $\int dx\psi_m^*\psi_n = 0$. Когда $n = m$ получаем $\int dx\psi_m^*\psi_n = 1$

6. Измерение (что мы вычисляем и что измеряем в квантовой механике?)

Пусть система находится в состоянии $\psi(x)$ и пусть $\psi(x)$ EV оператора $\hat{p}_x$

$$\hat{p}_x\psi = p_x\psi$$

Мы хотим измерить величину L – её оператор $\hat{L}$

$\psi(x) = \sum_n C_n\psi_n(x)$, $\psi_n(x)$ – EV $\hat{L}$, то есть $\hat{L}\psi_n = L_n\psi_n$. C_n – ?

$$\psi_m^*(x)\psi(x) = \sum C_n\psi_m^*(x)\psi_n(x)$$

$$\int\psi_m^*\psi dx = \sum_n C_n\int\psi_m^*\psi_n dx = \sum C_n\delta_{nm} = C_m$$

$$C_m = \int\psi_m^*(x)\psi(x)dx$$

$$\langle L(x)\rangle = \int\psi^*(x)\hat{L}(x)\psi(x)dx = \left|\psi(x) = \sum C_n\psi_n,\ \psi^* = \sum C_m^*\psi_m^*\right| = \sum_{n,m} C_n C_m^*\int\psi_m^*\hat{L}\psi_n dx =$$

$$= \left|\hat{L}\psi_n = L_n\psi_n\right| = \sum_{n,m} C_n C_m^* L_n\int\psi_m^*\psi_n dx = \sum_{n,m} C_n C_m^* L_n\delta_{mn} = \sum_n C_n C_n^* L_n$$

$$\langle L\rangle = \sum |C_n|^2 L_n$$

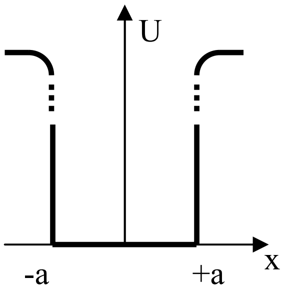
L_n – те значения, которые измерены (точно) в состоянии ψ_n. Если система находится в состоянии, когда вф ψ, то каждое измерение даёт разное значение (одно из L_n), но среднее будет:

$$\langle L\rangle = \sum |C_n|^2 L_n$$

Тема 5. Основные задачи квантовой механики

1. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме
2. Гармонический осциллятор

1. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме (одномерной)



$$U(x)=\begin{cases}0, & |x|\le a\\ \infty, & |x|\ge a\end{cases}$$

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0$$

1D случай: $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{2mE}{\hbar^2}\psi=0,\ |x|\le a$

Обозначим $K^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx},\ \text{Г. У. } \psi\big|_{x=\pm a}=0,\ \int_{-a}^{a}|\psi|^2\,dx=1$$

Г. У. $\left.\begin{array}{r}Ae^{ika}+Be^{-ika}=0\\ Ae^{-ika}+Be^{+ika}=0\end{array}\right\}$	Условие разрешимости системы однородных линейных уравнений

$$\begin{vmatrix}e^{ika} & e^{-ika}\\ e^{-ika} & e^{ika}\end{vmatrix}=0\to\sin 2ka=0,$$

$$2aK_n=n\pi,\ n=\pm1,\pm2,\ldots\ K_n=\frac{n\pi}{2a},$$

(почему нельзя брать n = 0 ?)

Вспоминая обозначение энергии $K^2=\dfrac{2mE}{\hbar^2}$ получаем дискретность энергии!

$$E_n=\frac{\hbar^2}{2m}K^2=\frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2$$

$$\boxed{E_n=\frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2},\ n=\pm1,\pm2,\ldots$$

Из системы уравнений $Ae^{ika}=-Be^{-ika},\ B=-Ae^{2ika}$

$$e^{2ika}=e^{2ia\frac{n\pi}{2a}}=e^{i\pi n}=\left(e^{i\pi}\right)^n=\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)^n=(-1)^n$$

