Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Механіка»

Для студентів технічних спеціальностей

Рекомендовано Методичною радою НТУУ»КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2011

Задачі із загальної фізики. Розділ «Механіка». Для студентів технічних спеціальностей. [Текст]/ Уклад.: В. П. Бригінець, О. О. Гусєва, О. В. Дімарова та ін. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 59 с.

Гриф надано Методичною радою НТУУ»КПІ»
(Протокол № 5 від 3.02.2011 р.)

Навчальне видання

ЗАДАЧІ ІЗ ЗАГАЛЬНОЇ ФІЗИКИ

Розділ «Механіка»

Для студентів технічних спеціальностей

Укладачі: *Бригінець Валентин Петрович*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Гусєва Ольга Олександрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Дімарова Олена Володимирівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Пономаренко Лілія Петрівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репалов Ігор Миколайович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний за випуск В. М. Локтєв, д-р фіз. - мат. наук, акад. НАН України

Рецензент Л. П. Гермаш, д-р фіз. - мат. наук, проф.

За редакцією укладачів

Зміст

Стор.

1. Кінематика 4

2. Динаміка 15

3. Робота та енергії 29

4. Динаміка твердого тіла 40

5. Спеціальна теорія відносності 51

6. Механічні коливання 57

1. *Кінематика*

1.1. Середня та миттєва швидкості:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}; \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

1.2. Середнє та миттєве прискорення:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}.$$

1.3. Миттєва швидкість і радіус-вектор точки при довільному русі (загальні рівняння кінематики точки):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t; \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\mathrm{d}t.$$

1.4. Переміщення точки за проміжок часу [t_1, t_2] та пройдений нею шлях:

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\mathrm{d}t; \quad L = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t, \; v(t) = |\vec{v}(t)| \; .$$

1.5. Нормальне, тангенціальне та повне прискорення:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}; \quad \vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}; \quad \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau ,$$

R – радіус кривизни траєкторії.

1.6. Кутові швидкість ω та прискорення β :

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}; \quad \vec{\beta} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}.$$

1.7. Зв'язок між лінійними та кутовими кінематичними величинами при обертанні навколо фіксованої осі:

$$L = \varphi R; \quad v = \omega R;$$

$$a_\tau = \beta R; \quad a_n = \omega^2 R; \quad a = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4} \; ,$$

R – відстань від осі обертання.

1.1 Задано вектор $\vec{a}$, напрямлений уздовж осі OX.

– показати на рисунку вектор $\vec{a}$ та вектори $\vec{b}=2\vec{a}$ і $\vec{c}=-2\vec{a}$;

– чи рівні вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$? їхні модулі? Проекції? Записати значення модулів та проекцій векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

1.2 Визначити суму $\vec{b}$ та різницю $\vec{d}$ двох векторів $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$, які мають однакові модулі a й напрямлені вздовж осі OX: а) однаково, б) протилежно.

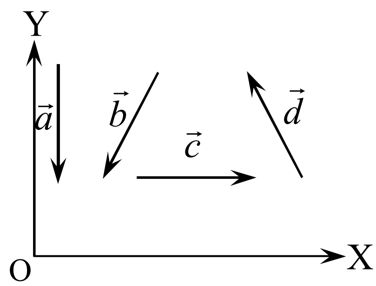

Рис. 1.1

1.3 Задані одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (рис. 1.1). Визначити графічно та аналітично (обчисленням) вектор $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$, якщо вектори

$\vec{b}$ і $\vec{d}$ нахилені до вертикалі під кутом 30°. $\left(\vec{S} = \vec{a}.\right)$

1.4 Тіло починає рухатись з початку координат у напрямку осі OX і здійснює послідовно 4 переміщення по $S = 10\ см$, повертаючи після кожного ліворуч на кут 30°. Визначити аналітично координати кінцевого положення тіла та модуль і напрям (кут до осі OX) результуючого переміщення $\vec{S}$. Зробити рисунок.

($x = y$ = 23,7 см, S = 33,36 см, 45°.)

1.5 До тіла прикладені в одній площині три сили $F_1 = 10$ Н, $F_2 = 20$ Н та $F_3 = 40$ Н під кутами 120° одна до одної (рис. 1.2). Визначити аналітично модуль і напрям вектора рівнодійної сили $\vec{F}$ та показати його на рисунку.

$\left(F = 10\sqrt{7} \approx 26{,}5\text{ Н},\quad \textit{під кутом}\ 19^\circ\ \textit{до}\ \vec{F}_3.\right)$

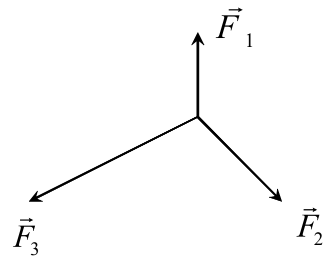

Рис. 1.2

1.6 Тіло тягнуть за дві нитки 1 і 2 з деякими силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.3). Вектор рівнодійної $\vec{F}$ цих сил показаний на рисунку. Визначити графічно вектори $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

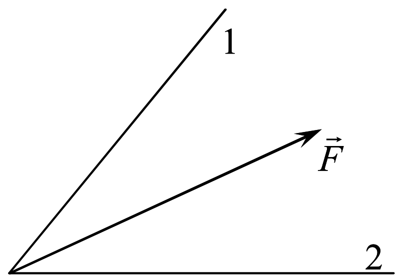

Рис. 1.3

1.7 Визначити графічно (побудовою) вектор рівнодійної $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ двох заданих паралельних сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 1.4). *<u>Вказівка</u>. Скористатися розкладанням вектора на складові.*

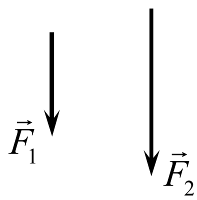

Рис. 1.4

1.8 Кулька рухається по дузі півкола (рис. 1.5). Показати на рисунку в точках 1, 2, 3 вектори швидкості $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, прискорення $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ та сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, що діє на кульку, якщо рух: а) рівномірний, б) рівноприскорений і в) рівносповільнений.

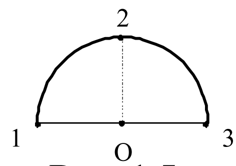

Рис. 1.5

1.9 Тіло кинуто з поверхні землі під кутом α = 30° до горизонту зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с.

– зобразити траєкторію тіла і вказати вектори швидкості та прискорення кульки в початковій, кінцевій та найвищій точках траєкторії.
– визначити вектор зміни швидкості тіла $\Delta\vec{v}$ за весь час руху та його модуль.

$$\left(\Delta\vec{v} = 2v_0 \sin\alpha \cdot \frac{\vec{g}}{g},\quad 5\text{ м/с.}\right)$$

1.10 Кулька пружно вдаряє в стіну і відскакує з тією ж швидкістю, як показано на рис. 1.6. Визначити модуль зміни вектора швидкості $|\Delta\vec{v}|$ та зміну його модуля Δv унаслідок удару в кожному випадку.

$\left(a)\ |\Delta\vec{v}| = 2v,\ \Delta v = 0;\quad б)\ |\Delta\vec{v}| = 2v\cos\alpha,\ \Delta v = 0.\right)$

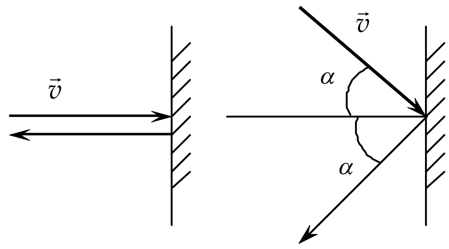

Рис. 1.6

1.11 Виконати завдання попередньої вправи для випадку непружного удару, тобто, коли кулька прилипає до стіни.

$\left(\Delta\vec{v} = -\vec{v},\ \Delta v = -v \quad \textit{в обох випадках.}\right)$

1.12 Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їх скалярний добуток дорівнює добутку модулів із знаком «–»?

1.13 Як напрямлені один відносно одного два вектори, якщо їх скалярний добуток дорівнює половині добутку модулів?

1.14 Знайти скалярний добуток векторів: $\vec{a}(1;\sqrt{3})$ і $\vec{b}(\sqrt{3};1)$.

$\left(2\sqrt{3}.\right)$

1.15 На тіло, що рухається у від'ємному напрямку осі OX, діє постійна сила $\vec{F}(5;5)$ Н. Визначити роботу цієї сили на шляху $L = 10$ см.

(0,5 Дж.)

1.16 Тіло здійснює переміщення $S(8,66;5)$ м. При цьому, серед інших, на нього діє сила $F = 10$ Н, яка виконує роботу $A = 86,6$ Дж. Знайти, під яким кутом до осі OX напрямлений вектор $\vec{F}$.

(0° *або* 60°.)

1.17 Чи може траєкторія руху точки: а) бути ламаною лінією; б) перетинатися сама із собою?

1.18 Чи є рівномірним рух точки, якщо вона за будь-які рівні проміжки часу: а) здійснює однакові переміщення; б) проходить однакові шляхи?

1.19 Дві точки рухаються з різними за величиною, але однаковими за напрямом швидкостями. Чи можливо, щоб вони весь час знаходилися на однаковій відстані одна від одної?

1.20 Як рухається тіло, якщо його швидкість:

1) $\vec{v} = const$;
2) $v = const,\ \vec{v}/v \neq const$;
3) $v \neq const,\ \vec{v}/v = const$;
4) $v \neq const,\ \vec{v}/v \neq const$.

1.21 Тіло рухається вздовж осі OX так, що його координата змінюється за законом $x = 5 + 4t - t^2$ (м). Знайти:

– координату, швидкість і прискорення тіла через 2 с після початку руху;
– через який час від початку руху тіло знов опиниться у вихідній точці;
– на якій відстані від початкової точки швидкість тіла дорівнює нулю.

(9 м; 0 м/с; -2 м/с^2; 4 с; 4 м.)

1.22 Дві матеріальні точки рухаються вздовж осі ОХ згідно з рівняннями: $x_1 = t + 2t^2 - 4t^3$ (м), $x_2 = 2t - 4t^2 + t^3$ (м). В який момент часу прискорення точок будуть однаковими? Визначити швидкості точок на цей момент.

(0,4 с; 0,68 м/с, $-0,72$ м/с.)

1.23 Радіус-вектор точки змінюється за законом $\vec{r} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2 \vec{j}$ (м), де α, β додатні сталі, $\vec{i}$ та $\vec{j}$ – орти осей ОХ та ОY. Визначити:
– рівняння траєкторії точки $y(x)$;
– залежності від часу швидкості $\vec{v}$, прискорення $\vec{a}$, а також їхніх модулів;
– залежність від часу кута φ між векторами $\vec{v}$ та $\vec{a}$.

$$\left(y = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2;\ \vec{v}(t) = \alpha\vec{i} + 2\beta t\vec{j};\ \vec{a} = 2\beta\vec{j};\ v(t) = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2};\ a(t) = 2\beta;\ tg\varphi = \frac{\alpha}{2\beta t}. \right)$$

1.24 Точка рухається в площині XY за законом $x = A\sin\omega t$, $y = A(1-\cos\omega t)$, де A та ω – додатні сталі. Визначити:
– рівняння траєкторії точки $y(x)$;
– модулі швидкості v та прискорення a точки;
– кут α між векторами швидкості та прискорення;
– шлях S, який проходить точка за час τ.

($x^2 + (y-A)^2 = A^2;\ v = A\omega;\ a = A\omega^2;\ \alpha = 90^0;\ S = A\omega\tau$)

1.25 Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі ОХ має вигляд $x = 5 + 4t - t^2$ (м).
– Визначити та показати на графіках залежності від часу: координати $x(t)$, проекцій швидкості $v_x(t)$ та прискорення $a_x(t)$, а також пройденого шляху $S(t)$;
– визначити середні значення проекції швидкості $\langle v_x \rangle$ та модуля швидкості $\langle v \rangle$ за проміжок часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

$\left(\langle v_x \rangle = -3{,}0\text{м/с};\quad \langle v \rangle = 3{,}4\text{м/с}\right)$.

1.26 Рівняння руху точки має вигляд $x = 3t - 2t^2$ (м). Визначити:
– залежності від часу: проекцій швидкості $v_x(t)$ та прискорення $a_x(t)$, а також пройденого шляху $L(t)$; показати графіки цих залежностей на проміжку часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 5$ с
– в який момент часу швидкість точки дорівнює нулю та чому дорівнює прискорення точки a_x у цей момент?

(0,75с; -4м/с^2.)

1.26′. Точка рухається прямолінійно з початковою швидкістю v_0 та протилежно напрямленим прискоренням $a = \alpha t$. Знайти:

– відношення t_1/t_2 часу руху точки до зупинки до часу її повернення від зупинки у вихідне положення;

– швидкість v точки в момент повернення.

$\left(1{,}37; \quad -2v_0 \right).$

1.27 В рівноприскореному русі $\left(v_0 \neq 0\right)$ тіло за проміжок часу τ від певного моменту пройшло шлях S, причому його швидкість зросла в n разів. Знайти прискорення тіла.

$$\left(\frac{2S(n-1)}{(n+1)\tau^2}. \right)$$

1.28 Відстань між двома причалами моторний човен проходить за течією за 10 хв, а проти течії – за 30 хв. За який час цю відстань пропливе рятувальний круг, який випав із човна при відчалюванні.

(30хв.)

1.29 Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 км один від одного курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за 4 год, а проти течії за 10 год. Визначити швидкість течії та швидкість катера відносно води.

(7,5км/год; 17,5км/год .)

1.30 Від бакена відпливли два човни – перший за течією, а другий упоперек. Відійшовши на однакову відстань від бакена, човни повертаються назад. Визначити відношення часів руху човнів t_1/t_2 від моменту відплиття до моменту повернення, якщо швидкість кожного в стоячій воді в η = 1,2 разів більша за швидкість течії.

$$\left(\left(t_1 / t_2\right) = \eta \Big/ \sqrt{\eta^2 - 1} = 1{,}8. \right)$$

1.31 Коли футболіст виконує штрафний удар, то швидкість його бутса лишається сталою й рівною v = 20 м/с. Нехтуючи тертям об газон і вважаючи м’яч абсолютно пружним, знайти, яку швидкість отримає м’яч при ударі. *Вказівка*: розглянути задачу в системі відліку, пов’язаній з бутсом.

(40м/с.)

1.32 Легенька кулька, що має швидкість 5 м/с, налітає на рухому масивну плиту і пружно стикається з нею. Знайти швидкість руху плити, якщо після зіткнення напрям руху кульки не змінюється, а швидкість стає рівною 1 м/с.

(3 м/с.)

1.33 На масивну плиту, що рухається вгору зі сталою швидкістю 1 м/с, падає й пружно відбивається легенька кулька, яка на момент удару має швидкість 3 м/с. На яку максимальну висоту відносно плити відскочить кулька. Взяти g = 10 м/с^2

(0,8 м.)

1.34 Першу половину шляху тіло рухалось прямолінійно із швидкістю 10 м/с, а другу – з подвоєною швидкістю під кутом 60^0 до початкового напряму. Визначити напрям і модуль вектора середньої швидкості переміщення та середню шляхову швидкість (середнє значення модуля швидкості).

(30° *до початкового напрямку*, 11,55м/с; 13,3м/с .)

1.35 На першій половині шляху тіло рухалося в n разів швидше, ніж на другій. При цьому середня швидкість на всьому шляху склала v. З якими швидкостями v_1 і v_2 рухалося тіло на кожній половині шляху.

$$\left(v_1 = \frac{n+1}{2} v, \quad v_2 = \frac{n+1}{2n} v. \right)$$

1.36 Велосипедист проїхав першу половину шляху між двома населеними пунктами зі швидкістю 12 км/год. На другій половині шляху він половину часу руху їхав із швидкістю 6 км/год, а потім до кінця йшов пішки зі швидкістю 4 км/год. Визначити середню швидкість руху велосипедиста на всьому шляху.

(7км/год .)

1.37 На кваліфікаційних заїздах перед змаганнями мотогонщик протягом п'яти кругів дистанції повинен показати середню швидкість ≥120 км/год. На перших двох кругах його середня швидкість склала 160 км/год. Яку середню швидкість має показати гонщик на наступних трьох кругах?

(≥102,9 км/год.)

1.38 Від потяга, що рухався рівномірно, відчепили останній вагон, який, рухаючись рівносповільнено, пройшов до зупинки шлях S. Який шлях за цей час пройшов потяг, якщо його швидкість не змінилась? Задачу розв'язати аналітично та за допомогою графіків швидкості.

($2S$.)

1.39 На рис. 1.7 показані траєкторії двох тіл, які кинуті з однієї точки й рухаються в одній вертикальній площині. Чи можливе зіткнення тіл, якщо вони кинуті одночасно?

(*Ні.*)

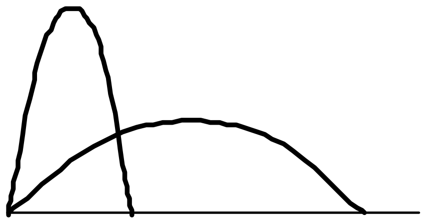

Рис. 1.7

1.40 З трьох труб, розташованих на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмини води під кутами 30°, 45° і 60° до горизонту. Знайти:

– відношення найбільших висот підіймання струмин води H_1: H_2: H_3, що витікають із кожної труби та відношення відстаней L_1: L_2: L_3, на яких вони падають на землю;

– яким кут, під яким треба спрямувати струмину води до горизонту, щоб відстань L була максимальною (α_1) або дорівнювала висоті H підіймання струмини (α_2)?

(H_1: H_2: H_3 = 1:2:3, L_1: L_2: L_3 = 1:1,155:1; $\alpha_1 = 45^{\circ}$, $\alpha_2 = 76^{\circ}$.)