$$B=-1\cdot(-1)^nA=(-1)^{n+1}A$$

n – чётное $B=-A$

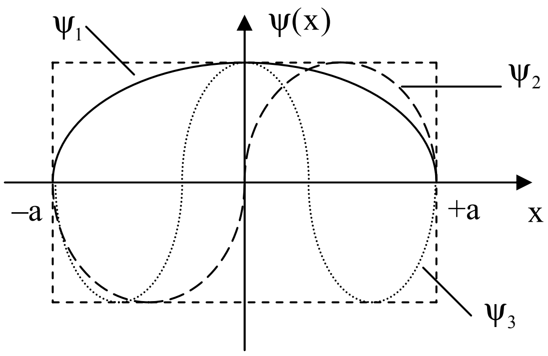
n – нечётное $B=+A$

$$\psi(x)=A(e^{ikx}+(-1)^{n+1}e^{ikx})=A(\cos kx+i\sin kx+(-1)^{n+1}\cos kx-(-1)^{n+1}i\sin kx)=$$
$$=A\left[(1+(-1)^{n+1})\cos kx+i(1-(-1)^{n+1})\sin kx\right]$$

$$\psi(x)=2Ai\sin kx=\sqrt{a}\sin\frac{n\pi}{2a}x,\ n-\text{чётное}$$

$$\psi(x)=2A\cos kx=\sqrt{a}\cos\frac{n\pi}{2a}x,\ n-\text{нечётное}$$

Амплитуда волновой функции найдена из условия нормировки



$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma}$$

$$E_2 = 4E_1$$

$$E_3 = 9E_1$$

$$E_4 = 16E_1$$

Среднее значение координаты

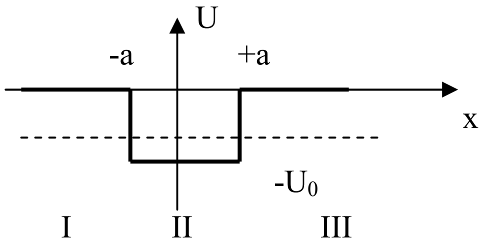
$$\langle x \rangle = \int \psi_n x \psi_m^* dx = 0 \quad \text{(покажите!)}$$

подсказка – учесть чётность и нечётность

Среднее значение импульса (заранее ясно, что т. к. e^- не движется, то должно быть $\langle p_x \rangle = 0$)

$$\langle p_x \rangle = (-i\hbar)^2 \int_{-a}^{a} \psi_n \frac{\partial}{\partial x} \psi_n^* dx = 0 \quad \text{(покажите!)}$$

<u>6. Яма конечной глубины</u>



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi'' + (E-U)\Psi = 0$$

Случай $-U_0 < E < 0$

Задача симметрична отноительно x=0
и достаточно рассматривать область II и III

II. $\Psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |E|)\Psi = 0$

III. $\Psi'' - \frac{2m|E|}{\hbar^2}\Psi = 0$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - |E|)\ ,\ \ q^2 = \frac{2m}{\hbar^2}|E|$$

Решения II, $\psi = A_2 \cos(kx)$ $\quad -\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$

III, $\psi = A_3 e^{-qx}$ $\quad x>a$

Сшивка на границе

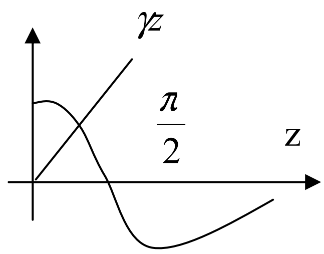
$$\psi\Big|_{x=\frac{a}{2}-0} = \psi\Big|_{x=\frac{a}{2}+0}\ ,$$

$$\psi'\Big|_{x=\frac{a}{2}-0} = \psi'\Big|_{x=\frac{a}{2}+0}$$

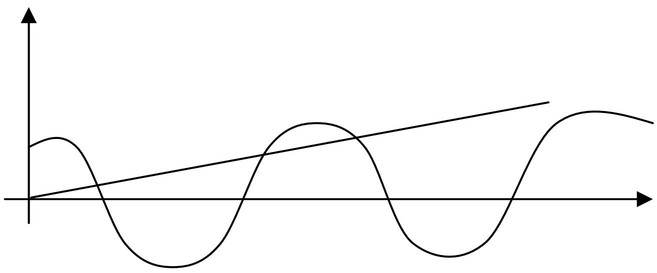
Подставляя решения в условия сшивки, находим

$$ctg\frac{ka}{2}=\frac{k}{q} \quad (>0)$$

или $\cos z=\gamma z$, $z=\frac{ka}{2}$, $\gamma=\sqrt{\frac{2\hbar^2}{ma^2U_0}}$



! Решение (по крайней мере одно) **<u>всегда есть</u>**

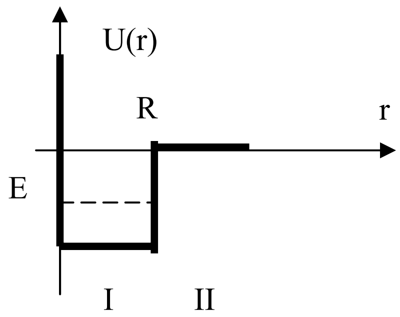


– случай трех уравнений

Если решение – z известно, то

$$E=-U_0+\frac{2\hbar^2}{ma^2}z^2$$ – частица не убегает из ямы, ее энергия E.