1.41 Два тіла одночасно кинуто з однаковою початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с одне під кутом $\alpha_1 = 15^\circ$, а інше – під кутом $\alpha_2 = 75^\circ$ до горизонту. Знайти відстань S між тілами через $\tau = 2{,}5$ с після початку руху. Задачу розв'язати в системі відліку пов'язаній: а) із землею і б) з одним із тіл.

$$\left(S = 2v_0 \sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \cdot \tau = 25\text{м.} \right)$$

1.42 Камінь, який кинуто горизонтально зі швидкістю 15 м/с, упав на землю під кутом 60° до горизонту. З якої висоти кинуто камінь? На якій відстані по горизонталі камінь впав на землю?

(34,4 м; 40 м.)

1.43 Тіло, яке кинули з певної висоти під кутом 60° до горизонту, впало на землю, маючи швидкість 10 м/с, перпендикулярну до вектора початкової швидкості. Знайти час τ, горизонтальну дальність польоту S, та висоту h, з якої було кинуто тіло.

$$\left(\tau = \frac{v}{g\cos\alpha} = 1{,}18\ \text{с}; \quad S = \frac{v^2}{g}\operatorname{tg}\alpha = 5{,}9\ \text{м}; \quad h = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\right) = 3{,}4\ \text{м} \right).$$

1.44 Кулька падає вертикально з висоти 2 м на довгу похилу площину з кутом нахилу до горизонту 30° і пружно (без утрати швидкості) відскакує. На якій відстані від місця падіння кулька вдариться об площину вдруге? Опором повітря знехтувати.

(8м .)

1.45 Тіло кинуто під кутом 30° до горизонту із швидкістю 15 м/с. Знайти нормальне й тангенціальне прискорення та радіус кривизни траєкторії тіла в початковий момент часу. Опором повітря знехтувати.

(8,5м/с^2; 4,9м/с^2; 26,5 м.)

1.46 М'яч кинуто горизонтально зі швидкістю v_0 з висоти h над поверхнею землі. Нехтуючи опором повітря, визначити:

– рівняння траєкторії руху м'яча $y = f(x)$;

– залежність від часу модуля швидкості $v(t)$;

– залежність від часу нормального $a_n(t)$, тангенціального $a_\tau(t)$ та повного $a(t)$ прискорення;

– залежність від часу радіуса кривизни траєкторії м'яча $R(t)$.

$$\left(y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2; v(t) = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}; a_n = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; a_\tau = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{gv_0}. \right)$$

1.47 Мотоцикліст рухається по колу радіуса $R = 50$ м. Рівняння руху задано дуговою координатою $l(t) = 10 + 10t - 0{,}5t^2$ (м). Визначити на момент часу

$t = 5$ с швидкість мотоцикліста, його тангенціальне, нормальне та повне прискорення.

$\left(5\text{м/с}; \quad -1\text{м/с}^2; \quad 0{,}5\text{м/с}^2; \quad 1{,}1\text{м/с}^2. \right)$

1.48 Точка починає рухатися по колу з постійним тангенціальним прискоренням. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення точки на моменти часу, коли вона пройшла а) 0,1 довжини кола, і б) 0,25 довжини кола.

$\left(a)\ 51{,}5°, \quad б) \approx 72{,}5°. \right)$

1.49 Частинка рухається з початковою швидкістю 2,0 м/с і постійним тангенціальним прискоренням 4,0 м/с^2 по такій плоскій траєкторії, що кут між векторами швидкості та повного прискорення точки залишається незмінним і рівним $\varphi = 60°$. Знайти радіус кривизни траєкторії в точці, до якої частинка дійде за час 2,0 с від початкового моменту

(14,4 м.)

1.50 Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням по плоскій траєкторії такої форми, що її радіус кривизни в будь-якій точці дорівнює шляху, пройденому частинкою до цієї точки. Знайти кут φ між векторами швидкості та повного прискорення частинки в довільній точці траєкторії. Який вигляд має траєкторія?

($\varphi = \text{arctg}2 \approx 63{,}4°$.)

1.51 Частинка починає рухатися із сталим тангенціальним прискоренням 1,34 м/с^2 по плоскій кривій, радіус кривизни котрої в будь-якій точці дорівнює шляху, пройденому частинкою до цієї точки. Визначити повне прискорення частинки в довільній точці траєкторії.

(3,00 м/с^2.)

1.52 Кулька рухається по колу радіуса $R = 16$ м так, що залежність пройденого шляху від часу визначається рівнянням $l(t) = 2t^2$ (м). Знайти:

– момент часу, коли нормальне прискорення кульки зрівняється з тангенціальним;
– модуль і напрям її повного прискорення в цю мить.

$(2\text{с}; \quad 5{,}6\text{м/с}^2$, $45°$ *до напрямку руху*.)

1.53 Частинка рухається по дузі кола радіуса $R = 1{,}00$ м за законом $l = A\sin\omega t$, де l – дугова координата, A = 0,80 м, $\omega = 2{,}00$ с$^{-1}$. Визначити повне прискорення частинки в точках $l = \pm A$ та $l = 0$.

$(2{,}6\text{м/с}^2; \quad 3{,}2\text{м/с}^2.)$

1.54 Частинка рухається в додатньому напрямку осі OX так, що її швидкість змінюється в залежності від координати, як $v = \alpha\sqrt{x}$, де $\alpha = 2\ \text{м}^{1/2}/\text{с}$. У момент часу $t = 0$ с координата частинки $x_0 = 0$ м. Визначити залежність від часу швидкості та прискорення частинки, а також середню швидкість частинки на шляху 4 м.

$\left(v = 2t; \quad a = 2\ \text{м/с}^2; \quad \langle v \rangle = 2\text{м/с}. \right)$

1.55 Матеріальна точка рухається, сповільнюючись, по прямій з прискоренням, модуль якого залежить від її швидкості за законом $a = \rho\sqrt{v}$, де $\rho = 2\ \text{м}^{1/2}/\text{с}^{3/2}$. В початковий момент часу швидкість точки $v_0 = 4\,\text{м/с}$.
Визначити:
– числові рівняння швидкості та прискорення точки;
– на якій відстані від початкового положення та через який час точка зупиниться?
– середню швидкість точки на цьому шляху.

$$\left(v(t) = (2-t)^2\,\text{м/с};\quad a(t) = 2(t-2)\,\text{м/с}^2;\quad 2{,}67\text{м};\quad 2\text{с};\quad 1{,}33\text{м/с.}\right)$$

1.56 Точка рухається, сповільнюючись, по колу радіуса R так, що в кожний момент часу її тангенціальне та нормальне прискорення за модулем однакові. В момент $t = 0$ швидкість точки $v = v_0$. Визначити залежність швидкості та повного прискорення точки від часу t та пройденого шляху S.

$$\left(v(t) = \frac{v_0 R}{v_0 t + R};\quad v(s) = v_0 e^{-\frac{S}{R}};\quad a(t) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{(v_0 t + R)^2};\quad a(s) = \frac{v_0^2 R\sqrt{2}}{R} e^{-\frac{2S}{R}}.\right)$$

1.57 Частинка починає рухатися з початку координат з прискоренням $\vec{a} = \alpha t\vec{i} + \beta t^2\vec{j}$, де $\alpha = 3$ м/с^3, $\beta = 2{,}25$ м/с^4. Знайти відстань частинки від початку координат на момент часу $t = 2$с.

($l = 5$м.)

1.58 Частинка рухається з прискоренням $\vec{a} = \alpha(\vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\sin\omega t)$. У момент часу $t = 0$ частинка перебувала в початку координат і мала швидкість $\vec{v}_0 = v_0\vec{j}$. α, ω, v_0 – додатні сталі. Знайти залежність від часу координат частинки $x(t)$, $y(t)$.

$$\left(x = \frac{\alpha}{\omega^2}(1-\cos\omega t),\, y = \left(v_0 + \frac{\alpha}{\omega}\right)t - \frac{\alpha}{\omega^2}\sin\omega t.\right)$$

1.59 Після зупинки двигуна катер, який рухався по озеру зі швидкістю v_0, рухається уповільнено з прискоренням, проекція якого на напрям руху $a_x = -v_0 k e^{-kt}$, де k – задана стала. Який шлях пройде катер від початку вільного руху до зупинки?

$$\left(S = \frac{v_0}{k}.\right)$$

1.60 Знайти відношення лінійних швидкостей та повних прискорень кінців хвилинної та годинної стрілок механічного годинника, якщо хвилинна стрілка в 1,5 раза довша за годинну.

(18; 216.)

1.61 З якою лінійною швидкістю рухаються точки екватора через добове обертання, якщо радіус Землі 6380 км?

(464 м/с.)

1.62 Стержень довжиною 50 см обертається з частотою 30 об/с навколо перпендикулярної до нього осі, що лежить із стержнем в одній площині. Один з кінців стержня має лінійну швидкість 57 см/с. Чому дорівнює лінійна швидкість другого кінця стержня?

(1 м/с, *або* 2,14 м/с.)

1.63 Швидкість точок колеса, що обертається, на ободі дорівнює $v_1 = 6\,\text{м/с}$, а $l = 15$ см ближче до осі — $v_2 = 5{,}5\,\text{м/с}$. Визначити радіус колеса.

(1,8м .)

1.64 Колесо обертається навколо нерухомої осі так, що кут повороту φ змінюється з часом t за законом $\varphi = kt^2$, $k = 0{,}2\ \text{рад/с}^2$. Визначити повне прискорення точки на ободі колеса в момент $t = 2{,}5$ с, якщо лінійна швидкість точки в цей момент дорівнює $v = 0{,}65\,\text{м/с}$.

(0,7м/с^2 .)

1.65 Диск радіуса $R = 50$ см обертається навколо власної нерухомої осі за законом $\varphi = 3 - 2t + 0{,}01t^3(\text{рад})$. Визначити тангенціальне, нормальне та повне прискорення точок на ободі диска на момент часу $t = 10$с.

(0,3м/с^2; 0,5м/с^2; 0,58м/с^2 .)

1.66 Ротор електродвигуна, що обертався з частотою 50 с$^{-1}$, після вимикання струму рухається рівносповільнено й зупиняється, зробивши 1680 обертів. Знайти кутове прискорення ротора.

(4,7 рад/с^2.)

1.67 Маховик починає розкручуватись із сталим кутовим прискоренням 0,01 рад/с^2. Через який час кут між векторами повного прискорення та лінійної швидкості точок маховика досягне величини 80°? Скільки обертів зробить маховик на цей момент?

(23,8 с; 0,45.)

1.68 Тверде тіло починає обертатися навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = \alpha t$, де $\alpha = 2\cdot10^{-2}$ рад/с^3. Визначити момент часу t, коли кут між векторами повного прискорення й швидкості довільної точки тіла складатиме $\varphi = 60^\circ$.

$\left(t = \sqrt[3]{(4/\alpha)tg\varphi} \approx 7\ \text{с.}\right)$

1.69 Диск обертається навколо власної нерухомої осі з початковою кутовою швидкістю $\omega_0 = 5$ рад/с і кутовим прискоренням $\beta = a - bt$, де $a = 4$ рад/с^2, $b = 2$ рад/с^3. Скільки обертів зробить диск до зупинки?

(5,3.)

1.70 Тверде тіло обертається, сповільнюючись, навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням $\beta = k\sqrt{\omega}$, $k = 2\,\text{рад}^{1/2}\text{с}^{-3/2}$. У момент $t = 0$ кутова швидкість тіла $\omega_0 = 9\,\text{рад/с}$. Визначити середню кутову швидкість та середнє кутове прискорення тіла за весь час обертання.

(3 рад/с; 3 рад/с^2 .)

1.71 Точка обертається навколо нерухомої осі так, що її кутова швидкість залежить від кута повороту за законом $\omega = \omega_0 - \alpha\varphi$, де α – задана додатня стала. В момент часу $t = 0$ кут $\varphi = 0$. Визначити залежність від часу:

– кута повороту $\varphi(t)$;

– кутової швидкості $\omega(t)$;

– кутового прискорення $\beta(t)$ тіла.

$$\left(\varphi(t) = \frac{\omega_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t});\quad \omega(t) = \omega_0 e^{-\alpha t};\quad \beta = -\omega_0 \alpha e^{-\alpha t}.\right)$$

1.72 Колесо котиться горизонтальною площиною без ковзання із швидкістю v, рис. 1.8. Визначити миттєві швидкості точок A, B, C і D.

($2v$; $v\sqrt{2}$; 0; $v\sqrt{2}$.)

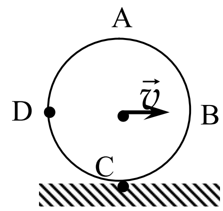

Рис.1.8

1.73 Трамвайне колесо котиться по рейці без ковзання (рис.1.9). Швидкості точок A і B відомі й дорівнюють v_A і v_B. Знайти швидкість руху осі колеса.

$$\left(\left(v_\text{B}^2 - v_\text{A}^2\right)\big/2v_\text{B}.\right)$$

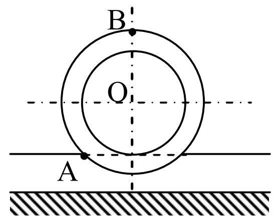

Рис.1.9

1.74 Вісь O диска, що обертається, рухається зі швидкістю $v = 2$ м/с (рис. 1.10). Знайти швидкість точки 2 на ободі диска, якщо швидкість точки 1 $v_1 = 1$ м/с.

(3 м/с, *або* 5 м/с.)

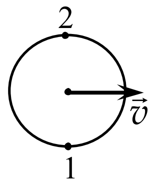

Рис. 1.10

1.75 Куля радіуса $R = 0{,}50$ м котиться прямолінійно без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $v = 1{,}0$ м/с. Визначити:

– модуль та напрям прискорення довільної точки на поверхні кулі;

– шлях, який проходить ця точка за час між двома послідовними дотиками до площини.

(2 м/с^2, *до центра колеса*; 4 м.)

2. *Динаміка*

2.1. Другий закон Ньютона (основне рівняння динаміки):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \quad \textit{або} \quad m\vec{a} = \vec{F}.$$

2.2. Диференціальне рівняння руху матеріальної точки в класичній механіці

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}.$$

2.3. Рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі відліку:

$$ma = \vec{F} + \vec{F}_{ін}.$$

2.4. Сили інерції:

$$\vec{F}_{пост} = -m\vec{a}_0; \quad \vec{F}_{відц} = m\omega^2\vec{r}; \quad \vec{F}_{кор} = 2m\left[\vec{v}\,\vec{\omega}\right].$$

2.5. Положення та рівняння руху центра мас системи:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_i m_i\vec{r}_i}{\sum\limits_i m_i}; \quad m\vec{a}_c = \vec{F}_{зов}.$$

2.6. Зміна імпульсу системи:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{зов}; \quad \Delta\vec{p} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{зов}\mathrm{d}t.$$

2.1 Гранична сила натягу, яку витримує нитка, дорівнює 150 Н. Чи розірветься вона, якщо:

– один кінець прив'язати до стіни, а за другий потягти із силою 150 Н?

– до кінців прикласти протилежно напрямлені сили по 100 Н кожна?

2.2 До кінців невагомого шнура прикладені дві протилежні за напрямом сили величиною F кожна. Чому дорівнює сила натягу шнура?

2.3 Два тягарці з масами m_1 і $m_2 = 2m_1$ з'єднані ниткою та підвішені до стелі на гумовому шнурі прикріпленому до першого тягарця. Яке прискорення отримає кожен із тягарців одразу після того, як нитку перерізати? Нитку та шнур вважати невагомими.

$$\left(\vec{a}_1 = -2\vec{g}, \quad \vec{a}_2 = \vec{g}\right).$$

2.4 До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвішено кулю, масою 0,3 кг, рис. 2.1. Знайти силу тиску кулі на стінку, якщо радіус кулі 2,5 см.

(1,225 Н.)

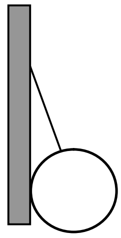

Рис. 2.1

2.5 Брусок маси m, який притиснутий до вертикальної стіни перпендикулярною до неї силою, перебуває в спокої. Потім брусок починають тягти по стіні у вертикальному напрямку. На скільки відрізняються сили, які необхідні щоби тягти брусок вгору та вниз?

($2mg$.)

2.6 До накинутої на нерухомий блок нитяної петлі приєднана така сама нитка (рис. 2.2). Нитку починають тягти за вільний кінець із деякою силою F. Якщо величину F поступовому збільшувати, то що розірветься: нитка чи петля?

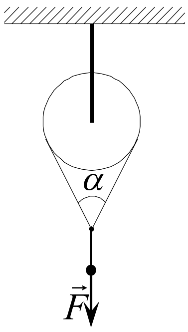

Рис. 2.2

2.7 Два бруски m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг з’єднані невагомою пружиною. Якщо підвісити систему за перший брусок, то довжина пружини складає 10 см, а якщо систему поставити вертикально першим бруском догори, то довжина пружини дорівнює 2,5 см. Знайти довжину вільної пружини.

(5 см.)

2.8 Дві пружини з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 з’єднують один раз послідовно, а другий – паралельно. Якої жорсткості k треба взяти пружину, щоб нею можна було замінити систему з двох пружин у кожному випадку?

$$\left(k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}; \quad k = k_1 + k_2. \right)$$

2.9 Тіло падає з великої висоти й пружно (без утрати швидкості) відбивається від горизонтальної поверхні. Чому дорівнює прискорення тіла відразу після відскоку? <u>*Указівка*</u>: *врахувати вплив опору повітря*.

($2g$.)

2.10 Людина на баржі відштовхується від причалу за допомогою жердини, до якої прикладає постійне зусилля 400 Н. На яку відстань відійде від причалу баржа за 30 с, якщо її маса становить 300 т?

(0,6 м.)

2.11 Автомобіль, завантажений двома контейнерами, рушає з місця із прискоренням 0,5 м/с^2. Маса кожного контейнера дорівнює масі автомобіля. З яким прискоренням почне рух цей автомобіль при тій самій силі тяги, якщо він буде завантажений лише одним контейнером і коефіцієнт опору тертя складає 0,1?

(1,5 м/с^2.)

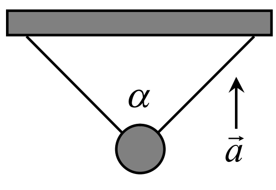

Рис. 2.3

2.12 Кулька прикріплена до планки двома нитками, як показано на рис. 2.3. Якого максимального прискорення $\vec{a}$ можна надати кульці, підіймаючи планку, якщо $\alpha = 60°$ і максимальна сила натягу, яку витримує кожна нитка, дорівнює вазі кульки?

(≈ 7 м/с^2.)

2.13 При масі M_0 повітряна куля зависає в повітрі, а при масі M_1 – рівномірно підіймається вгору. При якій масі M_2 куля буде рівномірно спускатися вниз із такою самою швидкістю?

($M_2 = 2M_0 - M_1$.)

2.14 Повітряна куля масою $M = 420$ кг опускається з певною сталою швидкістю. Яку масу баласту m має скинути аеронавт, аби куля почала підійматися з тією ж швидкістю, якщо сила опору повітря складає $\eta = 5\%$ від підіймальної сили?

$$\left(m = \frac{2\eta}{1+\eta} M = 40 \text{ кг.} \right)$$

2.15 Яку горизонтальну силу F треба прикласти до тіла масою $m = 2$ кг, що лежить на горизонтальній поверхні, щоб воно набуло прискорення $a = 20$ см/с^2? Коефіцієнт тертя між тілом та поверхнею $k = 0{,}01$.

(0,6 Н.)

2.16 До бруска маси 5 кг, який знаходиться на горизонтальній поверхні, прикладена горизонтальна сила 4 Н. Знайти прискорення бруска та силу тертя, що діє на нього, якщо коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею 0,1.

(0 м/с^2 4 Н.)

2.16′ Брусок під дією деякої горизонтальної сили ковзає по горизонтальній поверхні з прискоренням 2,0 м/с^2. Потім, не змінюючи сили, на брусок кладуть ще один такий самий. Яким буде прискорення брусків при коефіцієнті тертя між ними та поверхнею 0,1? g = 10 м/с^2.

(0,5 м/с^2).

2.17 До бруска, що лежить на горизонтальній поверхні, прикладають силу, яка напрямлена косо вниз. Під яким кутом до вертикалі має бути напрямлена ця сила, щоби при будь-якій її величині брусок не зрушив з місця, якщо коефіцієнт тертя між бруском і площиною дорівнює k?

($k > tg\alpha$.)

2.18 Брусок маси 5 кг ковзає по гладкій похилій площині з кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти:

– з якою силою брусок тисне на площину;
– якого прискорення він набуде;
– яку швидкість буде мати брусок через 2 секунди руху.

(≈ 43 Н; 5 м/с^2; ≈ 10 м/с.)

2.19 На клині, що рухається по горизонтальній поверхні праворуч з прискоренням a, знаходиться брусок маси m (рис. 2.4). При якій величині a брусок не буде ковзати по клину та з якою силою F він при цьому буде тиснути на клин? Тертя відсутнє.

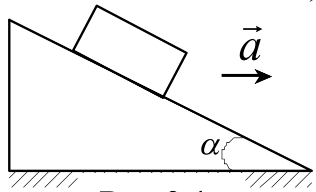

Рис. 2.4

$$(a = g\,\mathrm{tg}\alpha; \quad F = mg/\cos\alpha\,.)$$

2.20 Коефіцієнт тертя між бруском маси m та похилою площиною, на якій він знаходиться, дорівнює k. Визначити та показати на графіку залежність сили тертя, що діє на брусок, від кута нахилу α площини до горизонту.

2.21 Аби знайти коефіцієнт тертя між дерев'яними поверхнями, брусок поклали на дошку й почали її піднімати за один кінець доти, доки брусок не почав ковзати. Кут нахилу дошки при цьому склав $\alpha = 14°$ Чому дорівнює k?

$(\ k = \mathrm{tg}\alpha = 0{,}25.\ )$

2.22 Тіло, спрямоване вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту 45°, досягає найвищої точки підйому за час $t_1 = 1{,}3$ с. За який час t_2 тіло повернеться у вихідну точку, якщо коефіцієнт тертя $k = 0{,}4$?

$$\left(t_2 = t_1\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \approx 2\,\text{с.} \right)$$

2.23 Тіло пустили із початковою швидкістю v угору по похилій площині з кутом нахилу α до горизонту. Через який час швидкість тіла знову буде рівна v, якщо коефіцієнт тертя дорівнює k ($< \mathrm{tg}\alpha$)?

$$\left(2v\sin\alpha \big/ (\sin^2\alpha - k^2\cos^2\alpha). \right)$$

2.24 На похилій площині знаходиться тіло масою $m = 50$ кг, на яке діє притискаюча горизонтальна сила $F = 300$ Н. Знайти величину і напрям прискорення тіла та силу, з якою воно діє на поверхню. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30°$. Тертям знехтувати, взяти $g = 10$ м/с^2.

($\approx 0{,}2$ м/с^2, 583 Н.)

2.25 До тіла маси m, яке знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α, прикладено притискаючу горизонтальну силу F. При яких значеннях F тіло буде перебувати в спокої, якщо коефіцієнт тертя $k < \mathrm{tg}\alpha$?

$$\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha - k}{1 + k\mathrm{tg}\alpha} mg \le F \le \frac{\mathrm{tg}\alpha + k}{1 - k\mathrm{tg}\alpha} mg. \right)$$

2.26 На клині з кутом α, що закріплений на горизонтальній поверхні, лежить брусок маси m (рис. 2.5). Коефіцієнт тертя між бруском і клином k ($k > \mathrm{tg}\alpha$). Яку найменшу силу, паралельну до ребра клина, треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись? В якому напрямі почне рухатися брусок?

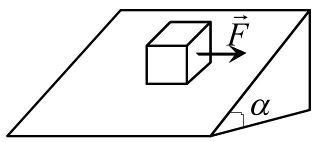

Рис. 2.5

$$\left(F = mg\sqrt{k^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha};\quad \textit{під кутом}\ \beta = \arcsin\left(\frac{\mathrm{tg}\alpha}{k}\right) \textit{до}\ \vec{F}. \right)$$

2.27 Тіло рухається по горизонтальній площині під дією сили F, що напрямлена вгору під кутом α до горизонту. Знайти прискорення тіла, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює k. За яких умов рух тіла буде рівномірним?

$$\left(a = \frac{F}{m}(\cos\alpha + k\sin\alpha) - kg;\ k = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha}. \right)$$

2.28 Тіло тягнуть за нитку по горизонтальній площині, прикладаючи одну й ту саму силу один раз горизонтально, а другий – під кутом $\alpha = 23°$ до горизонту. Знайти коефіцієнт тертя між тілом і площиною, якщо прискорення тіла в обох випадках однакове.

$$\left(k = tg\frac{\alpha}{2} = 0,2. \right)$$

2.29 Брусок маси m лежить на горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя k. Яку мінімальну силу треба прикласти до бруска, щоб він почав рухатись?

$$\left(\frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}. \right)$$

2.30 Два тіла з масами $m_1 = 50$ г *і* $m_2 = 100$ г, з'єднані ниткою, що витримує навантаження $T_{мах} = 5$ Н, лежать на гладкій горизонтальній поверхні. Яку максимальну горизонтальну силу $F_{мах}$ можна прикласти до першого тіла, щоб нитка не розірвалася? До другого?

(7,5 Н ; 15 Н.)

2.31 Нитку з двома тягарцями m_1 і m_2 перекинули через невагомий блок у вершині похилої площини так, що перший тягарець знаходиться на площині, а другий вільно звисає, і відпустили. Кут нахилу площини до горизонту $\alpha = 30°$, коефіцієнт тертя $k = 0,2$. З яким прискоренням і в якому напрямі рухається другий тягарець, якщо $m_1/m_2 = 0,25$?

(0,6 м/с^2.)

2.32 На краю горизонтальної платформи радіуса $R = 4,85$ м лежить маленька шайба. Платформа починає рівноприскорено обертатися навколо своєї осі так, що через $t_0 = 2$ хв набуває кутової швидкості $\omega_0 = 1,2$ рад/с. Через який час τ шайба зісковзне з платформи, якщо коефіцієнт тертя між тілами $k = 0,02$?

$$\left(\tau = \sqrt{\frac{t_0}{\omega_0}} \sqrt[4]{\left(\frac{kgt_0}{\omega_0 R}\right)^2 - 1} = 20\,\text{с}. \right)$$

2.33 Кулька маси $m = 200$ г, яка підвішена до стелі на нитці довжиною $L = 3,0$ м, обертається в горизонтальній площині по колу радіуса $R = 1,0$ м. Знайти частоту обертання кульки та натяг нитки.

$$\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)\sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - R^2}}} = 17,8\,\text{хв}^{-1}; \quad \frac{mg}{\sqrt{1-(R/L)^2}} = 2,1\,\text{Н}. \right)$$

2.34 Літак робить "мертву петлю" радіуса $R = 500$ м із сталою швидкістю $v = 360$ км/год. Знайти, з якою силою пілот масою $m = 70$ кг тисне на сидіння в нижній, верхній та середніх точках петлі. $g = 10$ м/с^2.

(2,1 кН; 0,7 кН; ≈1,6 кН.)

2.35 Тіло маси m рухається в площині XOY за законом $x = A\sin\omega t$, $y = A\cos\omega t$, де A, ω – сталі. Знайти модуль та напрям сили, що діє на тіло.

($F = mA\omega^2$; *напрям – до центра кривизни в кожній точці траєкторії.*)

2.36 Радіус-вектор точки маси m = 1,0 кг змінюється з часом за законом $\vec{r}(t) = a_1(t+\tau)^2\vec{i} + a_2(t-\tau)^3\vec{j}$, де a_1 = 30 м/с^2, a_2 = 1,0 м/с^3, τ = 10 с. Визначити:

– вектор діючої на точку сили $\vec{F}(t)$, його модуль F_0 і кут α_0, який він складає з віссю OX у початковий момент часу;
– проміжок часу, за який напрям сили зміниться на 90^o.

$$\left(\vec{F}(t) = 2m\left(a_1\vec{i} + 3a_2(t-\tau)\vec{j}\right),\ F_0 \approx 85\,\text{Н},\ \alpha_0 = 45^o;\quad 20\ \text{с.}\right)$$

2.37 Тіло маси m починає рухатися під дією сили, що залежить від часу, як $\vec{F}(t) = \alpha_1 t\vec{i} + \alpha_2 t^2\vec{j}$, де α_1 і α_2 задані сталі. Визначити залежності від часу швидкості $\vec{v}(t)$ та переміщення $\vec{S}(t)$ тіла.

$$\left(\vec{v} = \frac{\alpha_1 t^2}{2m}\vec{i} + \frac{\alpha_2 t^3}{3m}\vec{j};\quad \vec{S} = \frac{\alpha_1 t^3}{6m}\vec{i} + \frac{\alpha_2 t^4}{12m}\vec{j}.\right)$$

2.38 Тіло маси m = 1 кг починає рух під дією сили $\vec{F} = \vec{F}_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$, $F_0 = 5\,\text{Н}$, $\tau = 10\,\text{с}$. Знайти швидкість тіла через t = 10 с після початку руху.

$$\left(\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}\left(t - \frac{t^2}{2\tau}\right);\quad v = 25\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.\right)$$

2.39 До тіла маси m, яке лежить на горизонтальній поверхні, прикладена вертикальна сила $F = \alpha t$, де α – задана стала. Знайти рівняння руху тіла $y = y(t)$.

$$\left(t \le \frac{mg}{\alpha}:\quad y = 0;\qquad t > \frac{mg}{\alpha}:\quad y(t) = \frac{\alpha t^3}{2m} - \frac{gt^2}{2}.\right)$$

2.40 Частинка масою m почала рухатись під дією сили $F = F_0\sin\omega t$, де F_0 та ω – сталі. Знайти залежність від часу пройденого частинкою шляху $S(t)$ і показати її графік.

$$\left(S(t) = \frac{F_0}{m\omega^2}\left(\omega t - \sin\omega t\right).\right)$$

2.41 Після встановлення рівномірного руху парашутист спускається із швидкістю 4 м/с. Яким було прискорення парашутиста на момент, коли швидкість спуску становила 3 м/с? Силу опору повітря вважати прямо пропорційною швидкості парашутиста.

(g/4.)

2.42 Катер масою m рухається по озеру зі швидкістю v_0. В момент t = 0 його двигун вимкнули. Приймаючи, що сила опору є пропорційною швидкості катера $\vec{F} = -r\vec{v}$, знайти швидкість катера в залежності від часу $v(t)$ та від пройденого шляху $v(s)$, а також повний шлях до зупинки S_{max}.

$$\left(v(t) = v_0 e^{-\frac{r}{m}t};\quad v(s) = v_0 - \frac{r}{m}s;\quad S_{\max} = \frac{mv_0}{r}.\right)$$

2.43 Куля, що має швидкість v_0, пробиває дошку товщини h і вилітає з неї зі швидкістю v. Знайти час руху кулі в дошці, вважаючи силу опору пропорційною квадратові швидкості.

$$\left(t = \frac{h\left(v_0 - v\right)}{v_0 v \ln \frac{v_0}{v}}. \right)$$

2.44 Тягарець, підвішений на пружині, розтягує її на величину X_0. Потім тягарець підіймають до положення, в якому пружина не розтягнена, й без поштовху відпускають. Знайти максимальне видовження пружини та максимальну швидкість тягарця.

$$\left(2X_0; \quad \sqrt{gX_0}. \right)$$

2.45 Маленька шайба починає зісковзувати вниз по площині, що нахилена під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту й має змінний коефіцієнт тертя $k = \eta x$, де $\eta = 0{,}5$ м$^{-1}$, а x – відстань, яку пройшла шайба. Знайти максимальну швидкість шайби v_m та шлях S_m, який вона пройде до зупинки.

$$\left(v_m = \sin\alpha\sqrt{g/\eta\cos\alpha} \approx 3{,}7\text{м/с}; \quad S_m = 2\text{tg}\alpha/\eta = 4{,}0\text{м}. \right)$$

2.46 Тіло масою m = 2 кг рухається за законом $x(t) = 5 - 8t + 4t^2$ (м). Знайти імпульс тіла та діючу на нього силу на моменти 2 с та 4 с після початку руху.

(16 кгм/с; 48 кгм/с; 16 Н.)

2.47 Тіло маси m кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити зміну вектора імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ за проміжок часу τ під час польоту.

$$\left(\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau. \right)$$

2.48 Тіло, маса якого m, кинули під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0. Визначити модуль зміни вектора імпульсу та зміну його модуля за час польоту тіла.

($2mv_0\sin\alpha$; 0.)

2.49 Кулька маси 100 г, яка вільно падає на горизонтальну поверхню, безпосередньо перед ударом має швидкість 20 м/с. Знайти модуль зміни імпульсу $|\Delta\vec{p}|$ та зміну модуля імпульсу Δp кульки внаслідок удару, якщо він є:

– а) абсолютно пружним (кулька не втрачає швидкості);

– б) абсолютно непружним (кулька прилипає до поверхні).

(а) $|\Delta\vec{p}|$ = 4 кгм/с, $\Delta p = 0$; б) $|\Delta\vec{p}|$ = 2 кгм/с, $\Delta p = -2$ кгм/с.)

2.50 Кулька для гри в пінг-понг, яка має масу 20 г та швидкість 20 м/с, ударяє перпендикулярно у вертикальну сталеву стінку й відскакує без зміни швидкості. Знайти середню силу, з якою кулька вдаряє в стінку, якщо тривалість удару 0,1 с.

(8Н.)

2.51 Металева кулька масою 10 г вільно падає на горизонтальну плиту з висоти 45 см і пружно (без утрати швидкості) відбивається від неї. Знайти середню силу, з якою кулька діє на плиту під час удару, якщо його тривалість 0,2 с. g = 10 м/с^2.

(0,4 Н.)

2.52 Знайти середню силу віддачі при стрільбі з автомата, якщо маса кулі 10 г, швидкість вильоту із ствола 400 м/с і частота стрільби 300 пострілів за хвилину.

(20 Н.)

2.53 Канат маси m і довжини l утримують за один кінець так, що інший торкається горизонтальної поверхні. В момент $t = 0$ канат відпускають. Знайти силу тиску каната на поверхню при падінні в залежності від часу $F(t)$ та повний імпульс p, який канат передасть поверхні за час падіння.

$$\left(F(t) = \frac{mg^2}{l} t^2; \quad p = \frac{2m}{3}\sqrt{2gl}. \right)$$

2.54 З яким горизонтальним прискоренням повинна рухатися вертикальна стінка, щоб прикладена до неї гумова шайба не падала при коефіцієнті тертя між шайбою та стінкою k = 0,5. Задачу розглянути в системі відліку стінки.

($2g$.)