<u>Трехмерная яма.</u> (сфера радиусом R – внутри – U_0, снаружи U=0)



Рассматриваемый случай – сферически симметрический.

$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(r))\psi=0$ надо решить в сферических координатах, с учетом того, что $\frac{\partial...}{\partial\theta}=0$, $\frac{\partial...}{\partial\varphi}=0$.

$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(r\psi)}{\partial r^2}$, введя обозначение $u=r\psi$ получаем

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U(r))U=0.$$

I $\quad U''+\frac{2m}{\hbar^2}(E+U_0)U=0$

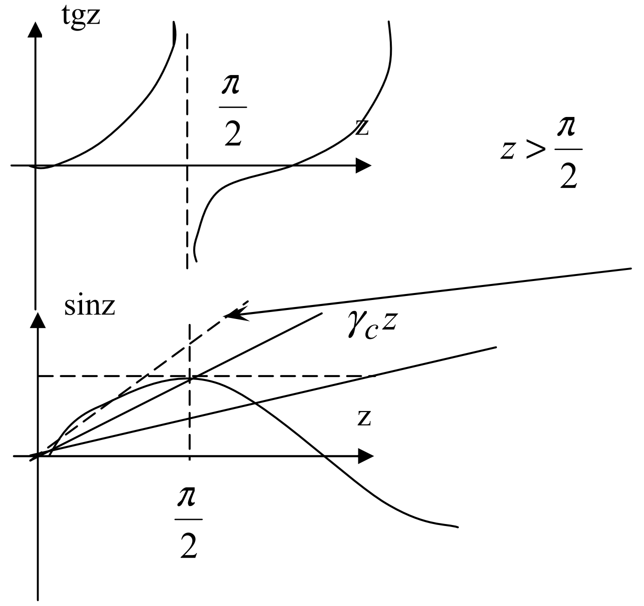
II $U''+\frac{2m}{\hbar^2}EU=0$, где $E>0$

Условия сшивки приведут к двум условиям

$\sin\ z\ =\ \pm\ \gamma z$ (1) , $tgz<0$ (2), где $z=kR$, $\gamma=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mR^2U_0}}$

(2)

(1)



$z>\frac{\pi}{2}$

такое решение не годится,
должно быть $z>\frac{\pi}{2}$

$$\gamma\frac{\pi}{2}\le 1$$

$$\gamma\le\gamma_{\max}=\frac{2}{\pi}$$

Т.к. $\gamma=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mR^2U_0}}$ условие на γ означает, что $U\ge U_{\min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{8mR^2}$, иначе уравнения в 3D-яме нет.

P.S. При $U=U_{\min}$ энергия E приходится на срез «срез» E=0.

То же самое, при помощи оценки из соотношении координат Гейзенберга

$$<\Delta p^2><\Delta x^2>\ge\frac{\hbar^2}{4}\qquad\frac{<\Delta p^2>}{2m}\sim U\quad<\Delta x^2>\sim R^2$$

$$UR^2\sim\frac{\hbar^2}{4\cdot 2m}\quad U\sim\frac{\hbar^2}{8mR^2}$$

(Объясните, почему такая оценка не срабатывает для 1D и 2D ям)

2. Одномерный гармонический осциллятор

$$\hat{H}\psi = E\psi,\ \hat{H} = \frac{p_x^2}{2m} + U,\ U = \frac{1}{2}kx^2\ \ \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

$U = \frac{m\omega_0^2}{2}x^2$, т.к.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega_0^2}{2}x^2\psi = E\psi \text{ или}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{m\omega_0^2}{\hbar^2}x^2\right)\psi = 0}$$

Решение выражается через полиномы Эрмита

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}},\quad n = 0$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}2\frac{x}{x_0},\quad n = 1$$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4x_0\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}\left(4\frac{x^2}{x_0^2} - 2\right),\quad n = 2$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$$