2.55 На гладкій горизонтальній поверхні лежить дошка маси M, а на ній – шайба маси m. Яку мінімальну горизонтальну силу треба прикласти до дошки, щоби шайба почала ковзати по ній при коефіцієнті тертя k? Задачу розглянути в системі відліку дошки.

$$\left(k(M+m)g. \right)$$

2.56 На похилій площині з кутом нахилу до горизонту α, що рухається із сталим горизонтальним прискоренням, знаходиться брусок. При яких значеннях a прискорення площини брусок не буде ковзати по ній, якщо коефіцієнт тертя між тілами дорівнює k ($k < \mathrm{tg}\alpha$)?

$$\left(\frac{\sin\alpha - k\cos\alpha}{k\sin\alpha + \cos\alpha} g < a < \frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha} g. \right)$$

2.57 На похилій площині з кутом нахилу до горизонту α, що рухається із сталим горизонтальним прискоренням, знаходиться брусок. При яких значеннях a прискорення площини брусок не буде ковзати по ній, якщо коефіцієнт тертя між тілами дорівнює k ($k > \operatorname{tg}\alpha$)?

$$\left(\frac{k - \operatorname{tg}\alpha}{1 + k\operatorname{tg}\alpha} g \le a \le \frac{k + \operatorname{tg}\alpha}{1 - k\operatorname{tg}\alpha}.\right)$$

2.58 Людина маси m = 60 кг іде рівномірно по краю горизонтальної круглої платформи радіуса R = 3,0 м, яку обертають із кутовою швидкістю ω = 1 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через її центр. Знайти горизонтальну складову сили, що діє на людину з боку платформи, якщо результуюча сил інерції, прикладених до неї у системі відліку «платформа», дорівнює нулю.

$$(F = m\omega^2 R/4 = 45 \text{ Н}.)$$

2.59 По горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\omega = 6$ рад/с, рівномірно рухається тіло масою m = 0,5 кг із швидкістю v' = 50 см/с відносно диска. Знайти горизонтальну силу, з якою диск діє на тіло в момент, коли воно знаходиться на відстані r = 30 см від осі й рухається відносно диска: а) вздовж діаметра; б) по прямій перпендикулярно до діаметра.

(а) 6,2 Н; б) 8,4 Н або Н; 5,5 Н.)

2.60 Тіло маси m = 1кг рухається уздовж меридіана зі швидкістю v' = 30 м/с. Визначити величину відцентрової $F_{вц}$ і коріолісової $F_к$ сил інерції, що діють на тіло внаслідок добового обертання Землі у випадку, коли воно знаходиться: а) на широті $\varphi = 60°$ і б) на екваторі. Показати на рисунку вектори цих сил.

(а) $F_{вц}$ =1,7 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 3,8$\cdot 10^{-3}$ Н; б) $F_{вц}$=3,4 $\cdot 10^{-2}$ Н; $F_к$ = 0.)

2.61 Поїзд маси m = 2000 т рухається на північній широті φ = 60°.
Знайти:

– модуль і напрям сили бічного тиску поїзда на рейки, якщо він рухається уздовж меридіана зі швидкістю v = 54 км/год;
– у якому напрямі і з якою швидкістю мав був би рухатися поїзд, аби результуюча сил інерції, що діють на потяг в системі відліку «Земля», дорівнювала нулю.

($F = 3780$ Н, *праворуч по ходу*; $v \approx 420$ км/год, *на захід.*)

2.62 Гладкий горизонтальний диск обертають із кутовою швидкістю ω = 5,0 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його центр. В центрі диска помістили невелику шайбу масою m = 60 г і надали їй поштовхом горизонтальну швидкість v_0 = 2,6 м/с. Знайти модуль сили Коріоліса, що діє на шайбу в системі відліку «диск», через t = 0,5 с після початку її руху.

$$\left(F = 2m\omega v_0\sqrt{1 + (\omega t)^2} = 4{,}2 \text{ Н.}\right)$$

2.63 Горизонтально розташований гладкий стержень обертають із кутовою швидкістю ω =2,0 рад/с навколо вертикальної осі, що проходить через його кінець. По стержню вільно ковзає муфта маси m = 0,5 кг, яка починає рух від указаної осі зі швидкістю v_0 = 1 м/с. Знайти силу Коріоліса (у системі відліку стержня) що діє на муфту в мить, коли вона знаходиться на відстані r = 50 см від осі обертання.

$$\left(F = 2mr\omega^2\sqrt{1+(v_0/\omega r)^2} = 2{,}8\text{Н.}\right)$$

2.64 Рушницю навели на вертикальну лінію мішені, що знаходиться точно в північному напрямі, й вистрелили. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань h і в який бік відхилиться куля від указаної лінії при влучанні в мішень. Постріл зроблено в горизонтальному напрямі на широті φ = 60°, швидкість кулі v = 900 м/с, відстань до мішені S = 1,0 км.

$$\left(h \approx \frac{2\pi S^2 \sin\varphi}{vT} = 7\,\text{см}, \quad T - \textit{тривалість доби.}\right)$$

2.65 На екваторі з висоти h = 500 м на поверхню Землі вільно падає тіло. Нехтуючи опором повітря, знайти, на яку відстань s і в який бік тіло при падінні відхилиться від вертикалі.

$$\left(\textit{на схід}, \quad s \approx \frac{2}{3}\omega h\sqrt{2h/g} = 24\,\text{см}, \quad \omega\text{ - }\textit{кутова швидкість обертання Землі.}\right)$$

2.66 Знайти, який кут α із горизонтом складає поверхня води в річці на широті φ через дію сили Коріоліса, якщо річка тече з півночі на південь зі швидкістю v.

$$(\mathrm{tg}\alpha = 2v\omega\sin\varphi/g\,.)$$

2.67 Знайти відносне зменшення ваги тіла $\varepsilon = \Delta P/P_0$ (P_0 – вага на полюсі) на екваторі, зумовлене добовим обертанням Землі.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = 4\pi^2 R^3/GMT^2 \approx 0{,}34\%; \quad R, M - \textit{радіус і маса Землі}, \\ T - \textit{тривалість доби}, \quad G - \textit{гравітаційна стала}. \end{pmatrix}$$

2.68 Знайти, на скільки відсотків η сила тиску тіла на горизонтальну опору на широті φ = 60° менша, ніж на полюсі, через добове обертання Землі.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon = 4\pi^2 R^3\cos^2\varphi/\gamma MT^2 \approx 0{,}1\%; \quad R, M - \textit{радіус і маса Землі}, \\ T - \textit{тривалість доби}, \quad \gamma - \textit{гравітаційна стала}. \end{pmatrix}$$

2.69 Чотири кульки з масами 1, 2, 3, і 4 г закріплені в указаній послідовності на невагомому стержні на відстані 30 см одна від одної. Визначити положення центра мас системи.

(*Співпадає з кулькою* 3 г.)

2.70 Чотири кулі, маси яких 2 кг, 4 кг, 6 кг і 8 кг, розміщені у вершинах квадрата зі стороною 2 м. Знайти відстань між центром мас системи та центром найлегшої кулі.

(1,72 м.)

2.71 Три рухомі кулі масами 2 кг, 4 кг і 6 кг у певний момент часу знаходяться у вершинах правильного трикутника й мають швидкості, відповідно, 6 м/с, 3 м/с і 2 м/с, які напрямлені вздовж сторін трикутника в один бік. Знайти швидкість центра мас системи в цей момент часу.

(0.)

2.72 Однорідний диск маси m = 5 кг і радіуса 20 см обертається з кутовою швидкістю 2,5 рад/с навколо перпендикулярної до його площини осі, котра проходить: а) через центр диска; б) через його край. Знайти імпульс диска в обох випадках.

(а) 0; б) 2,5 кгм/с.)

2.73 Через невагомий блок, який прикріплений до стелі, перекинута невагома нерозтяжна нитка з тягарцями маси m_1 та m_2 на кінцях. Знайти прискорення центра мас цієї системи.

$$\left(\vec{a} = \vec{g}\frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}.\right)$$

2.74 Система, що складається з двох з'єднаних між собою невагомою пружинкою кульок масами m_1 і m_2, знаходиться в однорідному полі сил тяжіння і в початковий момент часу має імпульс $\vec{P}_0$. Нехтуючи опором повітря, знайти залежності від часу імпульсу цієї системи $\vec{P}(t)$ та радіуса-вектора її центра мас $\vec{r}_c$ відносно його початкового положення.

$$\left(\vec{P} = \vec{P}_0 + (m_1 + m_2)\vec{g}t; \quad \vec{r}_c = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2, де\ \vec{v}_0 = \vec{P}_0 \big/ (m_1 + m_2).\right)$$

2.75 Нерухома граната маси m розірвалася на два осколки, що розлетілися зі швидкостями v та $3v$. Знайти маси осколків та їх сумарний імпульс $\vec{P}$.

($m_1 = 3m/4$; $m_2 = m/4$; $\vec{P} = 0$.)

2.76 Два човни рухаються по інерції паралельними курсами назустріч один одному. Коли човни порівнялися, з першого в другий переклали вантаж масою 25 кг. Відтак другий човен зупинився, а перший продовжив рух із швидкістю 8 м/с. З якими швидкостями рухалися човни до зустрічі, якщо маса другого човна 100 кг?

(8 м/с; 2 м/с.)

2.77 У момент, коли швидкість гранати дорівнювала 10 м/с і була напрямлена під кутом 60° до горизонту, вона розірвалася на два осколки однакової маси, один із яких відлетів вертикально вгору, а другий – під кутом 45° до горизонту. Знайти швидкості осколків одразу після розриву.

(v_1 = 27,3 м/с або 7,3 м/с; v_2 = 14,1 м/с.)

2.78 Частинка маси m_1, налітає із швидкістю v на нерухоме вільне тіло маси m_2 і відскакує під прямим кутом із швидкістю u. З якою швидкістю почне рухатися друге тіло?

$$\left((m_1/m_2)\sqrt{v^2 + u^2}.\right)$$

2.79 Кулька, що вільно рухається по гладкій горизонтальній поверхні, налітає ні іншу, нерухому кульку й відскакує під прямим кутом із удвічі меншою швидкістю. Під яким кутом до початкового напрямку руху першої кульки відлетить друга?

(26,6°.)

2.80 В човні, маса якого M, стоїть людина маси m. Човен пливе із швидкістю v . Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку зі швидкістю u відносно човна. Знайти швидкість човна після стрибка, якщо людина стрибає: а) у напрямку руху човна; б) у протилежному напрямку.

$$\left(a)\,\frac{(m+M)v-mu}{m+M};\quad б)\,\frac{(m+M)v-mu}{m-M}.\right)$$

2.81 З гармати роблять постріл під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Коли колеса гармати закріплені, швидкість вильоту снаряда v_0 = 180 м/с. Знайти, з якою швидкістю u почне відкочуватись гармати після пострілу, якщо звільнити її колеса. Маса снаряда в η = 50 разів менша за масу гармати, тертям знехтувати.

$$\left(u = \frac{v_0 \cos\alpha}{\eta+1} \approx \frac{v_0 \cos\alpha}{\eta} = 1{,}8\,\text{м/с.}\right)$$

2.82 Куля, що летить із швидкістю v вниз під кутом α до вертикалі, влучає та майже миттєво застряє в бруску, котрий лежить на горизонтальній поверхні. Маса бруска в η разів більша за масу кулі, коефіцієнт тертя між бруском і поверхнею k. Знайти:

– через який час брусок зупиниться, якщо внаслідок удару він почне ковзати по поверхні;
– при яких значеннях кута α брусок не почне ковзати, якою б не була швидкість кулі.

$\left(1)\, v\sin\alpha/(1+\eta)kg;\quad 2)\,\alpha \le \operatorname{arctg} k. \right)$

2.83 Визначити масу Землі за її радіусом R = 6370 км та прискоренням вільного падіння на полюсі g=9,83 м/с^2.

($5{,}98\cdot10^{24}$ кг.)

2.84 Визначити масу Землі за періодом обертання навколо неї Місяця (27,32 діб) та радіусом його орбіти (384,4 тис. км).

($5{,}98\cdot10^{24}$ кг.)

2.85 Визначити масу Сонця, знаючи середню відстань від Землі до Сонця (149,50 млн. км) і період обертання Землі навколо нього – 365,26 діб.

($1{,}99\cdot10^{30}$ кг.)

2.86 Знайти першу космічну швидкість v_1 для Землі, тобто – мінімальну швидкість, яку треба надати тілу, щоби вивести його на навколоземну орбіту.

$$\left(v_1 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9\,\text{км/с.}\right)$$

2.87 Знайти другу космічну швидкість v_2 – мінімальну швидкість, яку треба надати тілу, щоби воно змогло подолати земне тяжіння й почало рухатися по навколосонячній орбіті.

$$\left(v_2 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2 \ \text{ км/с.}\right)$$

2.88 Визначити приблизну величину третьої космічної швидкості v_3 – найменшої швидкості тіла відносно Землі, необхідної для того, щоби воно змогло покинути Сонячну систему. Обертанням Землі навколо осі знехтувати.

$$\left(\begin{array}{l} v_3 \approx \sqrt{2v_1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 V_1^2} \approx 17\text{км/с}, \quad v_1^2 = \gamma M_з / R_з, \quad V_1^2 = \gamma M_c / R_0, \\ R_0 - \textit{радіус орбіти Землі}). \end{array}\right)$$

2.89 Порівняти сили, з якими Сонце та Земля діють на Місяць. Як пояснити той факт, що Місяць є супутником Землі?

$(F_c/F_з$=2,1.)

2.90 Знайти відстань від Венери до Сонця за періодом її обертання навколо Сонця – 227,70 діб і періодом обертання Землі навколо Сонця – 365,26 діб.

($1{,}08\cdot10^8$ км = 0,63 астр. од.)

2.91 На якій висоті h на планеті з радіусом R прискорення вільного падіння вдвічі менше, ніж біля поверхні?

$$\left(h = \left(\sqrt{2}-1\right)R.\right)$$

2.92 При якій тривалості доби тіла на екваторі планети перебували б у невагомості? Розрахунок зробити для Землі.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{R^3/\gamma M} = 1 \text{ год } 25 \text{ хв}\right).$$

2.93 Комета, захоплена Сонцем на орбіту, має лінійну швидкість в афелії (точці найбільшого віддалення від Сонця) V_1 = 0,8 км/с. Її відстань від Сонця при цьому дорівнює $r_1 = 6\cdot10^{12}$ м. У перигелії V_2 = 50 км/с. Знайти відстань r_2 комети від Сонця в перигелії (точці найменшого віддалення від Сонця).

$$\left(r_2 = \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2\gamma M} + \frac{1}{r_1}\right)^{-1} \approx 10^{11}\text{м.}\right)$$

2.94 Тіло починає вільно падати в наскрізну шахту, пробурену по діаметру одного із супутників Юпітера. Якої максимальної швидкості набуде тіло, якщо радіус супутника R і прискорення вільного падіння на його поверхні g? Супутник вважати однорідною кулею.

$$(\ v_{\max} = \sqrt{gR} \ .)$$

2.95 Деяка планета маси M рухається навколо Сонця по еліпсу так, що мінімальна відстань між нею і Сонцем дорівнює r_1, а максимальна – r_2. Знайти період обертання планети навколо Сонця.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{a^3/\gamma M}, \quad \text{де} \quad a = 1/2\left(r_1 + r_2\right).\right)$$

2.96 Матеріальна точка маси m розташована на осі тонкого кільця радіуса R і маси M. Визначити:

– силу притягання $F(z)$ точки до кільця в залежності від відстані z до його центра;
– наближені вирази $F_1(z)$ і $F_2(z)$ сили відповідно при малих та при великих відстанях z і показати якісно графік $F(z)$;
– відстань z_m, на якій сила F є максимальною.

$$\left(1)\quad F = \frac{\gamma m M z}{\left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}. \quad 2)\quad F \approx \frac{\gamma m M z}{R^3};\quad F \approx \frac{\gamma m M}{z^2}. \quad 3)\quad z_m = \frac{R}{\sqrt{2}}. \right)$$

2.97 Усередині однорідної кулі з густиною ρ є сферична порожнина, положення центра котрої відносно центра кулі визначається радіусом-вектором $\vec{a}$. Знайти напруженість поля тяжіння $\vec{G}$ в порожнині.

$$\left(\vec{G} = -\frac{4\pi\rho\gamma}{3}\vec{a}. \right)$$

2.98 Тілу надали на полюсі Землі швидкість V_0, напрямлену вертикально вгору. Знаючи радіус Землі R і прискорення вільного падіння на її поверхні g, знайти висоту, на яку підніметься тіло. Опором повітря знехтувати.

$$\left(h = R/(2gR/V_0^2 - 1). \right)$$

2.99 Знайти період обертання супутника, який рухається навколо планети поблизу її поверхні, якщо середня густина планети ρ = 3,3 г/см^3.

$$\left(T = \sqrt{3\pi/\rho\gamma} = 1{,}8\ \text{ год.} \right)$$

2.100 Супутник вивели на колову навколоземну орбіту в меридіональній площині. Знайти висоту h орбіти супутника, якщо його орбітальна швидкість дорівнює V.

$$\left(h = R/(gR/V^2 - 1). \right)$$

2.101 Обчислити радіус колової орбіти стаціонарного супутника Землі, який залишається нерухомим відносно її поверхні. Яка його швидкість в інерціальній системі відліку, пов'язаній з центром Землі?

$$\left(r = \sqrt[3]{\gamma M_з (T_з/2\pi)^2} = 4{,}2\cdot 10^4\,\text{км};\quad \upsilon = 3{,}1\,\text{км/с.} \right)$$

2.102 Знайти початкову швидкість, яку треба надати ракеті, щоб вона змогла вийти за межі сонячної системи. Ракета стартує так, що напрям її швидкості утворює кут φ = 45° з напрямом орбітального руху Землі навколо Сонця.

$$\left(\upsilon = \sqrt{\frac{\gamma M_\text{С}}{R_0}} \left(\sqrt{2\left(1 + \frac{M_3 R_0}{M_\text{С} R_3}\right) - \sin^2\varphi} - \cos\varphi \approx 17\text{км/с} \right). \right)$$

3. *Робота та енергія*

3.1. Робота та потужність сили:

$$A = \int \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}; \quad P = \frac{\delta A}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{v}.$$

3.2. Зміна повної механічної енергії системи:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = A_{дис} + A_{зов}$$

3.3. Зв'язок між консервативною силою та потенціальною енергією:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U; \quad \Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\int_1^2 F_l \,\mathrm{d}l$$

3.1. Тіло рухається горизонтально по прямій за законом $x = 10 + 2t + t^2$ під дією сили 10 Н, що напрямлена під кутом 60° до горизонту. Обчислити роботу й середню потужність сили за перші 10 с руху та миттєву потужність укінці цього проміжку часу.