Полином Эрмита n-го порядка

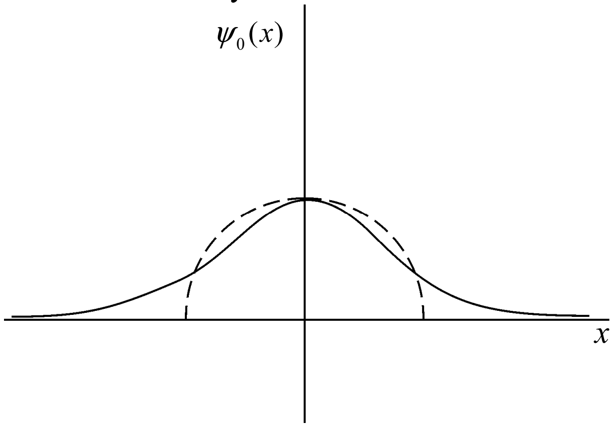
$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\xi^2}\right)$$

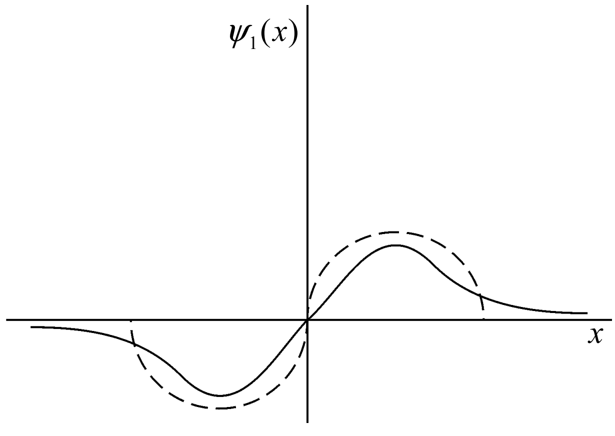
$$\xi = \frac{x}{\sqrt{2}x_0}$$

$$\boxed{E_n = \hbar\omega_0(n + \frac{1}{2})}\ n = 0,\ 1,\ 2,...$$

!Отметим отличие на ½ от формулы Планка!

Специальный случай $n = 0$

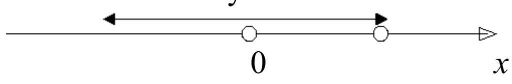




сравним с волновой функцией частицы в бесконечно глубокой яме….

Сравнительный анализ описания осциллятора в классической механике и квантовой механике. Оба описания в вероятностной форме

Классический случай



$dP(x)$ - вероятность найти частицу в (x, edx)

$$dP(x) = \rho(x)dx = \frac{dt}{T} = \left| T = \frac{2\pi}{\omega_0} \right| = \frac{\omega_0}{2\pi} dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{dx}{V},$$

$x(t) = a\sin\omega_0 t$, зададим энергию осциллятора Е

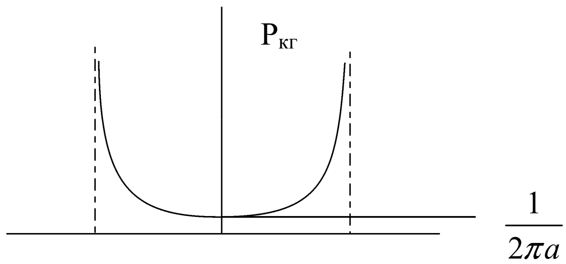
$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0}{2}x^2 = E$, подставляем $x(t)$ находим

$$\frac{m}{2}a^2(\omega_0{}^2\cos^2\omega_0 t + \omega_0{}^2\sin^2\omega_0 t) = E \qquad a^2\frac{m}{2}\omega_0{}^2 = E$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0{}^2}} \qquad V = x = a\omega_0\cos\omega_0 t = a\omega_0\sqrt{1-\sin^2\omega_0 t} = a\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \omega\sqrt{a^2-(a\sin\omega t)^2}$$

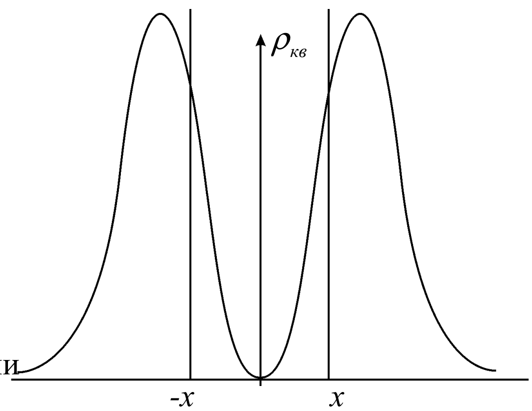
$$dP(x) = \frac{\omega_0}{2\pi}\frac{dx}{\omega_0\sqrt{a^2-(a\sin\omega_0 t)^2}} = \frac{dx}{2\pi a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