(600 Дж; 60 Вт; 110 Вт).

3.2. На частинку, що перемістилася по деякій криволінійній траєкторії з точки $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ в точку $\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, серед інших, діяла сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (усі величини в основних одиницях СІ). Знайти роботу даної сили на вказаному переміщенні. Показати на рисунку радіуси-вектори й вектор переміщення частинки, а також вектор заданої сили.

($A = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -17$ Дж).

3.3. На точку, що рухається по ділянці траєкторії у формі півкільця радіуса 5 м із сталою швидкістю 1 м/с, діє постійна сила 2 Н, напрямлена паралельно до діаметра півкільця. Знайти:
– роботу цієї сили на всьому шляху;
– миттєву потужність сили в початковій, середній та кінцевій точках траєкторії;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(20 Дж; 0, 2 Вт, 0; 1,27 Вт).

3.4. Точка, що рухається по колу радіуса 5 м із сталою швидкістю 1 м/с, проходить шлях у третину кола. На всьому шляху на точку діє постійна сила 2 Н, напрямлена весь час паралельно дотичній до кола в початковій точці. Знайти:
– роботу сили на всьому шляху;
– миттєву потужність сили в початковій, середній та кінцевій точках траєкторії;
– середню потужність сили на всьому шляху.

(8,66 Дж; 2 Вт, 1 Вт, – 1 Вт; 0,83 Вт).

3.5. Тіло маси m = 1 кг кинуто під кутом $\alpha = 30^{\circ}$ до горизонту зі швидкістю v_0 = 20 м/с. Визначити потужність сили тяжіння в початковий момент та у вищій точці траєкторії, g = 10 м/с^2.

($-mgv_0\sin\alpha = -100$ Вт; 0).

3.6. Тіло на мотузці рівномірно обертається по колу із швидкістю 2 м/с при силі натягу мотузки 10 Н. Знайти потужність сили натягу.

(0).

3.7. Людина маси 60 кг долає один марш сходів висотою 3,5 м за 2,8 с. Визначити середню потужність у кінських силах (1 к.с. = 735 Вт), яку розвиває людина при цьому.

(1 к.с.).

3.8. На горизонтальному столі, що складається з двох половин із різного матеріалу, лежить дошка довжини l і маси m, яка одним кінцем торкається лінії розмежування тих половин. Яку роботу треба виконати, щоби перетягти дошку з однієї половини стола на іншу, якщо коефіцієнти тертя дорівнюють k_1 і k_2.

($A = mgl(k_1 + k_2)/2$).

3.9. На тіло в напрямку руху діє сила $F = kx$, де x – відстань, пройдена уздовж траєкторії, k = 0,1 Н/м. Знайти роботу сили на шляху 10 м.

(5 Дж.)

3.10. Тіло маси m = 1 кг починає рухатися під дією змінної сили $F = kt$, де t – час, k = 0,1 Н/с. Знайти роботу сили за перші τ = 10 с руху.

$\left(A = k^2\tau^4/8m = 12{,}5 \text{ Дж.}\right)$

3.11. Яку роботу треба виконати, щоби невеликий брусок маси m повільно витягти на вершину гірки довільного профілю, весь час прикладаючи силу в напрямку руху? Довжина основи гірки l, висота h, коефіцієнт тертя між бруском і гіркою на всьому шляху k.

($A = mg(h + kl)$.)

3.12. Брусок m = 500 г починають тягти за нитку по гладкій горизонтальній поверхні, прикладаючи сталу за величиною й напрямом силу F = 3,6 Н. Який кут із горизонтом складає нитка, якщо на шляху l = 5 м брусок набрав швидкість v = 6 м/с?

$\left(\arccos\left(mv^2/2Fl\right) = 60^{\circ}\right)$

3.13. Авто при сталій ефективній силі тяги двигуна на заданій горизонтальній ділянці шляху розганяється з місця до швидкості 100 км/год. До якої швидкості розженеться авто на цій ділянці при вдвічі більшій силі тяги?

(141,4 км/год.)

3.14. Авто, що рухається зі швидкістю v, після вимикання двигуна проходить до зупинки відстань S. Яку відстань S_1 пройде авто до зупинки при початковій швидкості $v_1 = 2v$? Силу опору в обох випадках вважати однаковою.

($S_1 = 4S$.)

3.15. В одного автомобіля маса вдвічі більша, а кінетична енергія вдвічі менша, ніж у другого. А коли кожен з автомобілів збільшив швидкість на

30 км/год, їхні кінетичні енергії зрівнялися. Знайти початкові швидкості автомобілів.

(21,2 км/год; 42,4 км/год.)

3.16. Куля налітає перпендикулярно на стос покладених одна на одну однакових дощок. У якій за ліком дощці N застряне куля, якщо в першій вона втрачає η = 11% швидкості. Силу тертя в дошках вважати незалежною від швидкості кулі.

$$\left(n = 1/(1-(1-\eta)^2) = 4{,}81 \quad \Rightarrow \quad N = 5.\right)$$

3.17. Невеличка муфточка m = 100 г нанизана на горизонтальну гладку дротину у формі кола радіуса R = 50 см. На муфточку починає діяти в площині кола стала за величиною й напрямком сила F = 22,5 Н. Якої максимальної швидкості набуде муфточка, якщо в початковому положенні сила напрямлена по дотичній до кола?

$$\left(v = \sqrt{2FR/m} = 15 \text{ м/с.}\right)$$

3.18. Частинка рухається по колу радіуса R так, що її кінетична енергія залежить від пройденого шляху за законом $K = \alpha S^2$, де α – задана стала. Визначити залежність від шляху сили, що діє на частинку $F(S)$.

$$\left(F(S) = 2\alpha S\sqrt{1+(S/R)^2}.\right)$$

3.19. Канат довжини l і маси m лежить на підлозі. Яку мінімальну роботу треба виконати, аби перевести канат у вертикальне положення, підіймаючи його за: а) кінець; б) середину.

(а) $mgl/2$; б) $mgl/4$.)

3.20. Вивести формулу для обчислення потенціальної енергії довільного тіла маси m в однорідному полі сил тяжіння.

($U = mgh_c$, h_c – *висота центра мас тіла над нульовим рівнем*)

3.21. Знайти роботу необхідну для того, щоби поставити вертикально стовп, який лежить на землі. Маса стовпа m = 200 кг, висота h = 5 м. Прийняти g = 10 м/с^2.

(A = 5 кДж.)

3.22. Довга еластична трубка довжини l, яка зігнута у формі U-подібного коліна із закріпленим одним кінцем, наполовину заповнена водою й утримується за інший кінець, рис. 3.1. Маса води в трубці m. Нехтуючи масою трубки та її радіусом закруглення, а також тертям, визначити роботу необхідну для того, щоби вилити всю воду з трубки, підіймаючи її за незакріплений кінець.

($A = mgl/4$.)

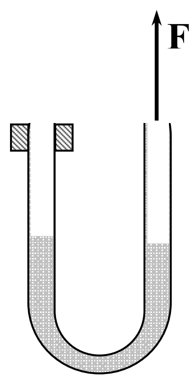

Рис. 3.1

3.23. Горизонтальне жалюзі масою 1 кг і довжиною 2 м збирають у тонку смужку над вікном. Яку роботу при цьому виконують. Тертям знехтувати, прийняти g = 10 м/с^2.

(10 Дж.)

3.24. Чому дорівнює потенціальна енергія невагомої пружини, до якої підвішено тіло маси 10 кг, якщо розтяг пружини становить 5 см? $g = 10$ м/с^2.

(2,5 Дж.)

3.25. Знайти роботу необхідну для стискання пружини на 10 см, якщо для її стискання на 1 см потрібна сила 100 Н.

(50 Дж.)

3.26. Для розтягу гумового шнура на 1 см потрібна робота 5 Дж. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти цей шнур ще на 1 см?

(15 Дж.)

3.27. Брусок маси m = 1 кг, який з'єднаний з гумовою ниткою жорсткості k = 20 Н/м, лежить на шорсткій горизонтальній поверхні з коефіцієнтом тертя $\mu = 0{,}2$. Яку роботу треба виконати, аби, тягнучи за нитку, зрушити брусок з місця?

($A = (\mu mg)^2/2k = 0{,}1$ Дж.)

3.28. До центра диска маси 1 кг, який лежить на горизонтальній поверхні прикріплена невагома пружина жорсткості 0, 1 Н/см. Яку роботу треба виконати, щоби за вільний кінець пружини підняти диск на висоту 50 см над поверхнею? $g = 10$ м/с^2 .

(10 Дж.)

3.29. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 = 20 м/с. Знайти максимальну висоту підйому тіла та його швидкість на середині підйому. Опором повітря знехтувати.

$$\left(h = v_0^2/2g = 20 \text{ м};\ v = \sqrt{gh} = v_0\big/\sqrt{2} \approx 14 \text{ м/с.}\right)$$

3.30. З якою початковою швидкістю було кинуто вертикально вгору тіло, якщо, на висоті підйому h = 40 м воно втратило половину швидкості. Опором повітря знехтувати.

$$\left(v = \sqrt{8gh/3} \approx 32 \text{ м/с}\right)$$

3.31. До вільного кінця закріпленої іншим кінцем невагомої вертикальної пружини жорсткості k приєднують тягарець маси m й утримують його в положенні не деформованої пружини. Потім тягарець повільно опускають аж поки він повисне. Тертя відсутнє. Знайти зміну потенціальної енергії пружини, $\Delta U_{пр}$, тягарця ΔU_m та системи в цілому ΔU . Пояснити результат.

3.32. Тіло маси m = 5 кг, що вільно падає з висоти h = 20 м, досягає землі зі швидкістю 16 м/с. Знайти середню силу опору повітря, що діяла на тіло.

(18 Н.)

3.33. М'яч, який вільно падає на горизонтальну поверхню з висоти H, після абсолютно пружного відскоку (без утрати швидкості) підіймається на висоту $h = \eta H$ ($\eta < 1$). Знайти, яку частку ε від ваги м'яча складає сила опору повітря, вважаючи її сталою.

($\varepsilon = (1-\eta)/(1+\eta)$.)

3.34. М'яч маси 0,5 кг кинуто вниз з висоти 2,25 м із швидкістю 3 м/с. Знайти середню силу опору повітря, якщо після пружного (без утрати швидкості) відскоку від землі м'яч піднявся до точки кидання.

(0,5 Н.)

3.35. Частинка маси m = 20 г перебуває в спокої в точці О(0;0) потенціального поля $U = \alpha(x^2 + xy + y^2)$, де α = 0,1 Дж/м^2. Потім під дією деякої сторонньої сили вона перемістилась у точку Р(5;10) (м). Знайти швидкість частинки в точці Р, якщо стороння сила виконала роботу A = 26,5 Дж.

(30 м/с.)

3.36. Вагон маси m = 20 т, який рухається на сортувальній гірці зі швидкістю 1 м/с, стрічає упор. Знайти максимальне стиснення двох буферних пружин вагона, кожна з яких має жорсткість k = 10 кН/см.

(10 см.)

3.37. Шайба зісковзує без тертя з вершини похилої площини довжиною l = 3,6 м і кутом нахилу до горизонту 30°. Знайти швидкість шайби біля основи площини, g = 10 м/с^2.

$\left(v = \sqrt{gl} = 6 \text{ м/с.}\right)$

3.38. Перекинутий через горизонтальний штир канат довжини l, який висів нерухомо, внаслідок незначного поштовху починає зісковзувати. Нехтуючи тертям, визначити швидкість каната в момент сходу зі штиря.

$\left(v = \sqrt{gl/2}.\right)$

3.39. Невелика шайба починає зісковзувати без тертя з вершини гірки висотою H, яка має горизонтальний трамплін (рис. 3.2). Знайти висоту трампліна h, при якій шайба пролетить максимальну відстань S_m, і величину S_m.

($h = H/2$; $S_m = H$.)

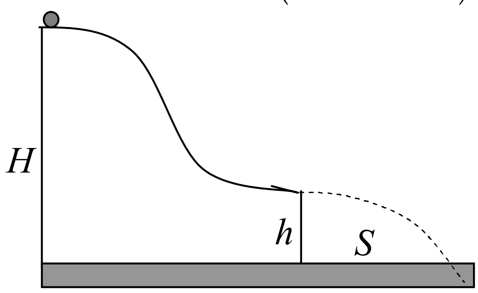

Рис. 3.2

3.40. Розв'язати задачу 2.46, використовуючи зв'язок між енергією та роботою.

$\left(v_m = \sin\alpha\sqrt{g/\eta\cos\alpha} \approx 3{,}7\text{м/с}; \quad S_m = 2\text{tg}\alpha/\eta = 4{,}0\text{м.}\right)$

3.41. Розпрямлений ланцюжок довжини l = 1,35 м лежить на шорсткому столі так, що один його кінець звисає. Ланцюжок починає сам зісковзувати, коли довжина звисаючої частини дорівнює η = 1/3 довжини ланцюжка. З якою швидкістю ланцюжок зійде зі стола?

$\left(v = \sqrt{(1-\eta)gl} = 3 \text{ м/с.}\right)$

3.42. На дошці поставленій під кутом 30° до горизонту лежить вантаж масою m = 30 кг. Аби протягти вантаж по дошці на відстань l = 3 м униз, виконали роботу A = 100 Дж. Яку роботу доведеться виконати, щоби повернути вантаж у вихідне положення? g = 10 м/с^2.

(1000 Дж.)

3.43. Шайба зісковзує без початкової швидкості з вершини похилої площини на горизонтальну поверхню, і проходить по ній до зупинки відстань рівну довжині площини. Знайти кут нахилу площини до горизонту, якщо коефіцієнт тертя на всьому шляху дорівнює k.

$(\alpha = 2\mathrm{arctg}\, k)$.

3.44. Брусок маси m зісковзує з вершини гірки довільного (не плоского) профілю висотою h і, пройшовши певний шлях по горизонталі, зупиняється. Яку роботу треба виконати, щоби витягти брусок на вершину по шляху спуску, прикладаючи силу вздовж напрямку руху?

$(A = 2mgh.)$

3.45. Розв'язати задачу 2.45 за допомогою закону збереження механічної енергії.

$$\left(X = 2X_0; \quad v_m = \sqrt{gX_0}.\right)$$

3.46. При падінні торби з піском маси m = 10 кг на горизонтальну чашку пружинних терезів із висоти h = 40 см максимальне стиснення пружини X_{m} = 10 см. Яким було би стиснення пружини X_0, коли би торбу поклали на чашку обережно так, що вона лишилася б зрівноваженою? Масою чашки з пружиною та тертям знехтувати.

$$\left(X_0 = \frac{X_{\mathrm{m}}^2}{2(h + X_{\mathrm{m}})} = 1\,\text{см}.\right)$$

3.47. Дві однакові пластини маси m кожна скріплені між собою пружиною жорсткості k і поставлені на горизонтальну опору так, що одна пластина знаходиться над іншою. Стискаючи пружину, верхню пластину переміщують униз на відстань X і відпускають. Нехтуючи тертям і масою пружини, знайти, при якій величині X нижня пластина відірветься від опори.

$$\left(X > \frac{2mg}{k}.\right)$$

3.48. Невелика шайба розміщена на кінці дошки довжиною l = 7 м, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні. Коефіцієнт тертя між шайбою та дошкою k = 0,1. Унаслідок горизонтального поштовху шайба починає ковзати по дошці й зупиняється на її протилежному кінці. Знайти швидкість дошки v на момент припинення ковзання шайби, якщо маса дошки в η = 7 разів більша за масу шайби. Прийняти g = 10 м/с^2.

$$\left(v = \sqrt{\frac{2kgl}{\eta(\eta + 1)}} = 0{,}5\,\text{м/с}.\right)$$

3.49. Дві частинки масами m_1 і m_2, що рухаються зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, непружно стикаються. Знайти зміну кінетичної енергії системи ΔK. Проаналізувати залежність величини ΔK від напрямків руху частинок.

$$\left(\Delta K = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2.\right)$$

3.50. Дві кулі масами m_1 = 4 кг і m_2 = 10 кг, які рухаються зі швидкостями v_1 = 12 м/с і v_2 = 4 м/с, непружно стикаються. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при зіткненні, якщо:

– кулі рухаються назустріч одна одній;

– перша куля наздоганяє другу.

(365,7 Дж; 91,7 Дж).