т.о. $\rho(x) = \frac{1}{2\pi a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$ $\qquad a^2 = \frac{2E}{m\omega_0{}^2}$



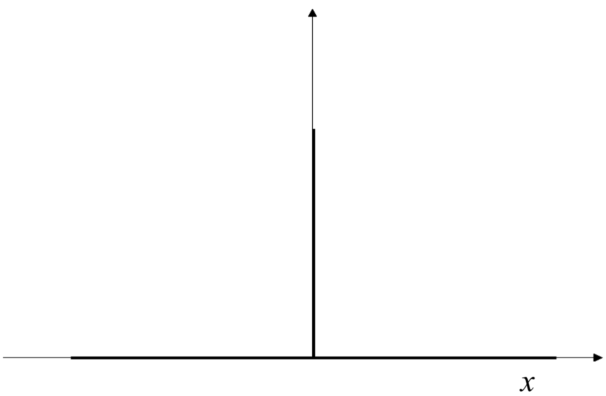
Квантовый случай

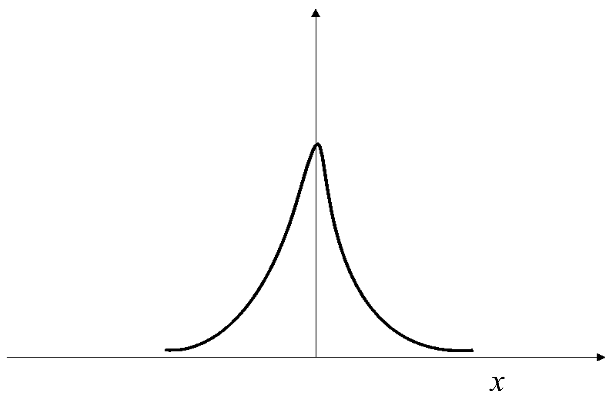
$$n = 1 \qquad \rho_{кв}dx = |\psi_{n=1}|^2 dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2x_0{}^2}} \frac{x^2}{x_0{}^2}\frac{dx}{x_0}$$



Отличие для случая *n=0* - нижнее значение энергии

$\rho_{кл}(E=0)$ $\qquad$ $\rho_{кв}(n=0)$





$\rho_{кл}(x) = \delta(x) -$ - дельта функция Дирака $\qquad \rho_{кв}(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$

Квант. осциллятор и соотношение неопределенностей

$$\rho_{кв} = |\psi_0|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$

$< x >= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^* x \psi_0 dx = 0$ (нечетная функция в частных пределах)

$< p_x >= \int \psi_0^* \hat{p}_x \psi_0 dx = -i\hbar \int \psi_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$ (-//-//-)

(покажите напрямую!)

т.о. $< x >= 0$, $< p_x >= 0$

Найдем $\begin{matrix} < \Delta p_x^2 >=< p_x^2 - < p_x >^2 >=< p_x^2 > \\ < \Delta x^2 >= .... =< x^2 > \end{matrix}$

$$< E >=< \frac{P_x^2}{2m} > + < \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 >= \frac{< p_x^2 >}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} < x^2 >$$

Соотношение Гайзенберга $\qquad \Delta p_x^2 \cdot \Delta x^2 \geq \frac{\hbar^2}{2}$

В нашем случае $< p_x^2 >< x^2 > \geq \frac{\hbar^2}{2}$

Т.о. $< E > \geq \frac{< p_x^2 >}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{< p_x >^2}$

Сразу же видно что $< E >$ имеет некоторое min значение, найдем его:

$$\frac{\partial < E >}{\partial < p_x^2 >} = 0 \rightarrow ... \rightarrow < p_x^2 >^2 = \frac{m^2\omega_0^2\hbar^2}{4}$$

т.о. $< E_{\min} >= \frac{1}{2m} \frac{m\omega_0\hbar}{2} + \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{\hbar^2}{4} \frac{1}{2m_0\hbar} = \frac{\omega_0\hbar}{2}$

$< E >_{\min} \geq \frac{\omega_0\hbar}{2}$ - нулевая энергия осц. (*n=0*) и есть min энергия совместимая с принципом неопределенности Гайзенберга.