3.51. Тіло маси m_1 = 4 кг абсолютно непружно стикається з нерухомим тілом маси m_2 = 2 кг. Кінетична енергія системи після зіткнення K = 6 Дж. Знайти кінетичну енергію першого тіла до зіткнення K_1.

$$\left(K_1 = K\frac{m_1 + m_2}{m_1} = 9 \text{ Дж.} \right)$$

3.52. Два тіла, що рухаються назустріч одне одному зі швидкостями v_1 = 2 м/с і v_2 = 4 м/с, непружно стикаються. Знайти відношення кінетичних енергій тіл до зіткнення K_1/K_2, якщо після нього тіла рухаються із швидкістю v = 1 м/с у напрямку початкового руху першого тіла .

$$\left(\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{4}. \right)$$

3.53. Дві кулі масами m_1 і m_2, що рухаються назустріч одна одній, непружно стикаються. До зіткнення кінетична енергія першої кулі була в 20 разів більшою за кінетичну енергію другої. Знайти, при яких значеннях відношення m_1/m_2 кулі після удару рухатимуться у напрямі початкового руху другої кулі.

$$\left(\frac{m_2}{m_1} > 20. \right)$$

3.54. Дві маленькі кульки масами m_1 і m_2 = 1,5 m_1 підвішені на нитках довжиною l = 1 м так, що дотикаються. Першу кульку відхилили на кут α = 60° і відпустили. Визначити, на яку висоту h піднімуться обидві кульки після непружного удару.

$$\left(h = \frac{l(1 - \cos\alpha)}{(1 + (m_2/m_1))^2} = 8 \text{ см.} \right)$$

3.55. Довести, що відносна швидкість двох частинок після абсолютно пружного зіткнення є завжди рівною за модулем і протилежною за напрямком їхній відносній швидкості до зіткнення.

3.56. Більярдна куля, що рухається зі швидкістю v, влучає в нерухому кулю. Знайти швидкості куль після зіткнення? Удар пружний, лобовий.

($v_1 = 0$, $v_2 = v$.)

3.57. Частинка маси m_1 стикається з нерухомою частинкою. Після пружного лобового удару частинки розлітаються в протилежних напрямах з однаковими швидкостями. Знайти масу другої частинки m_2.

($m_2 = 3m_1$.)

3.58. Куля маси m_1 відбуває пружне лобове зіткнення з нерухомою кулею маси m_2. При якому співвідношенні мас перша куля після удару полетить у зворотний бік?

($m_2 > m_1$.)

3.59. Куля масою m_1 рухається із швидкістю υ_1 = 3 м/с і наздоганяє іншу кулю масою m_2, що рухається уздовж тієї ж прямої із швидкістю υ_2 = 1 м/с. Унаслідок пружного лобового зіткнення між кулями перша з них зупиняється. Знайти відношення мас куль m_1/m_2.

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = \frac{\upsilon_1 - 2\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{1}{3}.\right)$$

3.60. Тіло масою m_1 = 2 кг відбуває пружний лобовий удар із нерухомим тілом масою m_2 = 6 кг. Знайти, яку частку K_2/K_0 кінетичної енергії перше тіло передає при ударі другому.

$$\left(\frac{K_2}{K_0} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{3}{4}.\right)$$

3.61. Тіло масою m_1 стикається з нерухомим тілом масою m_2. Удар – пружний лобовий. Знайти відношення мас тіл m_1/m_2, якщо швидкість першого тіла зменшилася в η = 3 рази: а) без зміни напрямку руху і б) із зміною напрямку руху.

$$\left(a)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta+1}{\eta-1} = 2\ ;\ б)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\eta-1}{\eta+1} = \frac{1}{2}.\right)$$

3.62. Тіло масою m_1 = 5 кг стикається з нерухомим тілом масою m_2 = 2,5 кг. Удар – пружний лобовий. Знайти кінетичну енергію першого тіла до удару K_0 і після удару K_1, якщо кінетична енергія другого тіла після удару K_2 = 5 Дж.

(K_0 = 5,62 Дж, K_1= 0,62 Дж.)

3.63. Між двома кулями масами m_1 = 1 кг і m_2 = 2 кг, які лежать на гладкій горизонтальній поверхні, вставили зв'язану ниткою стиснену невагому пружину, що має потенціальну енергію U = 3 Дж. З якими швидкостями розлетяться кулі, якщо нитку перепалити?

$$\left(\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2m_2 U}{m_1(m_1+m_2)}} = 2\frac{\text{м}}{\text{с}};\quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2m_1 U}{m_2(m_1+m_2)}} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}.\right)$$

3.64. Граната масою 900 г, яка лежить на гладкій горизонтальній поверхні, розривається на два осколки з масами, що відрізняються в 2 рази. Чому дорівнюють швидкості та загальний імпульс осколків $\vec{P}$, якщо їхня сумарна кінетична енергія дорівнює 9 кДж?

$$\left(100\ \text{м/с};\ 200\ \text{м/с};\ \vec{P} = 0\right).$$

3.65. Дві частинки з однаковими масами пружно стикаються. Модулі швидкостей частинок до удару υ_1 і υ_2, кут між їх напрямками α. Після удару модулі швидкостей часток v_1' і v_2'. Знайти кут β, під яким розлетяться частинки після удару.

$$\left(\beta = \arccos\left(\frac{v_1 v_2}{v_1' v_2'}\cos\alpha\right).\right)$$

3.66. Рухома куля стикається з нерухомою. Маси обох куль однакові. Вважаючи удар пружним і не центральним, знайти, під яким кутом α розлетяться кулі після удару.

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}.\right)$$

3.67. Частинка маси m_1 зіткнулася пружно з нерухомою частинкою маси m_2 і відскочила під кутом $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ до початкового напряму руху. Знайти, яку частку кінетичної енергії втратила перша куля при ударі.

$$\left(\frac{K_0 - K_1}{K_0} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}.\right)$$

3.68. Після пружного зіткнення частинки 1 із нерухомою частинкою 2 вони розлітаються під кутом $\alpha = 60°$ симетрично до початкового напрямку руху першої частинки. Знайти відношення мас частинок m_1/m_2 .

$$\left(\frac{m_1}{m_2} = 1 + 2\cos\alpha = 2.\right)$$

3.69. Куля, що рухається із швидкістю $v_0 = 2$ м/с, пружно стикається з нерухомою кулею такої ж маси й відлітає під кутом $\alpha = 30°$ до початкового напрямку руху. Знайти модулі швидкостей куль після удару v_1 і v_2 і кут β між векторами швидкостей $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$.

$$\left(v_1 = v_0\cos\alpha,\ v_2 = v_0\sin\alpha,\ \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.\right)$$

3.70. Між рухомою кулею маси $m_1 = 2$ кг із кінетичною енергією $K_1 = 100$ Дж і нерухомою кулею маси $m_2 = 3$ кг відбувається пружне не центральне зіткнення. Знайти кут α, на який відхилилася перша куля при зіткненні, якщо друга отримала кінетичну енергію $K_2 = 50$ Дж.

$$\left(\cos\alpha = \frac{2m_1K_1 - (m_1 + m_2)K_2}{2m_1\sqrt{K_1(K_1 - K_2)}} = 0{,}53 \Rightarrow \alpha = 58°.\right)$$

3.71. Дві шайбочки масами m_1 і m_2 одночасно починають зісковзувати назустріч одна одній з двох однакових гладких гірок висоти H. Швидкості шайбочок біля основи гірок напрямлені горизонтально уздовж однієї прямої. Зісковзнувши на гладку горизонтальну поверхню, шайбочки непружно стикаються. На яку висоту h й на яку гірку шайбочки піднімуться після зіткнення?

$$\left(h = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 H. \right)$$

3.72. З вершини нерухомого не плоского клина масою M, який може без тертя ковзати по горизонтальній поверхні, починає зісковзувати без тертя невеликий брусок маси m. Кут нахилу клина плавно зменшується й біля основи складає 0°. Знайти висоту клина h, якщо швидкість бруска біля його основи дорівнює v.

$$\left(h = \frac{v^2(M+m)}{2Mg}. \right)$$

3.73. На гладкій горизонтальній поверхні перебувають у спокої невелика шайба маси m та гладка гірка маси M і висоти h, що може вільно ковзати по поверхні. Яку мінімальну швидкість v необхідно надати шайбі, аби вона змогла подолати цю гірку?

$$\left(v = \sqrt{2gh\left(M+m\right)/M}. \right)$$

3.74. Тілу масою m = 10 кг, що лежить на нерухомій горизонтальній платформі маси M = 100 кг, поштовхом надають горизонтальної швидкості v = 5 м/с. Коефіцієнт тертя між тілом і платформою k = 0,2. Тертя між платформою й рейками, на яких стоїть платформа, не істотне. Знайти роботу сил тертя A_m на момент, коли тіло перестане ковзати по платформі. Визначити шлях S, який пройде платформа на цей момент.

$$\left(A_{тр} = -\frac{mMv^2}{2(M+m)} = -114\,Дж; \quad S = \frac{Mmv^2}{2kg(M+m)^2} \approx 0{,}53\,\text{м}. \right)$$

3.75. На горизонтальних рейках стоїть нерухома платформа маси M_1, а на ній – не закріплена гармата маси M_2. Тертя між платформою й рейками відсутнє. З гармати в горизонтальному напрямі вздовж рейок вилітає снаряд маси m із швидкістю v відносно землі. Унаслідок цього гармата зміщується на певну відстань відносно платформи й зупиняється. Знайти роботу сил тертя за час руху гармати по платформі.

$$\left(A_{тр} = -\frac{M_1 m^2}{2M_2(M_1+M_2)} v^2. \right)$$

3.76. Кулька маси m, що горизонтально летить із швидкістю v_1, потрапляє в дерев'яну кулю маси M, яка лежить на гладкій горизонтальній підлозі. Кулька пробиває дерев'яну кулю, пройшовши крізь її центр, і вилітає із швидкістю v_2. Знайти кількість тепла Q, що виділяється при цьому.

$$\left(Q = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2 - \frac{m}{M}\left(v_1 - v_2\right)^2 \right). \right)$$

3.77. На гладкій горизонтальній площині лежать дві однакові пластикові кулі маси m = 100 г. Маленька металева кулька тієї ж маси, що горизонтально летить із початковою швидкістю v = 100 м/с, пробиває першу кулю і застряє в другій. Знайти кількість теплоти Q_1, що виділилася в першій кулі, якщо в другій виділилася кількість теплоти Q_2 = 90 Дж. Вважати, що траєкторія кульки проходить через центри обох куль.

$$\left(Q_1 = 2v\sqrt{mQ_2} - 4Q_2 = 240\ \text{Дж}.\right)$$

4. *Динаміка твердого тіла*

4.1. Рівняння моментів відносно осі:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z .$$

4.2. Рівняння динаміки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$I\beta_z = M_z$$

4.3. Момент інерції протяжного тіла:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int_V r^2 \rho \mathrm{d}V .$$

4.4. Теорема Гюйгенса – Штайнера:

$$I = I_c + ma^2$$

4.5. Моменти інерції I_c деяких однорідних тіл:

Тіло	Вісь	Момент інерції I_c
Тонкий стержень довжини l	Перпендикулярна до стержня	$ml^2/12$
Суцільний циліндр (диск) радіуса R	Співпадає з віссю циліндра (диска)	$mR^2/2$
Суцільна куля радіуса R	Проходить через центр кулі	$2mR^2/5$

4.6. Робота моменту сил при обертанні тіла навколо фіксованої осі:

$$A = \int M_z \mathrm{d}\varphi .$$

4.7. Кінетична енергія твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} .$$

4.8. Кінетична енергія твердого тіла при плоскому русі:

$$K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} .$$

4.1 Частинка має імпульс $\vec{p}$ і момент імпульсу $\vec{L}_0$ відносно певної точки О. Знайти вираз моменту імпульсу $\vec{L}$ цієї частинки відносно іншої точки О′, положення котрої визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0$, проведеним з точки О.

$$\left(\vec{L} = \vec{L}_0 + \left[\vec{r}_0, \vec{p}\right]\right)$$

4.2 Маленька кулька маси *m* рівномірно рухається із швидкістю v по колу радіуса *R*.

– визначити модуль моменту імпульсу кульки *L*(*z*) відносно довільної точки О′ на осі, що проходить через центр кола перпендикулярно до його площини, в залежності від відстані z до центра кола. Чи можна твердити, що момент імпульсу кульки $\vec{L}$ не залежить від часу?

– Показати, що момент імпульсу кульки відносно вказаної осі не залежить від положення точки O′.

$$\left(L = mv\sqrt{z^2 + R^2}.\right)$$

4.3 На частинку, що розташована в точці з координатами (4, 3, 0) см, діє сила $\vec{F} = (3\vec{i} - 6\vec{j})$ Н. Знайти вектор $\vec{M}$ моменту цієї сили та її плече d відносно початку координат.

$$\left(\vec{M} = -0{,}33\vec{k}\ \text{Нм};\quad d = 4{,}91\,\text{см}\right)$$

4.4 Лінії дії двох антипаралельних сил однакової величини («пари сил») розташовані на відстані d («плече пари»). Аналітично довести, що момент пари сил не залежить ані від розташування початку відліку, відносно якого він визначається, ані від положення точок прикладання сил пари.

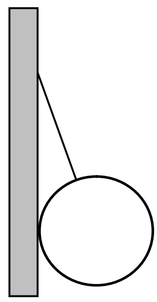

Рис. 4.1

4.5 До гладенької вертикальної стінки на нитці довжиною 4 см підвісили кулю масою 0,3 кг і радіусом 2,5 см.

– Довести, що при рівновазі напрям нитки буде обов'язково проходити через центр кулі, як показано на рис 4.1.

– Знайти силу, з якою куля тисне на стінку.

(1,225 Н)

4.6 Кулю масою m = 0,5 кг підвісили на нитці до вертикальної шорсткої стінки так, що нитка є дотичною до кулі (рис. 4.2). При цьому внаслідок тертя куля перебуває в рівновазі. Знайти найменший коефіцієнт тертя k між стінкою і кулею та силу натягу нитки T, якщо кут між ниткою та стінкою дорівнює α = 45°.

$$\left(k = \left(1/\sin\alpha\right) \approx 1{,}4;\quad T = mg/\left(1 + \cos\alpha\right) \approx 2{,}9\ \text{Н}\right)$$

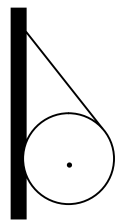

Рис.4.2

4.7 Тонкий однорідний стержень маси m = 1 кг знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні. До кінця стержня перпендикулярно прикладена деяка горизонтальна сила $\vec{F}_1$, а на відстані l = 20 см від цього кінця – антипаралельна до $\vec{F}_1$ сила $\vec{F}_2$ величиною 5 Н. Знайти довжину стержня L, якщо він рухається поступально з прискоренням a = 2 м/с^2.

$$\left(L = \frac{2F_2}{ma}l = 1\,\text{м}\right)$$

4.8 Котушка із відмотаною ниткою певної довжини l лежить на горизонтальній шорсткій поверхні. Відношення зовнішнього радіуса котушки до радіуса шару ниток $(R/r) = \eta$. Як буде змінюватися величина l, якщо до

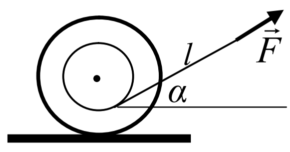

Рис. 4. 3

вільного кінця нитки прикласти силу $\vec{F}$ під кутом α до поверхні (рис. 4.3)?

$$\left(\begin{array}{c}\textit{Зменшуватиметься при } \alpha < \alpha_0,\ \textit{збільшуватиметься при } \alpha > \alpha_0 \\ \textit{і лишатиметься незмінною при } \alpha = \alpha_0,\ \textit{де } \alpha_0 = \arccos(1/\eta).\end{array}\right)$$

4.9 При якій величині сили F і кута α котушка з попередньої задачі буде перебувати в спокої, якщо її маса m і коефіцієнт тертя об поверхню k?

$$\left(\alpha = \alpha_0,\ F < \frac{kmg}{\sin\alpha_0 + \cos\alpha_0},\ \textit{де}\ \alpha_0 = \arccos(1/\eta)\right)$$

4.10 Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного стержня довжини l і маси m відносно перпендикулярної осі, що проходить:

а) через центр мас стержня;

б) через його кінець.

$$\left(a)\,\frac{ml^2}{12};\quad б)\,\frac{ml^2}{3}\right)$$

4.11 Знайти вираз моменту інерції тонкого круглого кільця маси m і радіуса R відносно осі, що:

а) проходить через центр кільця перпендикулярно до його площини;

б) перпендикулярна до площини кільця й дотикається до нього;

в) збігається з діаметром кільця.

((а) mR^2; б) $2mR^2$; в) $mR^2/2$.)

4.12 Знайти вираз моменту інерції тонкого однорідного диска маси m і радіуса R відносно осі, що:

а) проходить через центр диска перпендикулярно до його площини;

б) перпендикулярна до площини диска й проходить через середину радіуса;

в) співпадає з діаметром диска

(а) $mR^2/2$; б) $3mR^2/4$; в) $mR^2/4$.)

4.13 Знайти вираз моменту інерції тонкого сферичного шару радіуса R і маси m відносно осі, що:

а) проходить через центр сфери;

б) дотикається до шару.

(а) $2mR^2/3$; б) $5mR^2/3$.)

4.14 Знайти вираз моменту інерції однорідної кулі радіуса R і маси m відносно осі, що:

а) проходить через її центр;

б) дотикається до її поверхні.

(а) $2mR^2/5$; б) $7mR^2/5$)

4.15 Диск радіуса $R = 30$ см із концентричним отвором радіуса $r = 10$ см має масу $m = 1$ кг. Обчислити момент інерції J цього тіла відносно осі симетрії, перпендикулярної до його площини.

$$\left(J = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} = 5\cdot 10^{-2}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2\right)$$

4.16 Тонкий стержень має масу 1,4 кг. Знайти довжину стержня, якщо його момент інерції відносно осі, яка розташована перпендикулярно до стержня на відстані у чверть довжини від кінця, дорівнює 0,9 кгм^2.

(1,0 м *або* 2,1 м)

4.17 Фізичний маятник являє собою тонкий стержень довжини 1 м і маси 1 кг, до якого прикріплено диск маси 5 кг і радіуса 20 см (рис. 4.4). Обчислити момент інерції маятника відносно осі, що проходить через його верхній кінець перпендикулярної до площини диска.

(7,6 кгм^2.)

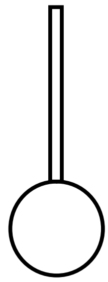

Рис.4.4

4.18 Циліндр маси m_1=10 кг може обертатися без тертя навколо нерухомої горизонтальної власної осі. На циліндр намотано тонкий шнур, до кінця якого підвішена гиря маси m_2 = 2 кг. З яким прискоренням a буде опускатися гиря, якщо її відпустити?

$$\left(a = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2{,}8 \text{ м/с}^2 \right)$$

4.19 Через нерухомий блок маси m = 200 г перекинута тонка нитка, до кінців якої підвішено тягарці масами m_1 = 150 г та m_2 = 250 г. З яким прискоренням будуть рухатися тягарці, якщо їх відпустити? Блок уважати однорідним диском, тертям знехтувати.

$$\left(a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + m/2} g = 1{,}96 \text{ м/с}^2 \right)$$

4.20 Два бруски масами m_1 = 1,0 кг і m_2 = 0,5 кг з'єднані ниткою, перекинутою через закріплений на краю горизонтального стола блок, як показано на рис. 4.5. Знайти прискорення a тіл та сили натягу нитки T_1 і T_2 по обидва боки блока. Коефіцієнт тертя бруска m_1 об стіл k = 0,2. Блок вважати однорідним диском маси m = 3,0 кг, тертям в осі знехтувати.

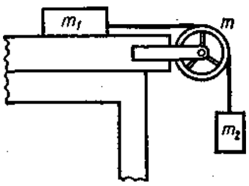

Рис. 4.5

$$\left(a = \frac{m_2 - km_1}{m/2 + m_1 + m_2} g = 0{,}98 \text{ м/с}^2; \quad T_1 = 2{,}94 \text{ Н}; \quad T_2 = 4{,}41 \text{ Н} \right)$$

4.21 Маховик із радіусом R = 1,0 м розкручують протягом певного часу τ за допомогою двигуна, що створює на валу маховика момент сил M = 400 Нм. Потім двигун вимикають, і притискають до обода маховика дві гальмівні колодки з однаковою силою F. Знайти величину F, якщо коефіцієнті тертя між маховиком і колодками k = 0,5, і маховик зупинився через час $\tau_1 = 2\tau$. Тертям у підшипниках знехтувати.

(F = 200 Н.)

4.22 Маховик у вигляді диска маси m = 50 кг із радіусом R = 20 см обертається навколо нерухомої осі з частотою n = 480 об/хв. Який гальмівний момент сил M треба створити, щоби маховик:
– зупинився через t = 50 с;
– зробив до повної зупинки N = 200 обертів.

(M = 1,0 Нм *в обох випадках*.)

4.23 На невагомий циліндр, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої горизонтальної осі, намотано в один шар тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху циліндр починає розкручуватися під дією сили тяжіння. Знайти залежність прискорення a частини троса, що звисає, від її довжини x.

$$\left(a = \frac{x}{l} g\right)$$

4.24 На циліндр маси M, який може обертатися без тертя навколо власної нерухомої осі, намотано в один шар не закріплений тонкий трос довжини l і маси m. Унаслідок незначного поштовху трос починає розмотуватися без проковзування під дією сили тяжіння. Знайти залежність прискорення a троса від довжини x його частини, звисає. Визначити величину a за мить до та після відриву троса від циліндра і пояснити причину його раптової зміни.

$$\left(a = g\frac{2m}{M+2m}\frac{x}{l}\right)$$

4.25 Тонка поліетиленова стрічка довжини l змотана в щільний рулон насаджена на горизонтальну вісь, яка може обертатися без тертя. Внаслідок незначного поштовху рулон починає розкручуватися під дією сили тяжіння. Визначити прискорення звисаючого кінця плівки a як функцію його довжини x.

$$\left(a = \frac{2x}{x+l} g\right)$$

4.26 Однорідний диск маси m і радіуса R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали на шорстку горизонтальну поверхню. Визначити момент сил тертя M, що діють на диск, та час руху диска до зупинки τ. Коефіцієнт тертя між диском та поверхнею дорівнює k?

$$\left(M = \frac{2kmgR}{3}; \quad \tau = \frac{3\omega R}{4kg}\right)$$

4.27 Однорідний циліндр маси m і радіуса R, що обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω, поклали бічною поверхнею на горизонтальну площину і надали самому собі. Через який час по тому циліндр почне рухатися без ковзання, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною дорівнює k? Чому дорівнює повна робота сил тертя?

$$\left(t = \frac{\omega R}{3kg}; \quad A = -\frac{m\omega^2 R^2}{6}\right)$$

4.28 З вершини півсфери радіуса R скочується без ковзання однорідна кулька, що має масу m і радіус r. Знайти:
– силу тиску кульки на півсферу як функцію кута α між радіусом-вектором кульки й вертикаллю $F(\alpha)$;
– висоту h від основи, на якій кулька відірветься від півсфери;
– кутову швидкість кульки ω на момент відриву.

$$\left(F(\alpha) = \frac{mg}{7}(17\cos\alpha - 10); \qquad h = \frac{10}{17}R; \qquad \omega = \sqrt{\frac{10g}{17R}} \right)$$

4.29 Обруч скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:
– час τ, за який обруч скотиться до основи площини, якщо її висота h = 10 см і довжина l = 2 м;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та обручем, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau = \frac{2l}{\sqrt{gh}} \approx 4\ \text{с}; \quad k = \frac{h}{2\sqrt{h^2 + l^2}} \approx \frac{h}{2l} = 0{,}025. \right)$$

4.30 Однорідний циліндр скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:
– час τ, за який циліндр скотиться до основи площини, якщо її висота h = 1,25 м і кут нахилу до горизонту α = 30°;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та циліндром, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{3h}{g}} = 1{,}0\ \text{с}, \quad k = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}19. \right)$$

4.31 Однорідна куля скочується без ковзання з вершини похилої площини. Визначити:
– час τ, за який куля скотиться до основи площини, якщо її висота h = 1,75 м і кут нахилу до горизонту α = 30°;
– мінімальний коефіцієнт тертя k між площиною та кулею, при якому не буде ковзання.

$$\left(\tau = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{14h}{5g}} = 1{,}41\ \text{с}, \quad k = \frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}165. \right)$$

4.32 По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується без ковзання обруч, однорідний циліндр або куля. Знайти прискорення a кожного з тіл.

$$\left(a = \frac{g\sin\alpha}{1+\gamma}, \quad \textit{де}\ \ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі} \right)$$

4.33 По похилій площині з кутом нахилу до горизонту α скочується обруч, однорідний циліндр або куля. Визначити, при якій величині k коефіцієнта тертя тіла не будуть ковзати.

$$\left(k \geq \frac{\gamma}{1+\gamma}\operatorname{tg}\alpha, \quad \textit{де}\ \gamma = 1\ \textit{для обруча},\ \gamma = \frac{1}{2}\ \textit{для циліндра}\ \ \textit{і}\ \ \gamma = \frac{2}{5}\ \textit{для кулі} \right)$$

4.34 Суцільний та тонкостінний циліндри однакового розміру і маси пофарбовані в один колір. Циліндри одночасно починають скочуватися без ковзання з вершини похилої площини й викочуються на горизонтальну ділянку. Як можна розрізнити циліндри?

4.35 Котушка ниток маси m = 60 г лежить на горизонтальній шорсткій поверхні з коефіцієнтом тертя k = 1,0. Відношення зовнішнього радіуса котушки R до радіуса r шару ниток η = 2, момент інерції відносно власної осі $I = \gamma m R^2$, де γ = 0,7. Котушка починає рухатися без ковзання під дією сили F = 0,3 Н, прикладеної до вільного кінця нитки під кутом α = 45° до горизонту (рис. 4.3). Знайти прискорення осі котушки a та кутове прискорення β обертання котушки навколо власної осі, якщо радіус шару ниток r = 1,5 см.

$$\left(a = \frac{F(\eta\cos\alpha - 1)}{\eta(1+\gamma)m} \approx 0{,}6\ \text{м/с}^2, \quad \beta = \frac{a}{R} \approx 20\ \text{рад/с}^2 \right)$$

4.36 Маховик на нерухомій осі, що має кінетичну енергію 1,0 кДж, починає гальмуватися й, зробивши 80 обертів, зупиняється. Знайти момент гальмівних сил, вважаючи його сталим.

(2,0 Нм.)

4.37 Ротор мотора робить 1500 об/хв. Визначити обертовий момент, який діє на ротор, якщо потужність на валу мотора 500 Вт.

(3,18 Нм.)

4.38 Маховик із моментом інерції J = 50 кгм^2 обертається за законом $\varphi = a - bt + ct^2$, де a = 2 рад, b = 16 рад/с, c = 2 рад/с^2. Знайти залежність від часу потужності $P(t)$ на валу маховика та її величину на моменти часу t_1 = 0 с, t_2 = 4 с, і t_3 = 8 с.

($P(t) = 2Jc(2ct - b)$, P_1 = – 3,2 кВт, P_2 = 0, P_3 = 3,2 кВт.)

4.39 На маховик із власним моментом інерції 40 кгм^2 починає діяти обертовий момент 20 Нм. Обчислити кінетичну енергію маховика через 10 с по тому.

(500 Дж)

4.40 Маховик у вигляді диска з масою 80 кг і радіусом 30 см розкручують із стану спокою до частоти n = 10 об/с. Уважаючи маховик однорідним диском, знайти:

– роботу розкручування;
– величину цієї роботи за умови, що радіус маховика удвічі більший при тій самій масі.

(7,1 кДж; 28,4 кДж.)

4.41 Куля маси m = 10 г летить із швидкістю v = 800 м/с, обертаючись навколо своєї поздовжньої осі з частотою n = 3000 об/с. Приймаючи кулю за циліндрик із діаметром d = 8 мм, знайти кінетичну енергію K кулі.

$$(K = (m/4)(2v^2 + \pi^2 n^2 d^2) = 3{,}21 \text{кДж.})$$

4.42 Обчислити кінетичну енергію циліндра маси m = 4 кг, який котиться без ковзання по горизонтальній поверхні із швидкістю v = 1 м/с.

(3 Дж)

4.43 Однорідна куля маси 800 г, яка котиться без ковзання по горизонтальній поверхні, має кінетичну енергію 14 Дж. Знайти швидкість руху центра кулі.

(5 м/с.)

4.44 Визначити кінетичну енергію K візка, що котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю v. Маса візка без коліс m. Візок має чотири колеса у вигляді дисків однакової маси m_0.

$$\left(K = \frac{1}{2} v^2 (m + 6m_0) = 12 \text{ Дж} \right)$$

4.45 Куля маси m починає скочуватися без ковзання по площині, яка утворює кут α з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі як функцію часу.

$$\left(K = \frac{5}{14} m g^2 \sin^2 \alpha \cdot t^2 \right)$$

4.46 Тонкостінний порожнистий циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с};\ v_2 = \sqrt{gh} = 3{,}13 \text{ м/с} \right)$$

4.47 Однорідний циліндр в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість циліндра в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 3{,}61 \text{ м/с} \right)$$

4.48 Однорідна куля в першому випадку зісковзує без кочення, а в другому – скочується без ковзання з вершини похилої площини висотою h = 1 м. Визначити швидкість кулі в кінці спуску в обох випадках. Чому в другому випадку швидкість менша?

$$\left(v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \text{ м/с}; \quad v_2 = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = 3{,}74 \text{ м/с} \right)$$

4.49 Циліндр починає котитися без ковзання вгору по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α. Знайти:

– висоту, на яку підніметься циліндр, якщо його початкова швидкість дорівнює v_0;
– умову руху циліндра без ковзання.

$$\left(H = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g}; \qquad \textit{коефіцієнт тертя } k > \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha \right)$$

4.50 Олівець довжини l = 15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Уважаючи що нижній кінець олівця не ковзає, знайти, яку кутову ω та лінійну v швидкості буде мати наприкінці падіння:
– середина олівця;
– верхній його кінець.

(14 рад/с, 1,05 м/с; 14 рад/с, 2,1 м/с **).**

4.51 Масивна куля радіуса R, яка прикріплена до легкого тонкого стержня довжини $2R$ (фізичний маятник), підвішена за кінець стержня до горизонтальної осі. Маятник відхиляють на кут 60° від вертикалі й відпускають. Нехтуючи тертям і масою стержня, визначити максимальну швидкість центра кулі.

$$\left(v = 3\sqrt{\frac{15gR}{47}} \right)$$

4.52 Горизонтальний диск радіуса r, який обертається навколо власної вертикальної осі, розташований над нерухомим диском радіуса $R = 2r$, який може вільно обертатися навколо власної осі, що співпадає із віссю верхнього диска. Матеріал і товщина дисків однакові. Верхній диск падає на нижній, і, через тертя, диски згодом починають обертатися, як одне ціле. Якими стануть кутова швидкість верхнього диска та кінетична енергія системи порівняно з початковими значеннями?

$$\left(\textit{в} \;\; \eta = 1 + (R/r)^4 = 17\,\textit{разів меншими} \right)$$

4.53 Платформа у формі диска радіуса R = 3 м обертається навколо своєї осі з частотою n_1 = 1 об/хв. На краю платформи стоїть людина масою m = 60 кг. З якою частотою n_2 стане обертатися платформа, коли людина перейде в її центр? Момент інерції платформи J = 1080 кгм^2. Людину вважати матеріальною точкою.

$$\left(n_2 = \left(1 + \frac{mR^2}{J} \right) n_1 = 1{,}5 \text{ об/хв} \right)$$

4.54 Платформа у вигляді диска радіуса R = 1,5 м і маси M = 180 кг обертається по інерції навколо вертикальної осі з частотою n = 10 об/хв. У центрі платформи стоїть людина маси m = 60 кг. З якою швидкістю v буде обертатися людина відносно підлоги, якщо вона перейде на край платформи?

$$\left(v = \frac{2\pi n M R}{M + 2m} = 0{,}94 \text{ м/с} \right)$$

4.55 На краю горизонтальної платформи маси m_2 = 240 кг у формі диска радіуса R = 2 м стоїть людина маси m_1 = 80 кг. Платформа може обертатися без тертя навколо своєї вертикальної осі. Знайти, з якою кутовою швидкістю ω буде обертатися платформа, якщо людина почне йти по її краю зі швидкістю v = 2 м/с відносно платформи.

$$\left(\omega = \frac{2m_2 v}{(2m_1 + m_2)R} = 0{,}4\ \text{рад/с}\right)$$

4.56 Людина повністю обходить по краю горизонтальну платформу у формі диска, що може вільно обертатися навколо власної вертикальної осі. На який кут φ повертається при цьому платформа, якщо її маса в η = 4 рази більша за масу людини? Людину розглядати як матеріальну точку.

$$\left(\varphi = \frac{4\pi}{\eta + 2} = 120^\circ\right)$$

4.57 У нижній кінець стержня маси M і довжини l, що підвішений шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси $m \ll M$, яка летіла горизонтально. Визначити швидкість кулі, якщо після удару стержень відхилився від вертикалі на кут α.

$$\left(v = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{2gl}{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

4.58 У середину стержня довжини l = 1,5 м і маси M = 10 кг, який підвішено шарнірно за верхній кінець, влучає та застряє куля маси m = 10 г, що летіла горизонтально зі швидкістю v_0 = 500 м/с. На який кут φ від вертикалі відхилиться стержень після удару

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{mv}{2M}\sqrt{\frac{3}{2gl}};\quad \varphi = 9{,}16^\circ\right)$$

4.59 Тонка однорідна квадратна пластинка M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що співпадає з однією з її сторін. У центр пластинки по нормалі пружно вдаряє кулька маси m, що летіла із швидкістю v. Знайти:

– швидкість кульки $\vec{u}$ та швидкість центра мас пластинки $\vec{V}$ після удару, якщо $(M/m) = \eta$;
– при якому значенні η напрям руху кульки після зіткнення не зміниться?

$$\left(а)\ \vec{u} = \frac{3 - 4\eta}{3 + 4\eta}\vec{v},\ \vec{V} = \frac{6}{3 + 4\eta}\vec{v};\quad б)\ \eta < \frac{3}{4}\right)$$

4.60 Знайти вектор $\vec{u}$ за умови попередньої задачі, вважаючи зіткнення кульки з пластинкою абсолютно непружним.

$$\left(\vec{u} = \vec{V} = 3\vec{v}/(3 + 4\eta)\right)$$

5. *Спеціальна теорія відносності*

5.1. Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \left(Vx/c^2\right)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$

5.2. Скорочення довжин й уповільнення часу:

$$l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}; \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

5.3. Релятивістський закон перетворення швидкостей:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1-\left(Vv_x/c^2\right)}; \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-\left(Vv_x/c^2\right)}.$$

5.4. Імпульс релятивістської частинки з масою спокою m_0:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} = m\vec{v}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}.$$

5.5. Рівняння динаміки релятивістської частинки:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\right) = \vec{F}$$

5.6. Повна енергія та енергія спокою релятивістської частинки:

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}; \quad E_0 = m_0c^2.$$

5.7. Кінетична енергія релятивістської частинки:

$$K = E - E_0 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}} - 1\right).$$

5.8. Зв'язок між енергією та імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2; \quad p^2c^2 = K(K+2E_0).$$

5.1. Стрижень власної довжини l_0 рухається в поздовжньому напрямі зі швидкістю v, рівною: 0,1c; 0,5c; 0,9c. Знайти відносну зміну довжини стрижня $\Delta l / l_0$.

(0,005; 0,13; 0,56)

5.2. При якій мінімальній швидкості поздовжнього руху стрижня довжини l_0 = 1 м можна виявити релятивістське скорочення його довжини, якщо вважати, що це можна зробити з точністю Δl = 0,1 мкм?

($v = 1{,}35 \cdot 10^5$ м/с)

5.3. Стрижень власної довжини l_0 = 1 м рухається із швидкістю v = 0,5c відносно лабораторної системи відліку, в якій кут між стрижнем і напрямом його руху $\alpha = 45°$. Знайти довжину стрижня в лабораторній системі відліку l і кут β між стрижнем і напрямом руху в системі відліку, де він перебуває у спокої.

$$\left(l = l_0 \sqrt{\frac{2(1 - v^2/c^2)}{2 - v^2/c^2}} = 0{,}925(м); \quad \beta = \mathrm{arctg}\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 41° \right)$$

5.4. Власна довжина катетів рівнобедреного прямокутного трикутника a = 1 м. Знайти площу трикутника в системі відліку, в якій він рухається уздовж одного з катетів із швидкістю v = 0,8c.

($S = 0{,}3\ м^2$)

5.5. Рівнобедрений прямокутний трикутник починає рухатись уздовж одного з катетів. При якій швидкості руху цей катет стане удвічі коротшим за гіпотенузу?

($\approx 0{,}82c$)

5.6. Деякий трикутник у лабораторній системі відліку є рівнобедреним прямокутним, а у власній системі відліку – правильним. Чому дорівнює відносна швидкість систем відліку, якщо їхні осі X напрямлені паралельно до бісектриси прямого кута ?

$$\left(v = c\sqrt{1 - \left(\mathrm{tg}\,30°/\mathrm{tg}\,60°\right)^2} \approx 0{,}82c \right)$$

5.7. Дві системи відліку рухаються з різними швидкостями уздовж стрижня. Швидкість першої системи відліку відносно стрижня v_1 = 0,1c, а довжина стрижня в ній l_1 = 1,1 м. Знайти швидкість руху другої системи відліку v_2 відносно стрижня, якщо довжина стрижня в ній l_2 = 1 м.

$$\left(v_2 = c\sqrt{1 - (l_2/l_1)^2 (1 - v_1^2/c^2)} = 0{,}43\,\mathrm{c} \right)$$

5.8. Об'єм нерухомого тіла V_0. Знайти його об'єм в системі відліку, відносно якої тіло рухається з швидкістю v = 0,9c.

(V = 0, 436 V_0)

5.9. По відношенню до лабораторної системи відліку нестабільна частинка, рухаючись із швидкістю v = 0,99c, за час життя пройшла відстань l = 3 км. Знайти власний час життя частки τ_0.

($\tau_0 \approx 1{,}4\cdot10^{-6}$ с)

5.10. Власний час життя мюона $\tau_0 = 2\cdot10^{-6}c$. Знайти швидкість мюона в лабораторної системи відліку, в якій за час життя він пролітає відстань 6 км.

(0,995c)

5.11. Система відліку K' рухається відносно системи K із швидкістю v уздовж осі X. Два спостерігачі K-системи, котрі знаходяться в точках 1 (x_1= 0) і 2 ($x_2 = l$), одночасно в момент $t_1 = t_2 = 0$ за своїми годинниками фіксують покази годинників K'-системи, що саме пролітають повз них. Спостерігач у точці 1 отримав t_1'= 0. Яке значення t_2' зафіксував спостерігач у точці 2?

$$\left(t_2' = -\frac{vl}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}} \right)$$

5.12. Експрес майбутнього, що складається із N = 100 вагонів однакової довжини l_0 = 20 м, рухається зі швидкістю v = 0,5c. Коли перший вагон поїзда порівнявся із світлофором, у ньому ввімкнули імпульсний лазер. А коли повз світлофор саме пройшов останній вагон, лазер випустив другий імпульс. Яку частоту повторення лазерних імпульсів зафіксує пасажир першого вагона?

$$\left(\frac{v}{Nl_0\left(1-(v/c)^2\right)} = 10^5\,\frac{1}{c} \right)$$

5.13. У певній інерціальній системі відліку в момент часу, для якого ct_1 = 1 м, в точці $\{2;0;0\}$(м) сталася подія A, а в момент часу, для якого ct_2 = 4 м, в точці $\{7;0;0\}$ (м) відбулася подія B. (c – гранична швидкість). Знайти відстань $\Delta l'$ між точками, в яких відбулися ці події у системі відліку, де вони були одночасними.

($\Delta l'$= 4 м).

5.14. У лабораторній системі відліку нестабільна частинка за час життя $\tau = 2\cdot10^{-6}$ с перемістилася з точки $\{100;100;300\}$ (м) у точку $\{300;400;100\}$(м). Знайти власний час життя частинки τ_0.

(τ_0 =1,45$\cdot10^{-6}$ с)

5.15. Фотон рухається уздовж осі x системи відліку K. Використовуючи формули перетворення швидкостей, обчислити швидкість фотона відносно системи відліку K', що рухається із швидкістю $v = c/2$ у від'ємному напрямі осі OX K-системи відліку.

5.16. Частинка рухається із швидкістю $\vec{v}_1$ відносно лабораторної системи відліку в напрямку осі OX. Знайти швидкість частинки $\vec{v}'$ в системі відліку, що рухається відносно лабораторної із швидкістю $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

$$\left(\vec{v}' = \frac{2c^2}{c^2 + v_1^2} \cdot \vec{v}_1\right)$$

5.17. Дві частинки рухаються назустріч одна одній із швидкостями $v_1 = 0{,}5c$ і $v_2 = 0{,}75c$ відносно деякої *К*-системи відліку. Знайти, з якою швидкістю:
– рухаються частинки одна відносно іншої;
– змінюється відстань між ними в *К*-системі відліку.

($0{,}91c$; $1{,}25c$)

5.18. Дві частинки рухаються з однаковою швидкістю v у взаємно перпендикулярних напрямках. Знайти модуль відносної швидкості частинок $v_в$.

$$\left(v_в = v\sqrt{2 - (v/c)^2}\right)$$

5.19. На нагрівання тіла витрачена енергія $Q = 1$ Дж. На скільки збільшилася маса тіла?

($\Delta m_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-17}$ кг)

5.20. Густина потоку енергії випромінювання Сонця поблизу Землі складає 1,4 кВт/м^2. Знайти зменшення маси Сонця Δm за 1 с і час τ, за який Сонце втратить 1% своєї маси. Прийняти відстань між Сонцем і Землею $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м і масу Сонця $m = 2 \cdot 10^{30}$ кг

($\Delta m = 4{,}4 \cdot 10^6$ т; $\tau = 1{,}43 \cdot 10^{11}$ років)

5.21. Яку швидкість має частинка, релятивістська маса котрої в 40000 разів перевищує масу спокою?

(*на* 9,4 см/с *меншу, ніж* $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.)

5.22. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, щоб її релятивістська маса збільшилася в 2 рази?

$$\left(\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{3c^2}{v_0^2}}\right)$$

5.23. Швидкість релятивістської частинки v_0. У скільки разів $\eta = v/v_0$ треба збільшити швидкість частинки, щоб її імпульс збільшився в 2 рази?

$$\left(\eta = 2\Big/\sqrt{1 + \left(3v_0^2/c^2\right)}\right)$$

5.24. Частинка з масою спокою m_0 у момент $t = 0$ починає рухатися під дією сталої сили $\vec{F}$. Знайти швидкість частки залежно від часу.

$$\left(\vec{v} = \frac{\vec{F}ct}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2 + F^2t^2}}\right)$$

5.25. Релятивістська частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі x згідно із законом $x=\alpha t^2/2$, α – задана стала. Знайти залежність від часу сили F, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{\alpha m_0}{\left(1-(\alpha^2t^2/c^2)\right)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

5.26. Частинка з масою спокою m_0 рухається уздовж осі x згідно із законом $x = \sqrt{a^2 + c^2t^2}$, де a – стала. Знайти силу F, що діє на частинку.

$$\left(F = \frac{m_0c^2}{a}\right)$$

5.27. При якій швидкості частинки v її повна енергія в два рази більша за енергію спокою?

$$\left(v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0,867c\right)$$

5.28. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія в два рази більша за енергію спокою?

$$\left(v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c = 0,943c\right)$$

5.29. При якій швидкості частинки v її кінетична енергія складає 25% від повної енергії?

$$\left(v = 0,6c\right)$$

5.30. Яку прискорюючу різницю потенціалів U має пройти електрон із стану спокою, щоб його швидкість становила $v = 0,95c$?

$(U = 1,1\cdot10^6$ В$)$

5.31. Яку роботу A потрібно виконати, щоби збільшити швидкість частинки з масою спокою m_0 від $v_1 = 0,6c$ до $v_2 = 0,8c$? На скільки відсотків $\eta = (A - A')/A$ правильний результат відрізняється від значення роботи A', обчисленого за нерелятивістською формулою?

$(A = 0,42\ m_0c^2;\quad \eta = 67\%)$

5.32. Визначити імпульс p релятивістської частинки з масою спокою m_0 і кінетичною енергією K.

$$\left(p = \frac{1}{c}\sqrt{K\left(K + 2m_0c^2\right)} \right)$$

5.33. Дві не взаємодіючі частинки з однаковими масами спокою m_0 стикаються, утворюючи складену частинку. Імпульси частинок до зіткнення $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$. Знайти масу спокою M_0 частинки, що утворилася.

$$\left(M_0 = \frac{2\sqrt{p^2 + m_0^{\ 2}c^2}}{c} \right)$$

5.34. Частинка з масою спокою m_0, що рухається зі швидкістю $v = (4/5)c$, непружно стикається з нерухомою часткою тієї ж маси. Знайти масу спокою M_0 складеної частки, що утворилася.

$$\left(M_0 = \frac{4m_0}{\sqrt{3}} \right)$$

5.35. Частинка з масою спокою m_0 і кінетичною енергією K налітає на нерухому частинку з тією ж масою спокою. Знайти масу спокою M_0 і швидкість v складеної частинки, що утворилася в результаті зіткнення.

$$\left(M_0 = \frac{\sqrt{2m_0(K + 2m_0c^2)}}{c},\ v = c\sqrt{\frac{K}{2m_0c^2 + K}} \right)$$

6. *Механічні коливання*

6.1. Зв'язок між параметрами гармонічних коливань:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

6.2. Частота коливань матеріальної точки маси m під дією сили $F = -kx$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6.3. Період гармонічних коливань і власна частота фізичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

6.4. Зведена довжина фізичного маятника:

$$l_{зв} = \frac{I}{ml}.$$

6.5. Частота вільних загасаючих коливань за наявності гальмівної сили $\vec{F} = -r\vec{v}$:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \beta = \frac{r}{2m} - \text{коефіцієнт загасання.}$$

6.6. Амплітуда загасаючих коливань:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}.$$

6.7. Характеристики загасання:

час релаксації $$\tau = \frac{1}{\beta};$$

логарифмічний декремент загасання $$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T;$$

добротність коливальної системи $$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

6.8. Енергія загасаючих коливань при слабкому загасанні $(\beta << \omega_0)$:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}.$$

6.9. Відносна втрата енергії коливань за один період при слабкому загасанні:

$$\frac{\delta W}{W} = \frac{2\pi}{Q}.$$

6.1. Матеріальна точка масою m = 0,2 кг здійснює коливання за законом S = 0,08 cos(20πt +π/4). Знайти залежності від часу швидкості, прискорення та сили, що діє на точку, а також амплітудні значення цих величин.

$$\left(\begin{array}{l} v_x = -5{,}03\sin(20\pi t + \pi/4; \;\; a_x = 315{,}83\cos(20\pi t + \pi/4); \;\; F_x = ma_x; \\ v_m = 5 \text{ м/с}; \;\; a_m = 320 \text{ м/с}^2; \;\; F_m = 64 \text{ Н}. \end{array}\right)$$

6.2. За умовою попередньої задачі визначити кінетичну, потенціальну та повну енергію точки

$$\left(K = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 3\pi/4)\,\text{Дж};\;\; U = 2{,}5\cos^2(20\pi t + 5\pi/4)\,\text{Дж};\;\; W = 2{,}5\,\text{Дж.}\right)$$

6.3. За умовою попередньої задачі визначити лінійну частоту та період зміни кінетичної енергії.

(20 Гц; 50 мс.)

6.4. Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою A і періодом T. Знайти:

– час t_1, за який зміщення частинки змінюється від 0 до $A/2$;
– час t_2, за який зміщення змінюється від $A/2$ до A.

($t_1 = T/12$; $t_2 = T/6$.)

6.5. Коливання матеріальної точки відбуваються за законом $S = 4\cdot\cos^2(0{,}5t)\cdot\sin(1000\cdot t)$. Розкласти коливання на гармоніки й зобразити їхній спектр.

($S = 2\sin 1000t + \sin 1001t + \sin 999t$)

6.6. Точка здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили. Знайти роботу цієї сили за один період коливань.

($A = 0$)

6.7. Вантаж масою m, що підвішений на пружині, розтягає її на Δl. Потім вантаж відтягнули ще трохи вниз і відпустили. З якою частотою почне коливатися вантаж?

$$\left(\omega_0 = \sqrt{g/\Delta l}\right)$$

6.8. Знайти період малих власних коливань стовпчика рідини довжини L в U – подібній трубці. В'язкістю знехтувати.

$$\left(T = \pi\sqrt{2l/g}\right)$$

6.9. Знайти період малих вільних вертикальних коливань зануреного у воду циліндричного поплавця довжини l = 10 см, густина матеріалу якого $\rho = 0{,}8$ г/см^3.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\rho/\rho_0} \approx 0{,}5\,\text{с}\right)$$

6.10. Визначити період малих коливань математичного маятника довжиною $l = 20$ см, зануреного в рідину, густина якої в $\eta = 3{,}0$ рази менша за густину маятника. Опором рухові в рідині знехтувати.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{\eta l/g(\eta - 1)} = 1{,}1\text{с}\right)$$

6.11. Знайти залежність від часу сили натягу нитки математичного маятника $F(t)$, якщо максимальний кут відхилення нитки від вертикалі дорівнює φ_0. Маса маятника дорівнює m, довжина – l. Коливання вважати гармонічними.

$$\left(F = mg(3\cos\varphi(t) - 2\cos\varphi_0),\;\; \text{де}\;\; \varphi(t) = \left(\sqrt{g/l}\right)t\right)$$

6.12. Поршень масою m і площею S ділить циліндр із газом на дві рівні частини. Вважаючи процес ізотермічним, визначити частоту малих вільних коли ваньпоршня. Довжина циліндра l, тиск газу P, тертя відсутнє.

$$\left(\omega_0 = \sqrt{4PS/ml}\right)$$

6.13. Фізичний маятник у вигляді однорідного стрижня довжиною l коливається навколо осі, що проходить через його кінець. Знайти період малих коливань і зведену довжину маятника.

$$\left(T = 2\pi\sqrt{2l/3g};\quad l_{зв} = 2l/3\right)$$

6.14. На якій відстані x_m від центра мас потрібно підвісити тонкий стрижень заданої довжини l, аби отриманий фізичний маятник мав максимальну можливу частоту вільних коливань? Знайти величину цієї частоти ω_m ?

$$\left(x_m = \frac{l}{2\sqrt{3}},\quad \omega_m = \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{l}}\right)$$

6.15. Фізичний маятник, який має власну частоту малих коливань ω_0, відхилили до положення нестійкої рівноваги й відпустили з незначним поштовхом. Знайти максимальну кутову швидкість маятника. Тертя відсутнє.

$$(\omega = 2\omega_0)$$

6.16. Тонка однорідна пластинка у формі правильного трикутника з висотою h здійснює малі коливання навколо горизонтальної осі, що співпадає з однією зі сторін трикутника. Знайти період коливань і зведену довжину такого маятника.

$$\left(T = \pi\sqrt{2h/g},\qquad l_{зв} = h/2\right)$$

6.17. Горизонтальна дошка з бруском, який лежить на ній, здійснює горизонтальні гармонічні коливання з амплітудою A = 10 см. Знайти коефіцієнт тертя між дошкою й бруском, якщо останній починає ковзати, коли період коливань дошки стає меншим за T_0 = 1,0 с.

$$\left(k = 4\pi^2 A/gT_0^2 = 0{,}4\right)$$

6.18. Горизонтальна платформа здійснює вертикальні коливання за законом $x = A\cdot\cos\omega t$. На платформі лежить шайба з непружного матеріалу. За якої умови шайба відриватиметься від платформи?

$$(A\omega^2 \geq g)$$

6.19. Знайти частоту ω_0 малих крутильних коливань суцільного однорідного циліндра масою M , до якого підвішено на шнурі з пружиною тягарець маси m, як показано на рис. 6.1. Жорсткість пружини k, ковзання шнура по циліндру відсутнє. Масою пружини й шнура, а також тертям в осі знехтувати.

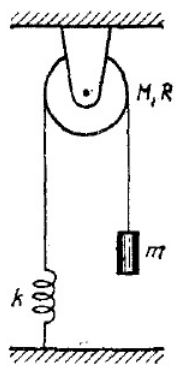

Рис. 6.1

$$\left(\omega_0 = \sqrt{k/(m + M/2)}\right)$$

6.20. До не розтягненої вертикальної пружини із закріпленим верхнім кінцем, підвісили і без поштовху відпустили тіло масою m. Жорсткість пружини дорівнює k.

– Нехтуючи масою пружини, знайти закон руху тіла $y(t)$, де y – його зміщення із початкового положення.

– Визначити максимальний і мінімальний розтяг пружини.

$$\left(y = \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega_0 t), \text{ де } \omega_0 = \sqrt{k/m}; \quad 2mg/k \text{ і } 0; \right)$$

6.21. На пружині жорсткості k висить куля масою m і радіусом r, яка занурена в рідину з коефіцієнтом в'язкості η. Визначити власну частоту коливань такого осцилятора, його добротність і час релаксації коливань.

$$(1{,}6\ \text{Гц}; \quad 210; \quad 21\ \text{с}.)$$